吉田塾 連続講義 • 講義ノート

更新：1 月 18 日

Karel Švadlenka・京都大学

2017 年 後期

Contents

1 変分解析の基礎

1.1 最急降下曲線

次の問題を考える：

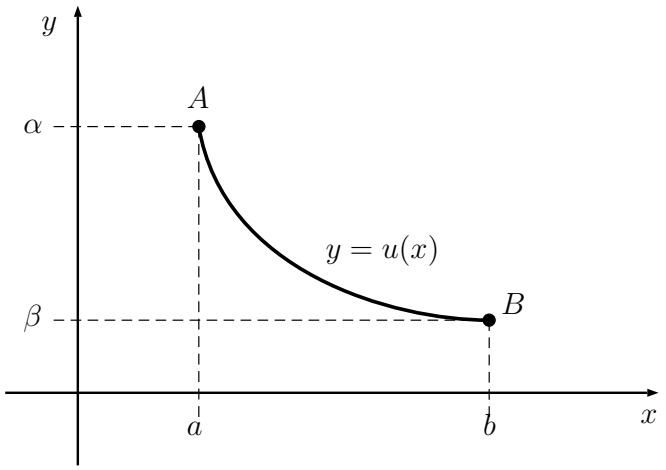
Brachistochrone problem

平面内の 2 点 $A = [a, \alpha], B = [b, \beta]$ が与えられ，$\alpha > \beta$ を満たすとする．質点が重力だけで出発点 A から終点 B にでたどり着くのに必要な時間を最短にする経路を求めよ．

下図の設定で，質点が動く経路が関数 $u(x)$ のグラフで表せるとする．このグラフの長さを L, 質点が点 A から $u(x)$ のグラフに沿って s だけの距離を動いた時点での質点の速度を $\tilde{v}$ とおく．そのとき，A から B に到着するのにかかる時間は

$$T = \int_0^T dt = \int_0^L \frac{dt}{ds}\, ds = \int_0^L \frac{1}{\tilde{v}(s)}\, ds = \int_a^b \frac{1}{v(x)} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx$$

である．ただし，ここで $v(x)$ は座標 x における質点の速度である．



摩擦がなければ，エネルギー保存の法則より速度 v を計算できる．質点の質量を m，重力加速度を g とすれば，

$$\frac{1}{2} m v^2(x) + mgu(x) = mg\alpha$$

より

$$v(x) = \sqrt{2g(\alpha - u(x))}.$$

A と B を結ぶ経路 $u(x)$ が決まれば，移動にかかる時間は

$$T[u] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (u'(x))^2}{\alpha - u(x)}}\, dx$$

で与えられる．

T という写像は経路の形を表す関数 u を時間を表す実数に写す写像で，このような写像を汎関数という．数学的に正確な議論を行う際，汎関数の定義域となる関数の集合（空間）を指定する必要がある．ここでは，区間 $[a,b]$ において値が α より小さく，微分が連続であるような関数 u であれば，汎関数の値 $T[u]$ は定義される．

今，許されるすべての経路 $y=u(x)$ のうち，時間 $T[u]$ を最小にするものを求めることが課題である．ただし，経路の両端の位置が決まっている：

$$u(a)=\alpha, \qquad u(b)=\beta.$$

この問題を一般化する：

変分問題

$$\inf_{u\in X} J[u] \tag{1.1}$$

ただし，　$J[u]=\displaystyle\int_a^b f\big(x,u(x),u'(x)\big)\,dx$,　$X=\big\{u\in C^1([a,b]);\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta\big\}$.

ここで，汎関数 J が関数 $f(x,u,\xi):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を通して，$x, u(x)$ と $u'(x)$ に一般的な形で依存するようにした（関数 f の変数は，第一変数は x，第二変数は u，第三変数は ξ という名前をつけた）．この問題は実際には三つの部分問題を含むことに注意する：

- 汎関数 J の X における下限を求める
- 下限を与える関数が存在するか（すなわち，$\inf=\min$ であるか）確認する
- min が達成される場合，最小値を与える関数を見つける

最小値を与える関数を最小化関数または minimizer と呼び，以降では $\overline{u}$ という記号で表す．

有限次元の最小化問題でもそうであるが，最小値と極小値を区別する．

(1) 汎関数 J の X における最小値が $J[\overline{u}]$ で達成されるとは，

$$J[\overline{u}]\le J[u] \qquad \forall u\in X \tag{1.2}$$

という意味である．

(2) 一方で，極小値の場合は，$\overline{u}$ のある近傍に限定すれば (1.2) が成り立つ．有限次元ではすべてのノルムが同値であるため，近傍を指定するときにどのノルムを用いても構わない．しかし，ここで考える最小化は無限次元である関数空間のなかで行うため，ノルムの取り方に

よって答えが変わる可能性がある．以下では，次の二つのノルムを使う：

$$\|u\|_{C^0([a,b])} = \max_{x\in[a,b]} |u(x)|, \qquad \|u\|_{C^1([a,b])} = \max_{x\in[a,b]} |u(x)| + \max_{x\in[a,b]} |u'(x)|.$$

(2a) 弱い極小値 $\overline{u} \in X$ は次で定義される：

$$\exists \delta > 0 \ \text{ satisfying} \qquad J[\overline{u}] \le J[u] \quad \forall u \in X \ \text{ such that } \ \|\overline{u} - u\|_{C^1([a,b])} < \delta. \tag{1.3}$$

(2b) 強い極小値 $\overline{u} \in X$ は次で定義される：

$$\exists \delta > 0 \ \text{ satisfying} \qquad J[\overline{u}] \le J[u] \quad \forall u \in X \ \text{ such that } \ \|\overline{u} - u\|_{C^0([a,b])} < \delta. \tag{1.4}$$

弱い極小値の場合，u の値と微分と両方が $\overline{u}$ のものに近い関数 u だけが比較の対象となるが，強い極小値の場合，u の値のみが $\overline{u}$ の値に近い関数 u がすべて比較の対象となるので，条件がより厳しくなる．そのため，弱い極小値が強い極小値になるとは限らない．

さて，最小化問題 (1.1) の弱い極小値を求めることをラグランジュのアイデアに沿って考える．試験関数（test function）$\varphi \in C_0^1(a,b)$ を任意に選ぶ（ここで，$C_0^1(a,b)$ は，$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ を満たす 1 回連続微分可能な関数 φ の空間である）．求める弱い極小値を $\overline{u} \in X$ とすれば，関数 $u_\varepsilon(x) := \overline{u}(x) + \varepsilon\varphi(x)$ は

$$u_\varepsilon \in X, \qquad \|\overline{u} - u_\varepsilon\|_{C^1([a,b])} = |\varepsilon| \|\varphi\|_{C^1([a,b])}$$

を満たす．したがって，ε が十分小さければ（$|\varepsilon| < \varepsilon_0 := \delta / \|\varphi\|_{C^1([a,b])}$ であれば），u_ε は (1.3) における比較の対象となり，

$$J[\overline{u}] \le J[u_\varepsilon] \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \ \text{ such that } |\varepsilon| < \varepsilon_0.$$

関数 $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $j(\varepsilon) := J[u_\varepsilon]$ で定義すると，この式は

$$j(0) \le j(\varepsilon) \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \ \text{ such that } |\varepsilon| < \varepsilon_0$$

と書き換えられる．しかし，これは j が $\varepsilon = 0$ において極小値を持つということを意味する．

汎関数の定義で現れる関数 f が滑らかであれば（以下では $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ と仮定する），j も滑らかな関数となり，

$$j'(0) = 0, \qquad j''(0) \ge 0 \tag{1.5}$$

が極小値の必要条件となる．

$$j(\varepsilon) = \int_a^b f\big(x, \overline{u}(x) + \varepsilon\varphi(x), \overline{u}'(x) + \varepsilon\varphi'(x)\big)\, dx$$

だから，$j'(0) = 0$ を具体的に計算すると，

$$\int_a^b \left[f_\xi \left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x) \right) \varphi'(x) + f_u \left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x) \right) \varphi(x) \right] \, dx = 0 \tag{1.6}$$

という方程式を得る．ただし，f_u, f_ξ は偏微分 $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial \xi}$ を表す記号である．

ここからは，二つの方法で議論を進めていく．

（方法 1）(1.6) の第 1 項で部分積分を行うことで，

$$\int_a^b \left[-\frac{d}{dx} \left(f_\xi \left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x) \right) \right) + f_u \left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x) \right) \right] \varphi(x) \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C^1([a,b])$$

with $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ がわかる．φ が境界点で消えるため，境界項が現れない．そこで，次の変分法の基本補題を用いる．

Fundamental lemma of the calculus of variations

関数 $v \in C([a,b])$ が条件

$$\int_a^b v(x)\varphi(x) \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C^1([a,b]) \ \text{ with } \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \tag{1.7}$$

を満たすならば，$v \equiv 0$ in $[a,b]$ が成り立つ．

Proof. $v(x_0) > 0$ となる点 x_0 が存在すると仮定すれば，$d, \varepsilon > 0$ が存在して，

$$v(x) > d \qquad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$$

が言える．$\varphi > 0$ in $(x_0 - \varepsilon/2, x_0 + \varepsilon/2)$ でそれ以外 0 となるような試験関数 φ をとれば，$\int_a^b v\varphi \, dx > 0$ となり，矛盾が得られる． □

この補題により，$[\cdot]$ の中身が恒等的にゼロであるので，

$$-\frac{d}{dx} \left(f_\xi \left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x) \right) \right) + f_u \left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x) \right) = 0 \qquad \forall x \in (a,b) \tag{1.8}$$

のように，オイラー・ラグランジュ方程式（Euler-Lagrange equation）という式を得る．f_ξ のなかに u の微分が入っており，それをさらに x について微分しているので，一般には 2 階微分方程式である．よって，この導出を正当化させるため $\overline{u} \in C^2([a,b])$ を仮定する必要がある．

（方法 2）一方で，(1.6) の第 2 項で部分積分を行うことで，

$$\int_a^b \left[f_\xi \left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x) \right) - \int_a^x f_u \left(t, \overline{u}(t), \overline{u}'(t) \right) dt \right] \varphi'(x) \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C^1([a,b])$$

with $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ がわかる．ここでは，次の補題を用いる．

Lemma of du Bois-Reymond

関数 $v \in C([a,b])$ が条件

$$\int_a^b v(x)\varphi'(x)\,dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C^1([a,b]) \text{ with } \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \tag{1.9}$$

を満たすならば，定数 $c \in \mathbb{R}$ が存在して，$v \equiv c$ in $[a,b]$ が成り立つ．

Proof. 定数 c を

$$c = \frac{1}{b-a}\int_a^b v(x)\,dx$$

で定義すれば，関数

$$\varphi(x) = \int_a^x (v(t) - c)\ dt$$

は補題の仮定を満たすので，

$$0 = \int_a^b v(x)\varphi'(x)\,dx = \int_a^b v(x)[v(x)-c]\,dx = \int_a^b [v(x)-c]^2\,dx.$$

最後の等号は $c\int_a^b (v(x)-c)\,dx = 0$ より正しい．連続で非負の関数の積分がゼロになるのは，その関数が恒等的にゼロのときのみだから，$v(x) \equiv c$ が従う． □

この補題により，$[\cdot]$ の中身が定数関数あるので，

$$f_\xi\left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\right) = \int_a^x f_u\left(t, \overline{u}(t), \overline{u}'(t)\right)dt + c \qquad \forall x \in (a,b)$$

という式を得る．これはオイラー・ラグランジュ方程式を積分したものである．この導出が正しいための条件は $u \in C^1([a,b])$ で，(方法 1) と比べると弱くなっている．しかし，得られた方程式を見ると，右辺は微分可能な関数であるから，左辺も微分可能であり，両辺を x について微分すると，(1.8) と同じ式が現れる．すなわち，$\overline{u}$ の微分が連続であれば，オイラー・ラグランジュ方程式を満たす．(実際，$f_{\xi\xi}(x,\overline{u},\overline{u}') \neq 0$ を満たす x について $\overline{u}''(x)$ が存在することが示される．)

わかったことをまとめると，$\overline{u} \in C^1([a,b])$ が (1.1) の弱い極小値であれば，オイラー・ラグランジュ方程式 (1.8) を満たさなければならない，ということである．オイラー・ラグランジュ方程式の解を変分問題の停留曲線と呼び，対応する汎関数の値を停留値と呼ぶ．停留値が極小値でも極大値でもない場合がある．

最急降下曲線の話に戻って，そのオイラー・ラグランジュ方程式を書いてみよう．一般には，

$$f_u - \frac{d}{dx}f_\xi = f_u - f_{x\xi} - f_{u\xi}\overline{u}' - f_{\xi\xi}\overline{u}'' = 0$$

という式であるが，この場合，関数 f が x に陽に依存しないため，次の関係が成り立つ：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f-\overline{u}'f_\xi) &= f_u\overline{u}'+f_\xi\overline{u}''-\overline{u}'f_{u\xi}\overline{u}'-\overline{u}'f_{\xi\xi}\overline{u}''-\overline{u}''f_\xi\\ &= f_u\overline{u}'-\overline{u}'f_{u\xi}\overline{u}'-\overline{u}'f_{\xi\xi}\overline{u}''\\ &= \big(f_u-f_{u\xi}\overline{u}'-f_{\xi\xi}\overline{u}''\big)\overline{u}'\end{aligned}$$

よって，$\overline{u}'\neq 0$ が成り立つ限り，オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dx}\big(f-\overline{u}'f_\xi\big)=0$$

という方程式と同値である．また，

$$f-\overline{u}'f_\xi=C,\qquad C\in\mathbb{R}$$

がオイラー・ラグランジュ方程式の第一積分である．

最急降下曲線の場合，

$$f(x,u,\xi)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+\xi^2}{\alpha-u}}$$

であるから，最後の第一積分の式に代入して，$C\sqrt{2g}$ を C で置き換えれば，

$$\sqrt{\frac{1+(\overline{u}'(x))^2}{\alpha-\overline{u}(x)}}-\overline{u}'(x)\frac{\overline{u}'(x)}{\sqrt{\alpha-\overline{u}(x)}\sqrt{1+(\overline{u}'(x))^2}}=C$$

を得る．整理して，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{(\alpha-\overline{u}(x))(1+(\overline{u}'(x))^2)}}&=C\\ (\overline{u}'(x))^2&=\frac{1-C^2(\alpha-\overline{u}(x))}{C^2(\alpha-\overline{u}(x))}.\end{aligned}$$

ここで，経路 $\overline{u}$ がパラメータ ϕ を用いて，$(x(\phi),y(\phi))$ と表せるとする．つまり，$\overline{u}(x(\phi))=y(\phi)$ である．予想される経路と上の式の形から，解が

$$y(\phi)=\alpha-\frac{1}{C^2}\sin^2\tfrac{\phi}{2}=\alpha-\frac{1}{2C^2}(1-\cos\phi)$$

という形で書けると仮定してもおかしくない．このとき，

$$\frac{dy}{d\phi}=-\frac{1}{C^2}\sin\tfrac{\phi}{2}\cos\tfrac{\phi}{2},\qquad (\overline{u}'(x(\phi)))^2=\frac{1-C^2(\alpha-\overline{u}(x(\phi)))}{C^2(\alpha-\overline{u}(x(\phi)))}=\frac{\cos^2\frac{\phi}{2}}{\sin^2\frac{\phi}{2}}$$

となるので，$\frac{dy}{d\phi}=\frac{d\overline{u}}{dx}\frac{dx}{d\phi}$ より

$$-\frac{1}{C^2}\sin\tfrac{\phi}{2}\cos\tfrac{\phi}{2}=\pm\frac{\cos\frac{\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}\cdot\frac{dx}{d\phi}$$

$\frac{dx}{d\phi} > 0$ とすると，

$$\frac{dx}{d\phi} = \frac{1}{C^2}\sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{1}{2C^2}(1-\cos\phi).$$

この方程式が積分できて，

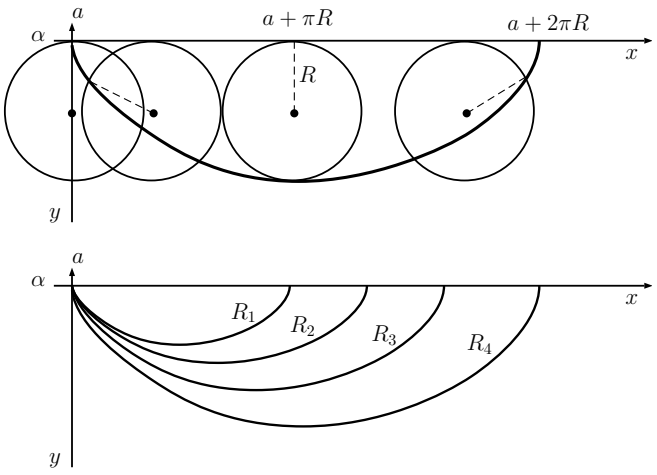
$$x(\phi) = \frac{1}{2C^2}(\phi - \sin\phi) + D.$$

$\phi = 0$ のとき，$\overline{u} = \alpha$ となるので，$x(0) = a$ より，$D = a$.

$R = \frac{1}{2C^2}$ とおいて，上の計算結果をまとめると，

$$\begin{aligned} x(\phi) &= a + R(\phi - \sin\phi) \\ y(\phi) &= \alpha - R(1-\cos\phi) \end{aligned}$$

で与えられる経路はオイラー・ラグランジュ方程式の解である．これは，水平な直線 $y = \alpha$ の下側を転がる半径 R の円の上にある点が描く軌跡で，サイクロイドと呼ばれる．
ここで，$\phi = 0$ を代入すると，$(x(0), y(0)) = (a, \alpha)$ となるので，左端における境界条件が満たされる．右端での境界条件を満たすには，ϕ の範囲と R を適切に定めればよい．下図でわかるように，$R \in (0, \infty)$ を変えていくことによって描かれるサイクロイドは $y < \alpha$ の半平面を埋め尽くす．また，この半平面の任意の点を通るサイクロイドはただ一つである．($x = a$ 上の点はカバーされないが，この点に関しては，明らかに自由落下が最急降下となる．)



サイクロイドはオイラー・ラグランジュ方程式を満たし，停留値を与えることがわかったが，それは極小値または最小値であるための必要条件にすぎない．実際に実験を行ってみると，サイクロイドが最短時間を提供する経路であることが確かめられるが，数学的に証明するには，(1.5) の 2 番目の式が満たされるかを考えないといけない．

演習問題

問題 1.1 円柱に制限された質点の最急降下曲線を求めよ．ただし，円柱の半径を R として，円柱の軸が重力の方向と平行であるとする．

詳細：質点が円柱上の点 A から円柱上の他の点 B に移動するのに必要な時間を最短にする円柱上の経路を求める．質点は静止状態から運動を始め，一様な重力場を動き，質点と円柱との間の摩擦力が無視できると仮定する．質点の位置を円柱座標 θ, z を用いて表すことができるとして，独立変数を θ とし，点 A から点 B にたどり着くのに必要な時間を $z(\theta)$ の汎関数として書く．対応するオイラー・ラグランジュ方程式を解くことで，汎関数の極値を求め，その性質を調べる．円柱を平面に広げたときの解の形がどうなるかについても考察する．

問題 1.2 次の補題を証明せよ．さらに，補題の定数 c_0, c_1 を g を用いて表せ．

補題

g が区間 $[a,b]$ 上の連続な関数で，$\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$ を満たすすべての関数 $\varphi \in C^2([a,b])$ について

$$\int_a^b g(x)\varphi''(x)\,dx = 0$$

が成立するとき，$c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ が存在し，

$$g(x) = c_1 x + c_0 \qquad \forall x \in [a,b]$$

である．

問題 1.3 $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ に対し，最小化問題

$$\inf_{u \in X} I(u), \qquad I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\,dx, \qquad X = \left\{u \in C^1([a,b]);\ u(a) = \alpha\right\}$$

の minimizer $\overline{u} \in C^2([a,b]) \cap X$ が存在すれば，minimizer $\overline{u}$ が区間 $[a,b]$ の右端 $x = b$ で満たす境界条件を求めよ．

問題 1.4 重力だけで動く地中電車の実現について昔から考察されている．つまり，地球のなかを自由に掘ってトンネルを作ることができれば，地上の 2 点の結ぶ時間を最小化するようにトンネル（経路）の形を設計すればよい．

(1) 微小な太さの球殻で積分することによって地球内の任意の質点における重力ポテンシャルが

$$V(r) = \frac{1}{2}\frac{mg}{R}r^2$$

であることを示せ．ただし，地球が一様であると仮定する．ここで，r は質点の地球の中心からの距離で，m は質点の質量，R は地球の半径である．

(2) 地球上の 2 点 A, B を結ぶ経路が地球の中心を含む一つの平面内にあり，極座標 (r, θ) において $r(\theta)$ の関数として表せると仮定したとき，この経路に沿って重力だけで動く質点が A から B に到着するのに必要な時間を求めよ．

(3) 最短時間を求める変分問題を記述し，対応するオイラー・ラグランジュ方程式の解を求めよ．

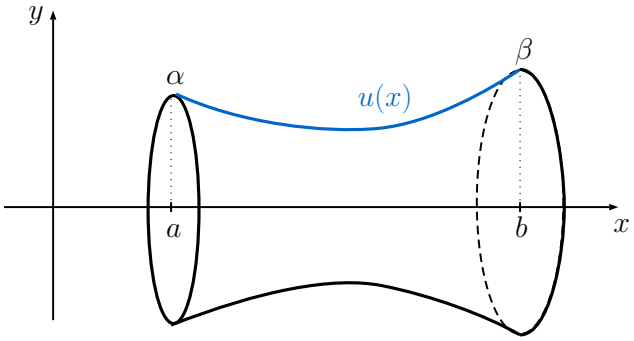
(4) (3) で求めた経路で電車を走らせるとしたら，京都から博多までかかる時間を見積もれ．このトンネルの深さは？

1.2　極小回転面

次の問題を考える：

面積最小の回転面の問題

非負の関数 $u(x)$ のグラフを x-軸のまわりで回転させてできる回転面のうち，面積が最小のものを求めよ．ただし，グラフの x の範囲を区間 $[a,b]$ とし，左端の回転面の半径を $\alpha>0$，右端の半径を $\beta>0$ と固定する．



上記の問題を式を用いて書くと，

$$\inf_{u\in X} J[u], \qquad J[u]=2\pi\int_a^b u(x)\sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx, \quad X=\left\{u\in C^1([a,b]);\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta\right\}. \tag{1.10}$$

1.1節で紹介した一般的な設定での被積分関数は

$$f(x,u,\xi)=2\pi u\sqrt{1+\xi^2}$$

である．最急降下曲線と同様に，x に陽に依存しないため，対応するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dx}(f-u'f_\xi)=0 \qquad \text{または} \qquad f-u'f_\xi=C, \quad C\in\mathbb{R}$$

と書ける．関数 $\overline{u}$ が面積を表す汎関数 J の弱い極小値ならば，このオイラー・ラグランジュ方程式を満たさなければならない．$f_\xi=2\pi u\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}$ より，2π を定数 C に含めておくと，この方程式は

$$\overline{u}\sqrt{1+(\overline{u}')^2}-\overline{u}'\overline{u}\frac{\overline{u}'}{\sqrt{1+(\overline{u}')^2}}=C$$

となる．整理して，

$$\frac{\overline{u}}{\sqrt{1+(\overline{u}')^2}} = C.$$

定数 C がゼロのとき，$\overline{u} \equiv 0$ という定数関数の解を得るが，これは境界条件を満たさないので，以降では $C > 0$ として，考察を進める．
$\overline{u}'$ について解くと，

$$\overline{u}' = \pm\frac{1}{C}\sqrt{\overline{u}^2 - C^2}$$

を得るが，$+$ の符号を採用して（実は，マイナスをとっても同じ結果が得られる），変数分離型として積分する：

$$\int \frac{1}{\sqrt{\overline{u}^2 - C^2}}\, d\overline{u} = \frac{1}{C}\int dx.$$

左辺の積分を求めるために，$\overline{u} = C\cosh y$ と置換する．

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \qquad (\cosh y)' = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \sinh y, \qquad \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$$

が成立するから，左辺は $\int dy$ と変形され，$y = \frac{1}{C}(x - D), D \in \mathbb{R}$ のように積分できて，結局，

$$\overline{u}(x) = C\cosh\left(\frac{x-D}{C}\right), \qquad C, D \in \mathbb{R}$$

という一般解を得る．これは懸垂線（英語で catenary) と呼ばれる曲線である．定数 C, D は境界条件 $\overline{u}(a) = \alpha, \overline{u}(b) = \beta$ より決めることになるが，非線形な連立方程式で解析的には解けないため，以下では二つの特別な場合を考える．

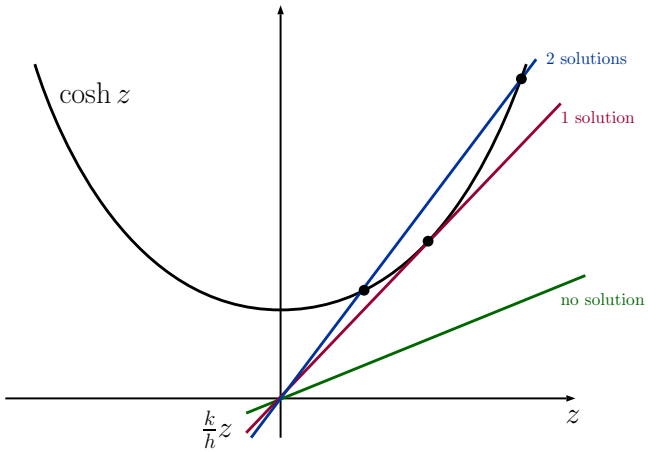
(1) $(a,b) = (-h,h), \alpha = \beta = k$ という対称的な場合
このとき境界条件は

$$C\cosh\left(\frac{-h-D}{C}\right) = k = C\cosh\left(\frac{h-D}{C}\right)$$

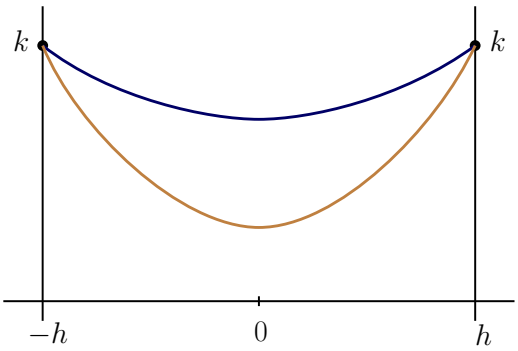
を意味する．cosh が偶関数だから，等式が成り立つのは $-h-D = h-D$ のときと $-h-D = -(h-D)$ のときであるが，前者は $h = 0$ で意味をなさないので，後者から従う $D = 0$ が成り立たなければならない．そこで，$z := \frac{h}{C}$ とおくと，$C\cosh z = k$ という式になり，$\frac{k}{C} = \frac{k}{h}z$ より，

$$\cosh z = \frac{k}{h}z$$

という方程式を z について解けばよい．これも解析的には解けないが，グラフを用いて解の個数を確かめることができる．



$\frac{k}{h}$ がある臨界値 k_c（$k_c \approx 1.50888$ と数値計算できる）より小さければ，解が存在せず，臨界値 k_c に等しければ，解がちょうど 1 個存在し，k_c より大きければ解が 2 個あることがわかる．この二つの解は以下のような浅い懸垂線と深い懸垂線である．



(2) $\overline{u}(0) = 1$ のように左端での値のみ指定する場合

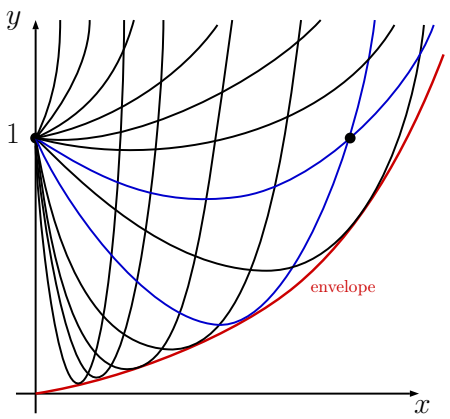
このとき，C, D に対する条件は $C\cosh(\frac{D}{C}) = 1$ となる．$\gamma = \frac{D}{C}$ とおくと，$\frac{1}{C} = \cosh\gamma$ となるので，$\overline{u}(x) = C\cosh(\frac{x-D}{C}) = C\cosh(\frac{x}{C} - \gamma)$ に注意すると，

$$\overline{u}(x) = \frac{\cosh(\cosh\gamma\, x - \gamma)}{\cosh\gamma}$$

という懸垂線の one-parameter family を得る．すなわち，γ を動かしていくと，点 $(0,1)$ を通るたくさんの懸垂線が得られる．

$$\overline{u}'(x) = \sinh(\cosh\gamma\, x - \gamma), \qquad \overline{u}'(0) = -\sinh(\gamma)$$

より，sinh の値域が $\mathbb{R}$ 全体であることを思い出すと，これらの懸垂線の $(0,1)$ における傾きは $(-\infty, \infty)$ のすべてが実現されることがわかる．



図で見てとれるように，この懸垂線の族は包絡線（赤色）をもつ．包絡線より上の任意の点を取れば，その点を右端とする懸垂線が二つ（青色）定まる．包絡線より下にある点を右端とする懸垂線が存在しない．この領域に対応する，いわゆる Goldschmidt の解は微分不可能なもので，$x=a$ と $x=b$ に位置する半径 α と β の二つの円盤とそれらを結ぶ x-軸の線分からなる．

ここからは，オイラー・ラグランジュ方程式の解 $\overline{u}$ が極小値を与えるかどうかをどのように見分けるかについて考える．設定としては，$f\in C^3([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ として，変分問題

$$\inf_{u\in X} J[u], \qquad J[u]=\int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx, \qquad X=\big\{u\in C^1([a,b]);\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta\big\} \tag{1.11}$$

に対応するオイラー・ラグランジュ方程式の解 $\overline{u}\in X\cap C^2([a,b])$ が存在するとする．

$\varphi\in C_0^1(a,b)=\{v\in C^1(a,b);\ v(a)=v(b)=0\}$, に対し，$j(\varepsilon)=J[\overline{u}+\varepsilon\varphi]$ とおく．$\overline{u}$ が極小値ならば，$j'(0)=0$ そして $j''(0)\geq 0$ がすべての $\varphi\in C_0^1(a,b)$ に成り立つ，という極小値の必要条件がある．また，$j'(0)=0$ そして $j''(0)>0$ がすべての $\varphi\in C_0^1(a,b)$ について成り立てば，$\overline{u}$ は極小値である，という十分条件がある．いずれにしても，j の 2 階微分が重要であるから，それを計算しておく．

$$\begin{aligned}
j(\varepsilon) &= \int_a^b f\big(x,\overline{u}(x)+\varepsilon\varphi(x),\overline{u}'(x)+\varepsilon\varphi'(x)\big)\,dx\\
j'(\varepsilon) &= \int_a^b \big[f_u\left(x,\overline{u}(x)+\varepsilon\varphi(x),\overline{u}'(x)+\varepsilon\varphi'(x)\right)\varphi(x)\\
&\qquad\qquad +f_\xi\left(x,\overline{u}(x)+\varepsilon\varphi(x),\overline{u}'(x)+\varepsilon\varphi'(x)\right)\varphi'(x)\big]\,dx\\
j''(0) &= \int_a^b \big[f_{uu}(x,\overline{u},\overline{u}')\varphi^2+2f_{u\xi}(x,\overline{u},\overline{u}')\varphi\varphi'+f_{\xi\xi}(x,\overline{u},\overline{u}')(\varphi')^2\big]\,dx
\end{aligned}$$

$P(x)=f_{uu}(x,\overline{u},\overline{u}')$, $Q(x)=f_{u\xi}(x,\overline{u},\overline{u}')$, $R(x)=f_{\xi\xi}(x,\overline{u},\overline{u}')$ とおいて，

$$\int_a^b \frac{d}{dx}[w(x)\varphi^2(x)]\,dx=0 \qquad \forall w\in C^1([a,b])$$

に注意すると，$j''(0)$ を

$$j''(0) = \int_a^b \left[(P + w')\varphi^2 + 2(Q + w)\varphi\varphi' + R(\varphi')^2 \right] \, dx$$

と書くことができる．これは

$$j''(0) = \int_a^b \left[R\left(\varphi' + \frac{Q + w}{R}\varphi \right)^2 + \left((P + w') - \frac{(Q + w)^2}{R} \right) \varphi^2 \right] \, dx$$

のように変形できるので，関数 w を微分方程式

$$w' = -P + \frac{(Q + w)^2}{R} \tag{1.12}$$

を満たすようにとれば，上の積分の符号が R の符号に支配されることが見込まれる．実際，以下で示すように，$R \geq 0$ in $[a, b]$ は $\overline{u}$ が極小値であるための必要条件である．しかし，$R \geq 0$ を $R > 0$ に変えても，十分条件ではない．その理由は，方程式 (1.12) の解が区間 $[a, b]$ 全体で存在するとは限らないからである．

例 1.1 (1.12) のような非線形な微分方程式の解は局所的な存在しか言えないことを示す例を挙げる．$(a, b) = (-2, 2), P \equiv -1, Q \equiv 0, R \equiv 1$ とすると，微分方程式 (1.12) は

$$w' = 1 + w^2$$

となる．この解は $w(x) = \tan(x + c)$ であるが，tan は長さ π の区間でしか定義されないため，c をどのように定めても，$(-2, 2)$ 全体で定義される解が得られない．

ルジャンドルの必要条件

汎関数 $I[u]$ が $\overline{u}$ において極小値を達成するための必要条件は

$$R(x) = f_{\xi\xi}(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)) \geq 0 \qquad \forall x \in [a, b].$$

Proof. $c \in (a, b)$ が存在して，$R(c) < 0$ であると仮定する．R の連続性と微分方程式の解の局所存在より，$\delta > 0$ が存在して，$x \in [c - \delta, c + \delta]$ において $R(x) < 0$ で，微分方程式

$$w' = -P + \frac{(Q + w)^2}{R}$$

の連続微分可能な解をもつ．

関数 $\varphi \in C^1([a, b])$ を条件

$$\varphi(x) = 0, \;\; x \notin [c - \delta, c + \delta], \qquad \varphi(x) \neq 0, \;\; x \in [c - \delta, c + \delta]$$

を満たすように選ぶと，上で定義した第 2 変分は

$$j''(0) = \int_{c-\delta}^{c+\delta} \left[P\varphi^2 + 2Q\varphi\varphi' + R(\varphi')^2\right] dx = \int_{c-\delta}^{c+\delta} R\left(\varphi' + \frac{Q+w}{R}\varphi\right)^2 dx \leq 0$$

となる．区間 $(c-\delta, c+\delta)$ において $\varphi' + \frac{Q+w}{R}\varphi = 0$ を境界条件 $\varphi(c-\delta) = 0$ のもとで満たす関数 φ が $\varphi(x) \equiv 0$ しかないから，この φ に対して $j''(0) < 0$ となり，極小値であることと矛盾する． □

回転面の問題で，Legendre の条件を確認する．$f(x, u, \xi) = 2\pi u\sqrt{1+\xi^2}$ より

$$f_{\xi\xi}(x, \overline{u}, \overline{u}') = 2\pi\frac{\overline{u}}{(1+(\overline{u}')^2)^{3/2}} = 2\pi\frac{C}{\cosh^2(\frac{x-D}{C})}$$

であるため，すべての正の関数 $\overline{u}$ について正となり，この必要条件を用いて解を排除することができない．

これを受けて，他の条件について考える．微分方程式 (1.12) が区間 $[a, b]$ で解をもてば，十分条件が得られる．(1.12) はリッカチの方程式（Riccati equation）で一般には解けないから，変換

$$w(x) = -Q - R\frac{\nu'(x)}{\nu(x)} \tag{1.13}$$

を $\nu(x) \neq 0\ \forall x \in [a, b]$ の仮定のもとで行い，線形な 2 階微分方程式（ヤコビ方程式）

$$\frac{d}{dx}(R\nu') + (Q' - P)\nu = 0 \qquad \text{または} \qquad \nu''(x) + \frac{R'}{R}\nu' + \frac{Q'-P}{R}\nu = 0 \tag{1.14}$$

に直す．境界条件を満たす解 ν が一意的に存在し二つの独立な基本解 ν_1, ν_2 の線形結合 $\nu(x) = C_1\nu_1(x) + C_2\nu_2(x)$ で書けるという一般的な理論があり，このような線形で斉次な方程式は扱いやすいので，ありがたいことである．

十分条件

次の 2 つの条件

(a) $R(x) > 0\ \forall x \in [a, b]$

(b) $\nu(x) \neq 0\ \forall x \in [a, b]$ を満たすヤコビ方程式 (1.14) の解 ν が存在する

が満たされれば，第 2 変分 $j''(0)$ が，恒等的に零でないすべての φ について正となる．

Proof. $\nu(x) \neq 0\ \forall x \in [a, b]$ を満たすヤコビ方程式 (1.14) の解 ν があれば，それを用いて変換 (1.13) を行うことができ，そのように得た w が微分方程式 (1.12) を $[a, b]$ において満たすので，第 2 変

分は

$$j''(0) = \int_a^b R\left(\varphi' + \frac{Q+w}{R}\varphi\right)^2 dx = \int_a^b R\left(\varphi' + \frac{\nu'}{\nu}\varphi\right)^2 dx$$

となる．$R(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$ で，$\varphi' + \frac{\nu'}{\nu}\varphi = 0$ を $[a,b]$ で成り立たせる関数 φ は $\varphi \equiv 0$ しかない（境界条件 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ のため）から，$j''(0) > 0$ が従う．□

実は，オイラー・ラグランジュ方程式との関係に気づけば（ヤコビによる），ヤコビ方程式の解を見つけることができる．積分定数 c_1, c_2 を含むオイラー・ラグランジュ方程式の一般解を $\overline{u}(x, c_1, c_2)$ として，オイラー・ラグランジュ方程式

$$f_u(x, \overline{u}(x,c_1,c_2), \overline{u}'(x,c_1,c_2)) - \frac{d}{dx}\left[f_\xi(x, \overline{u}(x,c_1,c_2), \overline{u}'(x,c_1,c_2))\right] = 0$$

を c_1 について微分すれば，

$$f_{uu}\frac{\partial \overline{u}}{\partial c_1} + f_{u\xi}\frac{\partial \overline{u}'}{\partial c_1} - \frac{d}{dx}\left[f_{u\xi}\frac{\partial \overline{u}}{\partial c_1} + f_{\xi\xi}\frac{\partial \overline{u}'}{\partial c_1}\right] = 0$$

を得る．整理して，P, R, Q を用いて書くと，

$$(P - Q')\frac{\partial \overline{u}}{\partial c_1} - \frac{d}{dx}\left(R\frac{\partial \overline{u}'}{\partial c_1}\right) = 0$$

になる．しかし，これはヤコビ方程式において ν を $\frac{\partial \overline{u}}{\partial c_1}$ に変えたものである．よって，

$$\nu_1 = \frac{\partial \overline{u}}{\partial c_1}, \qquad \nu_2 = \frac{\partial \overline{u}}{\partial c_2}$$

というヤコビ方程式の二つの特殊解を得た．

そこで，ヤコビは

$$\Delta(x,a) = \nu_2(a)\nu_1(x) - \nu_1(a)\nu_2(x)$$

という解に着目した．$\Delta(x,a)$ は $x = a$ でゼロになるが，その右にある $\Delta(\cdot, a)$ の最初の零点 $\bar{a}$ を a の**共役点**と呼ぶ．

注 $\Delta'(a,a) = 0$ ならば，解の一意性より，$\Delta \equiv 0$ となるから，以下では $\Delta'(a,a) \neq 0$ と仮定する．$x = a$ でゼロとなる他の non-trivial な解 $\tilde{\Delta}(x,a)$ に対して，

$$D(x) = k\Delta(x,a), \qquad k = \frac{\tilde{\Delta}'(a,a)}{\Delta'(a,a)},$$

と定義すれば，$D(a) = 0 = \tilde{\Delta}(a,a), D'(a) = \tilde{\Delta}'(a,a)$ が成り立つから，解の一意性より $D \equiv \tilde{\Delta}$ を得て，$\tilde{\Delta}$ は Δ の定数倍（k 倍）である．したがって，$\nu(a) = 0$ を満たす解の零点がすべて一致し，上で定義した Δ の零点を調べればよい．

もし，$\overline{a} > b$ なら，変数を少しシフトすることで $[a,b]$ でゼロにならないようなヤコビ方程式の解が作れるから，十分条件より $\overline{u}$ が minimizer であることが保証される．一方で，$\overline{a} = b$ のとき，第 3 変分以上を考える必要になり，詳細を省略する．また，$\overline{a} < b$ のとき，$\overline{u}$ が minimizer にはならないことが証明されている（詳しくは，[2] の 78 ページを参照）．まとめると，次の条件を得た．

ヤコビの必要条件

$\overline{u}$ が弱い極小値であるための必要条件は

$$\Delta(x,a) \neq 0 \qquad \forall x \in (a,b).$$

以上で極小値のための三つの必要条件：オイラー・ラグランジュ方程式，Legendre の条件と Jacobi の条件を紹介した．一方で，上で述べたように，十分条件も得られる．

十分条件

次の三つの条件が成り立てば，$\overline{u}$ は弱い極小値である．

(1) $\overline{u}$ はオイラー・ラグランジュ方程式の解である．

(2) 強い Legendre の条件：$R(x) = f_{\xi\xi}(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)) > 0 \ \forall x \in [a,b]$.

(3) 強い Jacobi の条件：$\Delta(x,a) \neq 0 \ \forall x \in (a,b]$.

この Jacobi の条件には幾何学的な解釈がある．形式的に見てみよう．オイラー・ラグランジュ方程式の解で条件 $\overline{u}(a) = \alpha$ を満たすものを一つのパラメータ c を用いて，$\overline{u}(x,c)$ と表す（つまり，解の one-parameter family である）．二つの近い解

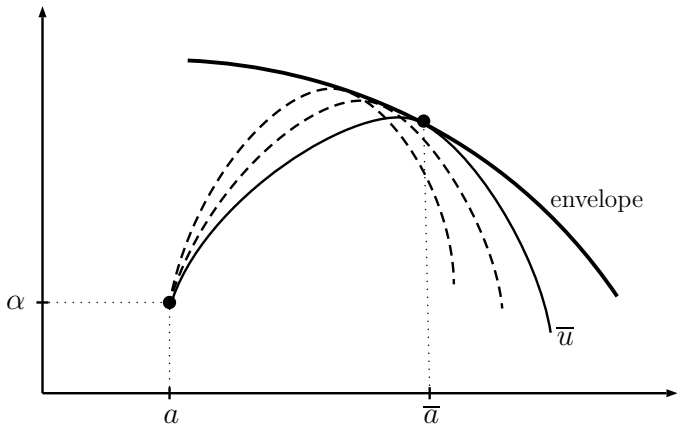
$$\overline{u}(x,c), \qquad \overline{u}(x,c+\delta) \approx \overline{u}(x,c) + \delta \frac{\partial \overline{u}}{\partial c}(x,c)$$

の交点 $[x_0, y_0]$ は（小さい誤差を許せば）$\frac{\partial \overline{u}}{\partial c}(x_0,c) = 0$ を満たすので，共役点に近いと予想できる（$\nu(x) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial c}(x,c)$ はヤコビ方程式の解で，$\nu(a) = 0$ を満たすので，一意性より $0 = \frac{1}{\delta}[\overline{u}(x_0, c+\delta) - \overline{u}(x_0,c)] \approx \frac{\partial \overline{u}}{\partial c}(x_0,c) = \nu(x_0)$ を満たす x_0 は（近似的に）共役点でなければならない）．一方で，

$$y = \overline{u}(x,c), \qquad \frac{\partial \overline{u}}{\partial c}(x,c) = 0$$

を満たす (x,y) は曲線族 $\{\overline{u}(x,c)\}_{c\in\mathbb{R}}$ の包絡線を形成する．これを簡単に理解するには，包絡線が $y = g(x)$ のグラフで表されると仮定する．すると，任意の x に対して c が存在し（これを $c(x)$ とする），$g(x) = \overline{u}(x, c(x))$ が成り立つ．さらに包絡線の条件として，この点 x において g と $\overline{u}$ のグラフは共通の接線をもつ，すなわち，$g'(x) = \overline{u}_x(x, c(x))$．今，すべての x について成り立つ $g(x) = \overline{u}(x, c(x))$ の両辺を x について微分すると，$g'(x) = \overline{u}_x(x,c(x)) + \overline{u}_c(x,c(x))c'(x)$ を得るが，$g'(x) = \overline{u}_x(x,c(x))$ より $\overline{u}_c c' = 0$，つまり $\overline{u}_c = 0$ が示される．

点 $[a, \alpha]$ から始まるオイラー・ラグランジュ方程式の解の族に包絡線があれば，ある解 $\overline{u}$ の共役点 $\overline{a}$ は $\overline{u}$ のグラフが包絡線と接する点に対応する．すなわち，$\overline{u}$ のグラフが点 $[b, \beta]$ に到達するまでに包絡線に接しないのであれば，$\overline{u}$ は極小値だと言える．逆に，途中で包絡線に接する点があれば，その点が共役点 $\overline{a}$ となるので，$\overline{u}$ は極小値ではないことがわかる．



例 1.2

$$J[u] = \int_0^5 (u'+1)^2 (u')^2 \, dx$$

の minimizer を境界条件

$$u(0) = 2, \qquad u(5) = k = 1$$

のもとで求める．

$f(x, u, \xi) = (\xi+1)^2\xi^2$ が ξ にしか依らないので，オイラー・ラグランジュ方程式は $f_\xi = const$, つまり，

$$4(u')^3 + 6(u')^2 + 2u' = const$$

となり，一般解は

$$\overline{u}(x) = c_1 x + c_2,$$

境界条件を満たす解は

$$\overline{u}(x) = \frac{k-2}{5}x + 2 = -\frac{1}{5}x + 2.$$

- ルジャンドルの条件：

$$R = f_{\xi\xi} = 2(6(\overline{u}')^2 + 6\overline{u}' + 1) = \frac{2}{25} > 0$$

より満たされる．

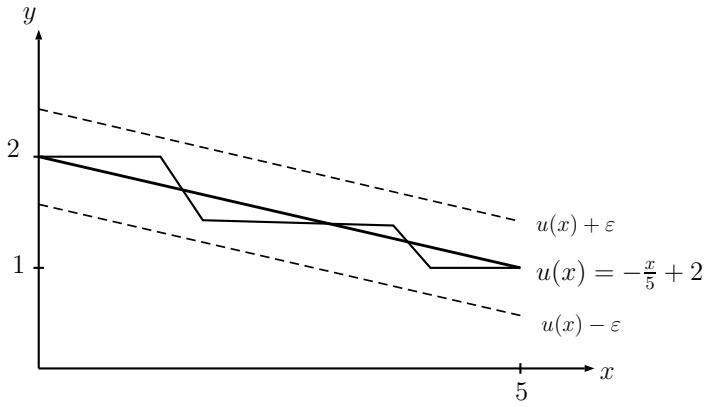
- ヤコビの条件：

$$\nu_1(x) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial c_1} = x, \qquad \nu_2(x) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial c_2} = 1$$

より $\Delta(x, a) = x - a$ で，この関数は $x = a$ 以外の零点をもたないため，ヤコビ条件も満たされる．

十分条件が満たされるにもかかわらず，$\overline{u}(x) = -\frac{1}{5}x + 2$ の近傍に $J[u]$ をより小さくする関数 u が存在する．実際，下図のように，u が傾き 0 と -1 を持つ線分からなら折れ線だと，$J[u] = 0$ となる．傾きが変わる頻度を大きくすれば，この u が上の $\overline{u}$ に限りなく近づくようにできる．このように得た関数 u は滑らかではないが，角を軟化することによって，いくらでも滑らかにすることができ，滑らかな関数で汎関数の値を限りなくゼロに近づけることができる．
境界条件を変更しても，解が $c_1 \in (-1, 0)$ を満たす傾斜 c_1 の線形関数であれば，同じような状況になる．

この現象はこれまで考えてきたことと矛盾しない理由は，折れ線の関数が弱い極小値に対して要求している「C^1-ノルムで近い」という条件を満たしていないことである．実際，この折れ線の微分は 0 か -1 で $\overline{u}(x) = -\frac{1}{5}x + 2$ の微分 $\frac{1}{5}$ に近くないから，弱い極小値のみ考える限り，比較の対象外となる．



回転面の問題に戻ろう．上で考えた場合 (2) の $\overline{u}(0) = 1$ を満たす懸垂線の族の図を見ると ($\overline{u}(a) = \alpha$ としても図は本質的に変わらない)，解が二つある場合に，より深い懸垂線は右端の点に到達する前に包絡線に接することがわかる．よって，深い懸垂線は極小値ではないことが言える．一方，浅い方の懸垂線は包絡線に接しないから，上記の十分条件がすべて満たされ，極小値を与える．

一方，対称な境界条件 $u(-h) = u(h) = k$ を課す場合 (1) では，解析的なアプローチもできる．ヤコビ方程式の二つの解は

$$\nu_1(x) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial C} = \cosh\left(\frac{x-D}{C}\right) - \left(\frac{x-D}{C}\right)\sinh\left(\frac{x-D}{C}\right), \qquad \nu_2(x) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial D} = -\sinh\left(\frac{x-D}{C}\right)$$

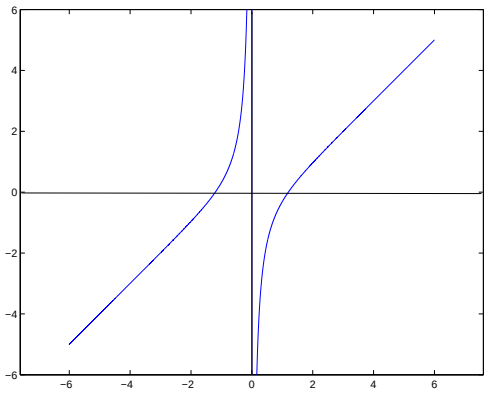
となり，共役点 $\overline{a}$ は

$$\frac{\nu_1(\overline{a})}{\nu_2(\overline{a})} = \frac{\nu_1(a)}{\nu_2(a)}$$

という方程式を満たす．$\overline{z} = \frac{\overline{a}-D}{C}, z = \frac{a-D}{C}$ とおけば，この方程式は

$$\overline{z} - \coth\overline{z} = z - \coth z$$

と変形される．奇関数 $z - \coth z$ のグラフは以下に示す．



考えている対称な場合は $D = 0, a = -h < 0$ であるから，$z = -\frac{h}{C} < 0$．したがって，$z - \coth z$ のグラフが z-軸と交わる点 $z_c \approx -1.199679$ より小さい z について Jacobi の条件が満たされない（このとき，$\bar{a} < |a| = h = b$ となるから，深い懸垂線に対応）．逆に，z_c より大きい負の z について Jacobi の条件が満たされる（浅い懸垂線に対応）．

演習問題

問題 1.5 両端を固定したひもや鎖が自重だけで変形する状況を考える．適切な物理的な仮定のもとでひものポテンシャル・エネルギーを書け．また，定常なひもの形状がポテンシャル・エネルギーの極小値を与えるという原理を用いて，定常なひもが極小回転面の断面である懸垂線と同じ形をとることを示せ．

問題 1.6 汎関数

$$J[u] = \int_1^2 x^2 (u'(x))^2 \, dx$$

を境界条件 $u(1) = 0, u(2) = 1$ のもとで最小化せよ．Legendre の条件および Jacobi の条件を適用し，オイラー・ラグランジュ方程式の解が弱い極小値であるか判断せよ．また，左端での境界条件を満たす解の one-parameter family を図示して，その包絡線を求めよ．

問題 1.7 汎関数

$$J[u] = \int_0^1 \sqrt{u(x)(1 + (u'(x))^2)} \, dx$$

と境界条件 $u(0) = 2, u(1) = 5$ に対する変分問題を考える．境界条件を満たすオイラー・ラグランジュ方程式の解を求め，それらの解が Jacobi の必要条件を満たすか確認せよ．

1.3　Dido 女王の問題

この問題の名前は，紀元前 814 年ごろ，現在のレバノンにあった王国の Dido 女王は追われて現在のチュニジアに逃亡し，「牛の皮で覆えるだけの土地をください」と現地の王に請い，それを許された上で，牛の皮を細い紐に裁断して，それで広大な土地を囲って，カルターゴ王国の始まりとなった，という伝説に由来する．数学の言葉で言うと，周長が与えられた平面内の閉曲線の

うち，面積が最大となるものを求めることになる．この節では，これを曲線ではなく，関数のグラフに単純化した次の問題を扱う．

Dido の問題

点 $(-a,0)$ と点 $(a,0)$ を結び，長さ ℓ をもつ関数 $u(x)$ のグラフのうち，x-軸とグラフに囲まれた面積が最大となる関数 u を求めよ．

すなわち，

$$J[u] = \int_{-a}^{a} u(x)\,dx$$

を条件

$$u(-a) = 0, \qquad u(a) = 0, \qquad \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx = \ell$$

のもとで最大にする C^1-関数 $u(x)$ を求める．

このような積分型の制約条件がつく変分問題（等周問題ともよばれる）を解くことを目指して，一般的な設定から始める．つまり，$f \in C^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $g \in C^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ として，変分問題

$$\inf_{u\in X} J[u], \qquad J[u] = \int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx \tag{1.15}$$

$$X = \left\{ u \in C^1([a,b]);\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta,\ \int_a^b g(x,u(x),u'(x))\,dx = 0 \right\}$$

の minimizer が満たすオイラー・ラグランジュ方程式を導くことを考える．(Dido の問題は上限を求める問題であるが，オイラー・ラグランジュ方程式を考える上ではどちらでも同じ考察になるので，前節の設定と合わせて最小化の問題にした．)

制約条件を満たす関数のなかで最小値を求めるため，変分を制約条件を満たす範囲で計算しなければならず，摂動として任意の $\varphi \in C_0^1(a,b)$ について単純に $u+\varepsilon\varphi$ をとることができない．そこで，制約条件を満たすようにこの摂動を修正するために，固定した関数 w に対してもう一つの自由度 δ を導入し，$u+\varepsilon\varphi+\delta w$ が X の元となるように陰関数定理により δ を ε の関数として決める．

u を minimizer とする．

$$\frac{d}{dx}\left[g_\xi(x,u(x),u'(x))\right] \neq g_u(x,u(x),u'(x))$$

を満たす $x \in (a,b)$ が存在すると仮定すると，

$$\int_a^b \left[g_\xi(x,u(x),u'(x))w'(x) + g_u(x,u(x),u'(x))w(x)\right]\,dx \neq 0$$

を満たす w がとれる．また，w を定数倍すれば，

$$\int_a^b \left[g_\xi(x, u(x), u'(x))w'(x) + g_u(x, u(x), u'(x))w(x) \right] \, dx = 1$$

とできる．

$\varphi \in C_0^1(a, b)$ を任意にとり，上の w と $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\begin{aligned} F(\varepsilon, \delta) &= J[u + \varepsilon\varphi + \delta w] = \int_a^b f\left(x, u + \varepsilon\varphi + \delta w, u' + \varepsilon\varphi' + \delta w'\right) \, dx \\ G(\varepsilon, \delta) &= \int_a^b g\left(x, u + \varepsilon\varphi + \delta w, u' + \varepsilon\varphi' + \delta w'\right) \, dx \end{aligned}$$

とおく．このとき，次が成り立つ：

$$G(0, 0) = 0, \qquad G_\delta(0, 0) = 1.$$

陰関数定理を適用して，$\varepsilon_0 > 0$ と $v_\varphi(0) = 0$ を満たす関数 $v_\varphi \in C^1([-\varepsilon_0, \varepsilon_0])$ があり，

$$G(\varepsilon, v_\varphi(\varepsilon)) = 0 \qquad \forall \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$$

が成り立つ．つまり，このような ε について $u + \varepsilon\varphi + v_\varphi(\varepsilon)w \in X$ が言える．上式を ε で微分すると，

$$G_\varepsilon(\varepsilon, v_\varphi(\varepsilon)) + G_\delta(\varepsilon, v_\varphi(\varepsilon))v_\varphi'(\varepsilon) = 0 \qquad \forall \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$$

を得るので，

$$v_\varphi'(0) = -G_\varepsilon(0, 0).$$

$F(0, 0) \le F(\varepsilon, v_\varphi(\varepsilon)) \ \forall \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ より，

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(\varepsilon, v_\varphi(\varepsilon))\big|_{\varepsilon=0} = F_\varepsilon(0, 0) + F_\delta(0, 0)v_\varphi'(0) = 0.$$

$F_\varepsilon(0, 0)$ は φ に依存するが，$F_\delta(0, 0)$ は φ に依存しないから，$\lambda = F_\delta(0, 0)$ とおけば，

$$F_\varepsilon(0, 0) - \lambda G_\varepsilon(0, 0) = 0,$$

すなわち，

$$\int_a^b \left(\left[f_\xi(x, u, u')\varphi' + f_u(x, u, u')\varphi \right] - \lambda \left[g_\xi(x, u, u')\varphi' + g_u(x, u, u')\varphi \right] \right) \, dx = 0.$$

部分積分と φ の任意性より

$$\frac{d}{dx} \left[f_\xi(x, u, u') \right] - f_u(x, u, u') = \lambda \left(\frac{d}{dx} \left[g_\xi(x, u, u') \right] - g_u(x, u, u') \right).$$

よく見ると，これは汎関数

$$\int_a^b \left[f(x, u(x), u'(x)) - \lambda g(x, u(x), u'(x)) \right] dx \tag{1.16}$$

に対する（制約条件なしの）オイラー・ラグランジュ方程式であることがわかる．つまり，条件つき最小化問題 (1.15) の極小値 $\overline{u}$ が存在すれば，$\lambda \in \mathbb{R}$ があって，$\overline{u}$ が汎関数 (1.16) に対するオイラー・ラグランジュ方程式の解である（言い換えれば，この汎関数の停留値を与える）．この λ のことをラグランジュ未定乗数と言う．ラグランジュ未定乗数 λ は，minimizer が制約条件を満たすという条件より決まる．
このようにして，問題 (1.15) の弱い極小値の候補をすべて求めるアルゴリズムを得た：

(1) 汎関数 (1.16) に対応する一般解 $u(x, c_1, c_2)$ を求める．ここで，c_1, c_2 は積分定数である．

(2) 定数 λ, c_1, c_2 を次の三つの条件より定める：

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta, \quad \int_a^b g(x, u(x), u'(x))\, dx = 0.$$

例 1.3 上の Dido の問題では区間 $(-a, a)$ をとって，

$$u(-a) = u(a) = 0, \qquad f(x, u, \xi) = u, \qquad g(x, u, \xi) = \sqrt{1 + \xi^2} - \frac{\ell}{2a}$$

としている．

極大値 $\overline{u}$ が存在するなら，$\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して，$\overline{u}$ は

$$\int_{-a}^{a} \left[u(x) - \lambda \left(\sqrt{1 + (u'(x))^2} - \tfrac{\ell}{2a} \right) \right] dx$$

に対するオイラー・ラグランジュ方程式の解である．

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$1 + \lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} \right) = 0$$

であるが，これを積分して，

$$\lambda \frac{u'}{\sqrt{1 + (u')^2}} = -(x - C_1), \qquad C_1 \in \mathbb{R},$$

u' について解くと，

$$u'(x) = \pm \frac{x - C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2}}$$

となるので，もう一度，積分することで，

$$u(x) = \pm\sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2} + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

がわかる．すなわち，u のグラフは円

$$(x - C_1)^2 + (u(x) - C_2)^2 = \lambda^2$$

の一部である．

境界条件 $u(-a) = u(a) = 0$ と長さが指定されている条件より C_1, C_2, λ を求める．円の式で $x = \pm a$ とすれば，$(a - C_1)^2 = \lambda^2 - C_2^2 = (-a - C_1)^2$ が従うので，$C_1 = 0$ を得る．また，λ が円の半径，a/λ がグラフが表す円弧の半角の sin であるから，$2a \leq \ell$ であれば（区間の長さが $2a$ だから，ℓ がこれより大きいことを想定している），C_2 と λ も一意に決まる．

演習問題

問題 1.8　（オイラーの弾性曲線の問題）
伸び縮みしない長さ ℓ の弾性体のゴム紐の形を関数 u のグラフで表すと，その弾性エネルギーは

$$J[u] = \int_a^b \frac{(u''(x))^2}{(1 + (u'(x))^2)^{5/2}}\, dx$$

で書ける．境界条件を

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta, \quad u'(a) = \gamma, \quad u'(b) = \delta$$

とする．指定された長さ ℓ をもつ J の弱い極小値 u が満たすオイラー・ラグランジュ方程式を導け．また，この微分方程式を（例えば，特別な場合に限って）解くことに挑戦してみよ．数値的に解いてもかまわない．

問題 1.9　汎関数

$$J[u] = \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2\, dx$$

を境界条件 $u(0) = 0, u(1) = 0$ と制約条件

$$\int_0^1 u(x)\, dx = \frac{1}{6}$$

のもとで最小化せよ．

問題 1.10　自由に曲がれるような重い鎖が重力のもとで二点 $(-a, h)$ と (a, h) の間にぶら下がっ

ている状況を考える．鎖の形が関数 u のグラフで与えられ，長さが

$$\ell = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx$$

で指定されているとき，安定な形状 $u(x)$ を求めよ．

1.4　いくつかの進んだトピック

1.4.1　シャボン玉の形状

次の 2 次元のシャボン玉の簡単なモデルを考える：シャボン玉を作る石鹸膜が厚さゼロの界面で，そのエネルギーは

$$\text{長さエネルギー} \quad = \quad \text{表面張力（定数）} \times \text{界面の長さ}$$

のみである．界面は滑らかな閉曲線で，曲線が囲う面積（内側の空気の量）が定まっている．

(1) まず，1 個のシャボン玉の定常な形状を求める．この形状は長さエネルギーの最小値を与えるものである．ただし，面積が指定された値 A_0 であるという条件がある．

最小化問題（シャボン玉 1 個）

ジョルダン曲線 $\gamma : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$ で，面積条件

$$A(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (\gamma_1(s)\gamma_2'(s) - \gamma_2(s)\gamma_1'(s))\, ds = A_0$$

を満たす曲線のうち，長さ

$$L(\gamma) = \int_0^{\ell} |\gamma'(s)|\, ds$$

を最小にするものを見つける．

ラグランジュ未定乗数法を適用すると，実数 λ が存在して，求める曲線 γ が汎関数

$$F(\gamma) = \int_0^{\ell} |\gamma'(s)|\, ds - \frac{\lambda}{2} \int_0^{\ell} (\gamma_1(s)\gamma_2'(s) - \gamma_2(s)\gamma_1'(s))\, ds$$

に対するオイラー・ラグランジュ方程式を満たすことが言える．そこで，滑らかな試験関数 $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ をとり，摂動 $\gamma(s) + \varepsilon\psi(\gamma(s)), \varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して変分が消えるという条件

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(\gamma(s) + \varepsilon\psi(\gamma(s)))\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

を調べればよい．以下の計算を見やすくするために，$\phi(s) = \psi(\gamma(s))$ とおいて，s の引数を

省略する．

$$F(\gamma+\varepsilon\phi)=\int_0^\ell\left\{|\gamma'+\varepsilon\phi'|-\frac{\lambda}{2}\Big((\gamma_1+\varepsilon\phi_1)(\gamma_2'+\varepsilon\phi_2')-(\gamma_2+\varepsilon\phi_2)(\gamma_1'+\varepsilon\phi_1')\Big)\right\}ds$$

だから，

$$\frac{d}{d\varepsilon}F(\gamma+\varepsilon\phi)=\int_0^\ell\left\{\frac{\gamma'\cdot\phi'+\frac{\varepsilon}{2}|\phi'|^2}{|\gamma'+\varepsilon\phi'|}-\frac{\lambda}{2}\Big(\gamma_1\phi_2'+\gamma_2'\phi_1+2\varepsilon\phi_1\phi_2'-\gamma_2\phi_1'-\gamma_1'\phi_2-2\varepsilon\phi_1'\phi_2\Big)\right\}ds.$$

$\varepsilon=0$ を代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}F(\gamma+\varepsilon\phi)\Big|_{\varepsilon=0} &= \int_0^\ell\left\{\frac{\gamma'\cdot\phi'}{|\gamma'|}-\frac{\lambda}{2}\Big(\gamma_1\phi_2'+\gamma_2'\phi_1-\gamma_2\phi_1'-\gamma_1'\phi_2\Big)\right\}ds\\ &= -\int_0^\ell\left\{\left(\frac{\gamma'}{|\gamma'|}\right)'\cdot\phi-\lambda(-\gamma_2',\gamma_1')\cdot(\phi_1,\phi_2)\right\}ds\end{aligned}$$

を得る．ただし，最後の等式で部分積分を施し，ϕ にかかっている微分をそれ以外の項に移した．この量がゼロであることと曲率 κ と法線ベクトル ν の定義を合わせて使うと，

$$\int_0^\ell(\kappa-\lambda)(\phi\cdot\nu)|\gamma'|\,ds=0$$

となるが，$\phi(s)=\psi(\gamma(s))$ であり，$|\gamma'(s)|ds$ が曲線の微小長さであり，κ,λ,ν がパラメータの取り方に依らない幾何学的な量であるから，上式は $(\kappa-\lambda)(\psi\cdot\nu)$ を弧長パラメータで積分すると，どんな ψ に対してもゼロとなるという式である．つまり，

$$\kappa=\lambda=\text{定数},$$

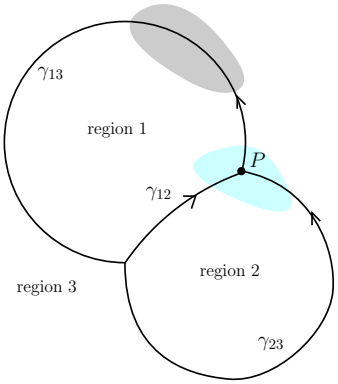
言い換えれば,「曲率がすべての点で同じ値になるような曲線」という結果になる．

この性質を満たすジョルダン曲線は半径 λ の円しかない．それを確認するためには，接触円の中心

$$c(s)=\gamma(s)+\frac{1}{\kappa(s)}\nu(s)$$

を s について微分すればよい．また，半径 λ は今の時点で未知であるが，指定された面積 A_0 よりすぐに計算できる．

(2) 次に，図のようにくっついている 2 個のシャボン玉（それぞれの面積は A_1, A_2）の定常な形状と接合点における角度を求める．



図の記号の通り泡が区切る領域に 1，2，3 と番号をふると，それぞれの領域を隔てる「界面」なる曲線を隣り合う領域の番号で表す．そのとき，泡 1 は $\gamma_1 = \gamma_{13} \cup \gamma_{12}$，泡 2 は $\gamma_2 = \gamma_{23} \cup (-\gamma_{12})$ の曲線で表される．

ラグランジュ未定乗数法により，汎関数

$$F(\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}) = L(\gamma_{12}) + L(\gamma_{13}) + L(\gamma_{23}) + \lambda_1 A(\gamma_1) + \lambda_2 A(\gamma_2)$$

の停留値を求めればよい．前節と同じように変分を計算するが，今回は試験関数として 2 種類のものを考える．一つは台（関数がゼロでない領域の閉包）がすべてのジャンクション（接合点）から離れているような試験関数（図では灰色），もう一つは台がひとつだけの接合点にかかっているような試験関数（図では水色）である．

図の灰色の台を持つような試験関数をとると，汎関数において影響する項は

$$L(\gamma_{13}) + \lambda_1 A(\gamma_{13})$$

のみである（ここで，試験関数による摂動は γ_{12} を変えないので，面積項で γ_{13} からの貢献だけ考えればよいという意味で A の引数を γ_{13} とした）．しかし，これは前節と全く同じ状況になっており，接合点から離れたところの曲線はすべて円の一部であることがわかる．

よって，あとは接合点で成り立つ条件を求めればよい．図の水色の領域に台がある試験関数 $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を考えて，三つの曲線を反時計回りにパラメータ表示する：$\gamma_{12}(s), s \in [0, \ell_{12}]$, $\gamma_{13}(s), s \in [0, \ell_{13}]$, $\gamma_{23}(s), s \in [0, \ell_{23}]$．ここで，$\gamma_{12}(\ell_{12}) = \gamma_{13}(0) = \gamma_{23}(\ell_{23}) = P$ が接合点となることに注意する．また，k_{12}, k_{13}, k_{23} の値を次が成り立つように決める：

$$\psi(\gamma_{12}(s)) = 0, s \in [0, k_{12}+\delta],\ \psi(\gamma_{13}(s)) = 0, s \in [k_{13}-\delta, \ell_{13}],\ \psi(\gamma_{23}(s)) = 0, s \in [0, k_{23}+\delta].$$

ψ の台の取り方より，このような k_{12}, k_{13}, k_{23} は存在する．ただし，δ は十分小さい正数である．$\phi_{12}(s) = \psi(\gamma_{12}(s)), \phi_{13}(s) = \psi(\gamma_{13}(s)), \phi_{23}(s) = \psi(\gamma_{23}(s))$ とおいて，前節と同様の

計算をすると，次の式を得る：

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}F(\gamma+\varepsilon\phi)\Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{k_{12}}^{\ell_{12}} \frac{\gamma'_{12}\cdot\phi'_{12}}{|\gamma'_{12}|}\,ds + \int_0^{k_{13}} \frac{\gamma'_{13}\cdot\phi'_{13}}{|\gamma'_{13}|}\,ds + \int_{k_{23}}^{\ell_{23}} \frac{\gamma'_{23}\cdot\phi'_{23}}{|\gamma'_{23}|}\,ds \\ &\quad + \frac{\lambda_1}{2}\int_0^{k_{13}} \big((\gamma_{13})_1(\phi_{13})'_2 + (\gamma_{13})'_2(\phi_{13})_1 - (\gamma_{13})_2(\phi_{13})'_1 - (\gamma_{13})'_1(\phi_{13})_2\big)\,ds \\ &\quad + \dots\end{aligned}$$

面積項の変分が長いため，代表として γ_1 が囲う面積への γ_{13} による貢献のみ記した．部分積分を行う前の式を書いたのは，前節の計算と違って，部分積分において境界項が現れるからである．実際,

$$\begin{aligned}\int_0^{k_{13}} \frac{\gamma'_{13}\cdot\phi'_{13}}{|\gamma'_{13}|}\,ds &= -\int_0^{k_{13}} \left(\frac{\gamma'_{13}}{|\gamma'_{13}|}\right)'\cdot\phi_{13}\,ds - \frac{\gamma'_{13}}{|\gamma'_{13}|}(0)\cdot\phi_{13}(0) \\ \int_0^{k_{13}} \big((\gamma_{13})_1(\phi_{13})'_2 - (\gamma_{13})_2(\phi_{13})'_1\big)\,ds &= \int_0^{k_{13}} \big(-(\gamma_{13})'_1(\phi_{13})_2 + (\gamma_{13})'_2(\phi_{13})_1\big)\,ds \\ &\quad -(\gamma_{13})_1(0)(\phi_{13})_2(0) + (\gamma_{13})_2(0)(\phi_{13})_1(0)\end{aligned}$$

$s=k_{13}$ での値が現れないのは，$\phi_{13}(k_{13})=0$ だからである．

変分がゼロという条件は次のように書ける：

$$\begin{aligned}&-\int_{k_{12}}^{\ell_{12}} \left(\frac{\gamma'_{12}}{|\gamma'_{12}|}\right)'\cdot\phi_{12}\,ds - \int_0^{k_{13}} \left(\frac{\gamma'_{13}}{|\gamma'_{13}|}\right)'\cdot\phi_{13}\,ds - \int_{k_{23}}^{\ell_{23}} \left(\frac{\gamma'_{23}}{|\gamma'_{23}|}\right)'\cdot\phi_{23}\,ds \\ &-\lambda_1\int_{k_{12}}^{\ell_{12}} \nu_{12}\cdot\phi_{12}|\gamma'_{12}|\,ds - \lambda_1\int_0^{k_{13}} \nu_{13}\cdot\phi_{13}|\gamma'_{13}|\,ds \\ &-\lambda_2\int_{k_{23}}^{\ell_{23}} \nu_{23}\cdot\phi_{23}|\gamma'_{23}|\,ds + \lambda_2\int_{k_{12}}^{\ell_{12}} \nu_{12}\cdot\phi_{12}|\gamma'_{12}|\,ds \\ &= -\tau_{12}(\ell_{12})\cdot\phi_{12}(\ell_{12}) + \tau_{12}(0)\cdot\phi_{13}(0) - \tau_{23}(\ell_{23})\cdot\phi_{23}(\ell_{23}) \\ &+\frac{\lambda_1}{2}\Big[\gamma_{12}^{\perp}(\ell_{12})\cdot\phi_{12}(\ell_{12}) - \gamma_{13}^{\perp}(0)\cdot\phi_{13}(0)\Big] + \frac{\lambda_2}{2}\Big[\gamma_{23}^{\perp}(\ell_{23})\cdot\phi_{23}(\ell_{23}) - \gamma_{12}^{\perp}(\ell_{12})\cdot\phi_{12}(\ell_{12})\Big]\end{aligned}$$

ただし，ν_{ij} は領域 i に向く界面 γ_{ij} への単位法線ベクトル，τ_{ij} は γ_{ij} への単位接戦ベクトル，$\gamma_{ij}^{\perp}=(-(\gamma_{ij})_2,(\gamma_{ij})_1)$ である．

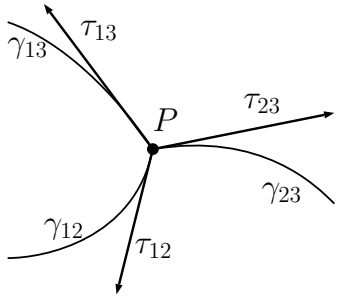
$\phi_{12}(\ell_{12})=\phi_{13}(0)=\phi_{23}(\ell_{23})=\psi(P)$，そして，$\gamma_{12}(\ell_{12})=\gamma_{13}(0)=\gamma_{23}(\ell_{23})=P$ という事実に気づくと，上式の最後の行が消えることがわかる．それ以外の項を整理すれば,

$$\begin{aligned}&-\int_{k_{12}}^{\ell_{12}} (\kappa_{12}-\lambda_1+\lambda_2)(\phi_{12}\cdot\nu_{12})|\gamma'_{12}|\,ds - \int_0^{k_{13}} (\kappa_{13}-\lambda_1)(\phi_{13}\cdot\nu_{13})|\gamma'_{13}|\,ds \\ &+\int_{k_{23}}^{\ell_{23}} (\kappa_{23}-\lambda_2)(\phi_{23}\cdot\nu_{23})|\gamma'_{23}|\,ds = \Big(-\tau_{12}(\ell_{12})+\tau_{13}(0)-\tau_{23}(\ell_{23})\Big)\cdot\psi(P)\end{aligned}$$

を得る．試験関数 ψ の任意性より，以下の 4 つの条件式が成立しなければならない：

$$\kappa_{12}=\lambda_1-\lambda_2,\quad \kappa_{13}=\lambda_1,\quad \kappa_{23}=\lambda_2,\quad (\tau_{12}-\tau_{13}+\tau_{23})(P)=0.$$

最初の 3 式はそれぞれの曲線が円の一部であるという既にわかっていることを言っているが，それぞれの円の半径の関係も見えてきている．例えば，二つの泡の面積が等しいとき，$\kappa_{12} = \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ となるので，泡の間の界面は直線になる．また，符号の関係で，γ_{12} の曲線は大きい方の泡に食い込む形になることもわかる．



接合点における接線ベクトルの再定義

一方で，最後の式は接合点の角度に対する条件である．パラメータの取り方によって接線ベクトル τ の符号が変わるためわかりにくいが，$\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ を上図のように定義しなおせば，4 つ目の式は

$$\tau_{12} + \tau_{13} + \tau_{23} = 0 \qquad \text{at } P$$

となる．τ_{ij} はすべて単位ベクトルだから，これは接合点の角度が $120^\circ - 120^\circ - 120^\circ$ であることを意味する．(これを Herring の条件と言う.)

以上でわかったことを整理する．シャボン玉が複数個くっついているときは，それぞれの石鹸膜は円の一部の形をしている．それぞれの円の半径は指定された面積で決まる．また，3 本の界面が接合点で交わるとき，必ず対称な $120^\circ - 120^\circ - 120^\circ$ の接合点となる．この結果はシャボン玉や接合点の数に依らず成り立つ．

(3) それぞれの界面の表面張力が異なるという一般化を考える．すなわち，与えられた面積のもとで長さ汎関数

$$aL(\gamma_{12}) + bL(\gamma_{13}) + cL(\gamma_{23})$$

を最小化する．ここで，$L(\gamma)$ は曲線 γ の長さである．
$a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，接合点が安定する角度を求める．

変分の計算は同様で，それぞれの界面が円の一部であることがわかる．また，接合点における条件は

$$a\tau_{12} + b\tau_{13} + c\tau_{23} = 0 \qquad \text{at } P$$

となり，問題の a, b, c に対する角度は $150^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ である．

シャボン玉同士がどのように接しているかということ（つまり位相）を指定しておけば，上のような計算で指定した位相での長さ汎関数の極小値を求めることができる．しかし，位相を変えれば，長さをもっと減らすことができる可能性がある．つまり，長さ汎関数の（グローバルな）最小値は何かという疑問が残る．次の節では最小値の存在について述べる．

1.4.2 存在理論：絶対連続関数

1 変数関数に対する変分問題が歴史の中でどのように数学的に議論されたかを簡単に紹介する．

Lipschitz 連続な関数の変分法

まずは，理論をより広いリプシッツ関数の空間に拡張する．

$$\inf_{u\in X} J[u], \qquad J[u]=\int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx, \qquad X=\{u\in \mathrm{Lip}([a,b]);\ u(a)=\alpha, u(b)=\beta\} \tag{1.17}$$

ここで，f, f_u, f_ξ が $[a,b]$ で連続だと仮定すれば，$J[u]$ が $u\in X$ に対して意味をもつ．

$C^2([a,b])$ における極小値が存在すれば，$\mathrm{Lip}([a,b])$ における極小値でもあることが示せるので，古典理論のリプシッツ関数への拡張は自然なものである．

今，$\overline{u}$ が極小値ならば，$f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))$ が一般には微分できないため，古典理論で導いたオイラー・ラグランジュ方程式が成り立つことが期待できないが，つぎの結果がある．

Lemma (du Bois-Raymond, 1879)

$\overline{u}\in X$ が問題 (1.17) の解ならば，$c\in\mathbb{R}$ が存在し，つぎの積分オイラー・ラグランジュ方程式を満たす：

$$f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))=c+\int_a^x f_u(y,\overline{u}(y),\overline{u}'(y))\,dy, \qquad \text{a.e. } x\in[a,b]. \tag{1.18}$$

Proof. $\varphi\in \mathrm{Lip}_0([a,b])$（0 は $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ という意味である）に対して j を $j(\varepsilon)=J[\overline{u}+\varepsilon\varphi]$ で定義する

$$j'(0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b \frac{1}{\varepsilon}\Big(f(x,\overline{u}+\varepsilon\varphi,\overline{u}'+\varepsilon\varphi')-f(x,\overline{u},\overline{u}')\Big)\,dx$$

が存在する．実際，仮定より f は有界集合において u,ξ についてリプシッツ連続で，引数として現れる関数がすべて有界であるから，被積分関数は $C(|\varphi(x)|+|\varphi'(x)|)$ で抑えられ，ルベーグの優収束定理より

$$0=j'(0)=\int_a^b \Big(f_u(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))\varphi(x)+f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))\varphi'(x)\Big)\,dx.$$

ここで，第 1 項で部分積分を行うと，

$$\int_a^b \left(f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))-\int_a^x f_u(y,\overline{u}(y),\overline{u}'(y))\,dy\right)\varphi'(x)\,dx=0$$

を得る．試験関数 φ が微分した状態で入っているが，このときは定数 c が存在して，$(\cdot)$ の中身が恒等的に c に等しいことが示せるので，補題は証明された． □

$\overline{u} \in C^2([a,b])$ ならば，積分型オイラー・ラグランジュ方程式を x について微分すれば，古典的なオイラー・ラグランジュ方程式が得られる．

リプシッツ関数のなかでの解について正則性の結果がある．例えば，

- $\overline{u} \in X$ が積分型オイラー・ラグランジュ方程式 (1.18) の解で，$\xi \mapsto f(x, \overline{u}(x), \xi)$ という写像がほとんどすべての $x \in [a,b]$ について狭義凸ならば，$\overline{u} \in C^1([a,b])$ である．
- （Hilbert-Weierstrass, 1875）$\overline{u} \in X$ が積分型オイラー・ラグランジュ方程式 (1.18) の解で，$f \in C^m$ $(m \geq 2)$ がすべての $x \in [a,b]$ と $\xi \in \mathbb{R}$ について $f_{\xi\xi}(x, \overline{u}(x), \xi) > 0$ を満たすならば，$\overline{u} \in C^m([a,b])$ である．

絶対連続な関数の変分法

リプシッツ関数の設定では存在定理が得られないため，許容関数空間を絶対連続な関数 AC$([a,b])$ に広げることを考える．実際，絶対連続な関数では（汎関数がある条件を満たせば）minimizer の存在が証明できるようになる．古典理論では，ヤコビの定理などの十分条件もあるが，最小値ではなく，極小値の存在しか保証されない．

よって，以下では，つぎの変分問題を考える：

$$\inf_{u \in X} J[u], \qquad J[u] = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx, \qquad X = \{u \in \mathrm{AC}([a,b]);\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta\} \tag{1.19}$$

ここで，$u \in X$ の微分が有界とは限らないので，$J[u]$ が定義されるよう f に対して適切な条件を課す必要がある．例えば，以下の Tonelli の定理では，f を下から有界な連続関数としている．このとき，$x \mapsto f(x, u(x), u'(x))$ という写像が下から有界な可測関数だから，$J[u]$ の積分はルベーグ積分の意味で意味をもつ（当然，$+\infty$ になる可能性がある）．

AC における理論が成功した背景にルベーグ積分の理論が出来上がっていたことがあることに注意しよう．実際，絶対連続な関数 u の定義はつぎの二つの定義と同値であることが重要となる：

(D1) u の微分 u' がほとんどいたるところで存在し，可積であり，

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(y)\, dy \qquad \forall x \in [a,b]$$

(D2) 区間 $[a,b]$ で可積な関数 w が存在し，

$$u(x) = u(a) + \int_a^x w(y)\, dy \qquad \forall x \in [a,b]$$

また，

$$\mathrm{Lip}([a,b]) \ \subset\ \mathrm{AC}([a,b]) \ \subset\ \mathrm{BV}([a,b]) \ \subset\ \text{a.e. 微分可能な関数}$$

という関係が成り立つことを思い出そう．ここで，BV は有界変動という意味である．

以下の Tonelli による定理は変分問題の存在理論で画期的な結果である．

Tonelli, 1915

定理 1.1 f が連続で，ξ について凸な関数で，

$$\exists r > 1, C_1 > 0, C_2 \in \mathbb{R} \quad \textit{such that} \quad f(x,u,\xi) \geq C_1|\xi|^r + C_2 \quad \forall (x,u,\xi) \in [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

という強圧性条件を満たすならば，変分問題 *(1.19)* の最小値が存在する．

Proof. 汎関数の値 $J[u]$ が有界であるような $u \in X$ が存在する（例えば，境界条件を満たす線形関数）ので，最小化列 $\{u_n\} \subset X$ がとれる：

$$\lim_{n\to\infty} J[u_n] = \inf_{u\in X} J[u].$$

十分大きな n に対して，

$$\int_a^b \left(C_1|u_n'|^r + C_2\right)\, dx \leq J[u_n] \leq \inf_{u\in X} J[u] + 1$$

が成り立つから，列 $\{u_n'\}$ は $L^r(a,b)$ で有界である．L^r が回帰的空間だから，有界集合が weakly compact のため，ある $w \in L^r(a,b)$ に弱収束する部分列（$\{u_n\}$ と記す）がとれる．AC$([a,b])$ の元 $\overline{u}$ を

$$\overline{u}(x) = \alpha + \int_a^x w(y)\, dy, \qquad x \in [a,b]$$

で定義する．弱収束より任意の $x \in [a,b]$ について

$$\int_a^x u_n'(y)\, dy = \int_a^b u_n'(y)\chi_{(a,x)}(y)\, dy \to \int_a^b w(y)\chi_{(a,x)}(y)\, dy = \int_a^x w(y)\, dy.$$

ただし，$\chi_{(a,x)}$ は区間 (a,x) の特性関数である．したがって，u_n は $\overline{u}$ に各点収束する（一様収束であることも示せる）．また，$\overline{u}(b) = \beta$ もわかる．

f の連続性と ξ についての凸性を利用すると，

$$J[\overline{u}] \leq \lim_{n\to\infty} J[u_n] = \inf_{u\in X} J[u]$$

が証明できる（詳細を割愛する）．よって，$\overline{u}$ は最小値を与える． □

この定理が切り開いたいわゆる直接法は次の構成要素を含む：

- 最小化列の存在とその部分列の適切な収束（通常は u_n' は弱収束，u_n は各点または一様収束）

- 汎関数の下半連続性（$J[\overline{u}] \leq \liminf J[u_n]$）
- 境界条件など制約条件が極限で維持される性質（一様収束で保存される条件，微分の弱収束で保存される条件：弱収束の場合は凸性が必要となる場合が多い）

許容関数を絶対連続な関数に広げたことで，必要条件であるオイラー・ラグランジュ方程式が満たされるということが証明できなくなる．実際，リプシッツ関数における証明では，優収束定理を用いて $j'(0)$ の存在を示したが，AC では微分が発散する可能性があるため，この議論が適用できない．しかも，技術的な問題ではなく，Tonelli の定理の仮定を満たす滑らかな汎関数でもオイラー・ラグランジュ方程式が成り立たない反例が作れる．

また，Tonelli の定理の仮定を満たす滑らかな汎関数でも，AC における inf が Lip における inf より真に小さいという Lavrentiev phenomenon が起こり得る．これは数値計算の観点から絶望的である．しかし，ある仮定をおけば，Lavrentiev phenomenon を排除し，存在と必要条件と両方が成立する状況を再現できる．以下では，その仮定の例を二つ挙げる：

- (Tonelli-Morrey) f, f_u, f_ξ が x, u, ξ について連続で，任意の有界集合 $S \subset \mathbb{R}$ に対して定数 C と可積関数 $d(x)$ が存在し，

  $$|f_u(x,u,\xi)| + |f_\xi(x,u,\xi)| \leq C\left(|\xi| + |f(x,u,\xi)|\right) + d(x) \qquad \forall (x,u,\xi) \in [a,b] \times S \times \mathbb{R}$$

  が成り立てば，任意の弱い極小値 $\overline{u}$ は積分型のオイラー・ラグランジュ方程式を満たす．この仮定に加えて，f が ξ について凸で，$\overline{u}$ に沿って Nagumo growth があれば，つまり，$\lim_{x\to\infty} \theta(x)/x = +\infty$ を満たす関数 $\theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ が存在し，

  $$f(x, \overline{u}(x), \xi) \geq \theta(|\xi|) \qquad \forall x \in [a,b],\, \xi \in \mathbb{R}$$

  が成り立てば，$\overline{u}$ がリプシッツ連続であることが示せる．Lavrentiev phenomenon が起こらず，オイラー・ラグランジュ方程式が成り立つことが言えるから好都合である．

- (Clarke-Vinter) $\overline{u} \in \mathrm{AC}([a,b])$ が強い minimizer で，f が x に陽に依存しない連続関数で，ξ について凸，$\overline{u}$ に沿って Nagumo growth をもつならば，$\overline{u}$ はリプシッツ連続である．

1.4.3 最小化問題の数値計算について

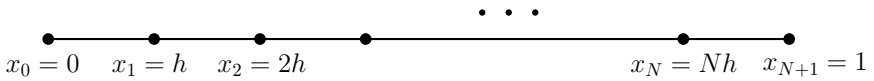
様々な数値解法を勉強する出発点となるような基本的なアイデアのみ紹介する．モデル問題として

$$\min_{u\in X} J[u], \qquad J[u] = \int_0^1 (u'(x))^2\, dx, \qquad X = \left\{u \in C^2([0,1]);\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta\right\}$$

を考える．

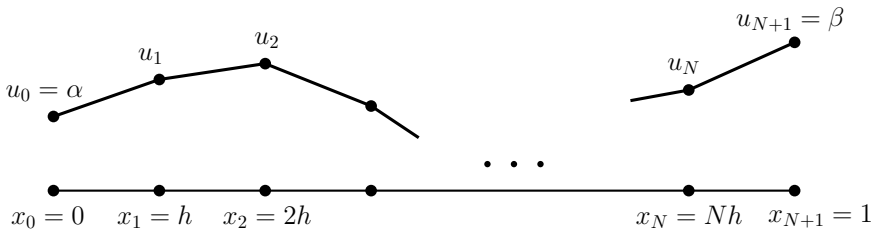
(1) 区間 $[0,1]$ を $(N+1)$-等分する（$N \in \mathbb{N}$）．このとき，部分区間の長さを $h = \frac{1}{N+1}$，節点を

$x_i = ih$ とする．

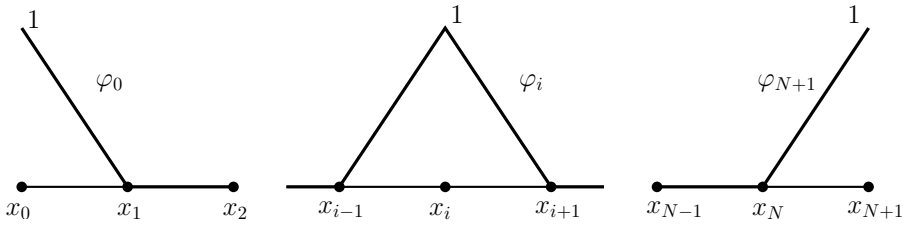


一般には，部分区間の長さは等しくなくてもよい（すなわち，$h_i = |x_{i+1} - x_i|$ が定数でなくてもよい）．

(2) 真の解 u を分割 $\{x_0, \ldots, x_{N+1}\}$ 上の折れ線関数 U_N で近似する．



次のような基底関数 $\{\varphi_i\}$, $I = 0, \ldots, N+1$（有限要素法では Courant basis function と呼ばれる）



を用いて，U_N は

$$U_N(x) = \alpha\varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{N} u_i\varphi_i(x) + \beta\varphi_{N+1}(x)$$

と表せる．ただし，u_i は節点 $x_i = ih$ での U_N の値である．

(3) $J[u]$ の $u \in X$ についての最小化という無限次元の最適化問題を $j(u_1, \ldots, u_N) = J[U_N]$ の $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ についての最小化という有限次元の最適化問題で置き換える．u_0, u_{N+1} が変数として出てこないのは境界条件より α, β と決まっているからである．

このように離散化したことにより，無限次元の問題をコンピュータで扱える有限次元問題で近似したことになる．

$$j(\boldsymbol{u}) = \int_0^1 \left[\alpha\varphi_0'(x) + \sum_{i=1}^{N} u_i\varphi_i'(x) + \beta\varphi_{N+1}'(x)\right]^2 dx$$

だから，j は $u_1, \ldots, u_N$ の N 変数の 2 次関数である．
例えば，$N = 2$ のとき，

$$j(u_1, u_2) = 3\left[(-\alpha + u_1)^2 + (-u_1 + u_2)^2 + (-u_2 + \beta)^2\right]$$

と計算できる．

(4) 多変数関数 $j(u_1, \ldots, u_N)$ の最小化を行う．
問題に応じた様々な最適化の数値解法が開発されているが，ここではそれらの解法の出発点となる最急降下法を紹介する．この方法の基本的なアイデアは，適当に決めた初期点 $\boldsymbol{u}^0$ から始めて，j が最急降下する方向，つまり $-\nabla j(\boldsymbol{u}^0)$ に沿って，下がれるだけ下がって（すなわち，この方向に制限した j を最小化して＝ line search），たどり着いた点を $\boldsymbol{u}^1$ として，この点で探索方向を $-\nabla j(\boldsymbol{u}^1)$ に切り替えて，この操作を収束するまで繰り返す，というものである．アルゴリズムの概要は次のようになる．

(a) $k = 0$ とする．

(b) 初期値 $\boldsymbol{u}^0 = (u_1^0, \ldots, u_N^0)$ を選ぶ．

(c) j の $\boldsymbol{u}^k$ における最急降下方向 $\boldsymbol{g}^k = -\nabla_{\boldsymbol{u}} j(\boldsymbol{u}^k)$ を求める．

(d) 直線 $\boldsymbol{u}^k + t\boldsymbol{g}^k, t \geq 0$ に沿って J の最小値を計算する（直線探索という 1 変数 t についての最小化問題，二分法などで近似的に解く）．最小値は t_k で達成されるとする．

(e) $\boldsymbol{u}^{k+1} = \boldsymbol{u}^k + t_k \boldsymbol{g}^k$ とおく．

(f) 収束判定条件

$$\left| \frac{j(\boldsymbol{u}^{k+1}) - j(\boldsymbol{u}^k)}{j(\boldsymbol{u}^k)} \right| < tol$$

が満たされるか確認する．満たされなければ，$k = k + 1$ として，(c) に戻る．満たされる場合，終了する．

関数 j の等高線は最小値の近傍で細い谷を作るとき，探索経路はギザギザの形をして収束が遅くなる．この対策として，前処理（j の等高線を”丸く”する操作）を行ったり，より効率のよい探索方向を用いたりする．例えば，共役勾配法（CG 法）は遅くても N 回の探索方向切り替えを行えば最小値に収束することが示される．しかし，CG 法は基本的には 2 次関数にしか対応しないので，その非線形バージョンや他のアプローチ（Newton 法，BFGS 法など）も開発された．詳しくは，例えば [6] を参照するとよい．

References

[1] 岡崎 誠，べんりな変分原理，共立出版，1993.

[2] R. Cristoferi, *Calculus of Variations, lecture notes*, 2016
(URL: https://www.math.cmu.edu/cna/Publications/publications2016/papers/16-CNA-007.pdf)

[3] Bernard Dacorogna, *Introduction to the Calculus of Variations*, Imperial College Press, 2015.

[4] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, AMS, Providence, Rhode Island, 1998.

[5] Mark Kot, *A First Course in the Calculus of Variations*, American Mathematical Society, 2014.

[6] J. Nocedal, S.J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer, 2006.