解析学特論：講義ノート（2021 年度）

Karel SVADLENKA（京都大学 数学教室）

注意： この講義ノートは未完成で，ミスや不完全な部分を含んでいる可能性がある．

1　イントロ：いくつかの例

1.1　電磁気学の例

電荷が発生させる電磁場を求める問題を考える．3 次元の真空において，時間とともに変化しない電荷密度 $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ が与えられたとする（単位は $\mathrm{C/m^3}$）．身の回りの例として，乾いた髪の毛をとかすのに用いた櫛や静電気を浴びたドアノブがある．この電荷に対応する電場と磁場をそれぞれ $\boldsymbol{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$（単位は $\mathrm{V/m}$）と $\boldsymbol{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$（単位は $\mathrm{T} = \mathrm{Vs/m^2}$）とする．ガウスの法則は

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{1.1}$$

ただし，$\varepsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C/(Vm)}$ は真空の誘電率である．

> 発散作用素は $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}$ で定義される．

また，ファラデーの電磁誘導の法則より

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}. \tag{1.2}$$

ここで，t は時刻である．

> 回転作用素は $\operatorname{curl} \boldsymbol{E} = \nabla \times \boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}, \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x}, \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \right)$ で定義される．

電場 $\boldsymbol{E}$ の回転がゼロだから，静電ポテンシャル $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$（単位は V）が存在して，

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi \tag{1.3}$$

が成り立つ．ここで，$\nabla \phi = \operatorname{grad} \phi = (\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z})$ は勾配ベクトルである．

> $D \subseteq \mathbb{R}^3$ が単連結な開集合で，$\boldsymbol{F} : D \to \mathbb{R}^3$ が D で定義された連続微分可能な関数だとする．$\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ ならば，$\boldsymbol{F} = -\nabla \phi$ が成り立つような微分可能な関数 $\phi : D \to \mathbb{R}$ が存在する．（証明はストークスの定理を使う．）

これをガウスの法則と組み合わせると，

$$\operatorname{div}(\nabla \phi) = \Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.4}$$

というポアソン方程式が得られる．

この問題を変分的な側面から見ることもできる．静電ポテンシャル ϕ は定数を除いてしか決まらないので，$\phi(\boldsymbol{0}) = 0$ とすることができる．このとき，電場 $\boldsymbol{E}$ のなかにある点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ における点電荷 q（単位は

C）の電気ポテンシャル・エネルギー $U(\boldsymbol{x};q)$ は，この点電荷を原点から点 $\boldsymbol{x}$ に移動させるのに必要なエネルギーであり，

$$U(\boldsymbol{x};q) = -\int_0^{\boldsymbol{x}} q\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_0^1 q\boldsymbol{E}(h\boldsymbol{x})\cdot \boldsymbol{x}\ \mathrm{d}h = \int_0^1 q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\phi(h\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}h = q\phi(\boldsymbol{x}) \tag{1.5}$$

という経路積分で与えられる．$\boldsymbol{E}$ が勾配であるため，この積分は経路に依存せず，上の計算で原点と点 $\boldsymbol{x}$ を結ぶ線分を選ぶことができた．したがって，電荷分布 ρ の自身の発生させる電場における合計の電気エネルギーは

$$U = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \rho\phi\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (\mathrm{div}\,\boldsymbol{E})\phi\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{1.6}$$

となる（単位は $\mathrm{CV} = \mathrm{J}$）．

> $\frac{1}{2}$ の係数が入る理由について： 二つの点，$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ に配置された点電荷 q_1, q_2 を考えると，この系の電気ポテンシャルエネルギーは片方の点電荷（例えば，q_1）が発生するポテンシャル ϕ_1 におけるもう片方の点電荷（この場合，q_2）のポテンシャルエネルギーである．つまり，$U = q_2\phi_1(\boldsymbol{x}_2)$ となる．立場を逆転させて，$U = q_1\phi_2(\boldsymbol{x}_1)$ を得る．すると，$U = \frac{1}{2}(q_1\phi_2(\boldsymbol{x}_1) + q_2\phi_1(\boldsymbol{x}_2))$ のようにポテンシャルエネルギーは 2 つの点電荷で共有されている．

積の微分の公式

$$\mathrm{div}(\phi\boldsymbol{E}) = (\mathrm{div}\,\boldsymbol{E})\phi + \boldsymbol{E}\cdot\nabla\phi \tag{1.7}$$

を代入して，ガウスの発散定理を用いると，

$$\begin{aligned} U &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (\mathrm{div}(\phi\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\cdot\nabla\phi)\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \lim_{R\to\infty}\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{B_R} (\mathrm{div}(\phi\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\cdot\nabla\phi)\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{\partial B_R} \phi\,(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n})\ \mathrm{d}S - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{E}\cdot\nabla\phi\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{1.8}$$

のように変形できる，ここで，B_R は半径 R の球である．ポテンシャル ϕ が十分にはやく減衰すると仮定すると（実際，∂B_R 上で $\phi = O(\frac{1}{R}), R\to\infty$），(1.8) の第 1 項は消える．したがって，(1.8) の第 2 項で $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ を用いて，

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi|^2\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{1.9}$$

係数 ε_0 を除いた右辺の積分をディリクレ積分またはディリクレ汎関数とよぶ．

実は，ポアソン方程式 (1.4) の解はちょうど汎関数

$$J[\phi] := U - \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\varepsilon_0}{2}|\nabla\phi(\boldsymbol{x})|^2 - \rho(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x})\right)\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{1.10}$$

の最小値に対応する．この右辺の第 2 項は電荷密度 ρ と電場との相互作用によるエネルギーとして解釈できる．この後，(1.10) の最小値の存在について詳しく考える．結論を大雑把に言うと，被積分関数が ϕ の最高階微分 $\nabla\phi$ の関数として見ると，凸な 2 次関数であるため，最小化関数は一意に存在することが言える．この問題は古典理論で解決できるので，本講義の興味の的ではない．

1.2 風に向かって進むヨットの例

流れのある川の中で風に向かってヨットを効率よく進める問題を考える．ヨットのセール（帆）を適切な向きになるよう制御すると，セールの付近を流れる風によって発生する揚力のうち進行方向に対して垂直

な成分をセンターボードの抵抗力によって打ち消すことにより，進行方向と同じ向きの推進力を得ることができる．ここで考えたいのは，最も速い速度で川を進むには，風に対してどのようなヨットの角度にして，それを時間とともにどのように変えていけばよいか，ということである．

数理モデルの設定：

- 川は一様な幅 $2R$ を持ち，x-軸の正の方向に流れていて，その速度はポアズイユ流れで与えられる：
$$v_{river}(r) = v_{river}^{center}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \tag{1.11}$$
ここで，v_{river}^{center} は川の中央の最大の速度で，r は川の中央からの距離である．このモデルは流体の方程式から導出される．川の流れのより正確なモデルもあるが，ここでは本質的ではないので，このような単純なものを採用する．

- 風は x-軸の負の方向に吹いていて，一定で一様である．

- ヨットの進行方向（すなわち x-方向）の速度は，風に対するヨットの角度 α に次のように依存すると仮定する：
$$v_{boat}(\alpha) = v_{boat}^{max}\frac{1-\cos(4\alpha)}{2}. \tag{1.12}$$
ここで，v_{boat}^{max} はこの風で得られるヨットの最大速度で，$\alpha = \pm 45^\circ$ で達成される．実際のヨットでは，この最適な角度は 45° より小さい場合が多いが，問題の本質に変わりがないので，この式を使う．

ヨットを進める戦略は，速度が最大となる角度 45° を維持することであるが，常にこの角度にすると，直進方向からずれて川の岸に当たってしまう．さらに，川の中央は流れの速度が最大となっているので，それを利用するにはできるだけ中央の近傍に留まるとよい．つまり，45° と -45° の角度を頻繁に切り替えて，ジグザグの経路を辿りながら，川の中央付近を進むのがよさそうである．切り替える操作は瞬時にできるとして，最適な切り替える頻度を知りたい．

時刻 $t \in [0,T]$ における，川の中央からのヨットの距離を $r(t)$ とすると，進行方向のヨットの速度は

$$\begin{aligned} v(t) &= v_{boat}\left(\arctan r'(t)\right) + v_{river}(r(t)) \\ &= v_{boat}^{max}\frac{1-\cos\left(4\arctan r'(t)\right)}{2} + v_{river}^{center}\left(1-\frac{r(t)^2}{R^2}\right) \end{aligned} \tag{1.13}$$

と表される（ただし，$\tan\alpha \approx r'(t)$ は近似である）．これを時間区間 $[0,T]$ で積分すれば，時刻 T までの間，進行方向（x-方向）に進んだ距離を求めることができる．この距離を最大化したいが，それは符号を逆にした距離の最小化と同値である．初期時刻 $t=0$ と最終時刻 $t=T$ において，ヨットが川の中央に位置するという条件をつけると，次の最小化問題になる：

$$\begin{cases} \text{Minimize} & \mathscr{F}[r] = \int_0^T \left(v_{boat}^{max}\frac{\cos\left(4\arctan r'(t)\right)-1}{2} + v_{river}^{center}\left(\frac{r(t)^2}{R^2}-1\right)\right)\,\mathrm{d}t \\ \text{subject to} & r(0) = r(T) = 0,\ |r(t)| \le R\ \forall t \in [0,T] \end{cases} \tag{1.14}$$

汎関数の被積分関数を未知関数 $r(t)$ の最高階微分 $z = r'(t)$ の関数としてみると，$\frac{1}{2}(\cos(4\arctan z) - 1)$ という関数になるが，いわゆる double-well potential の形をしている．すなわち，$z = \pm 1$ において二つの最小値をもつ．

直感的には，$+45^\circ$ と -45° の間をできるだけ頻繁に切り替えるようにすれば，汎関数の第 1 項は常に 0 という最小の値になり，第 2 項も $r=0$ で達成される最小の値に近くなるので，無限にはやく角度を切り替える戦略が最大の全体速度につながると言える．無限にはやく切り替えるというのは，川の中央をまっすぐに進むのと同じであるが，このときは汎関数の値は最小にならない（第 2 項は最小になるが，第 1 項は 0）．数学的には，この最小化問題の解は存在しないことになるが，応用ではこの答えに満足してもらえないため，さらなる考察が必要になる．基本的には二つの方針がある：

- 汎関数の下限に近づく最小化列（角度を有限の頻度で切り替える進み方に対応）の数学的な性質を調べる．このアプローチはヤング速度や緩和という数学の概念につながる．
- モデルをより現実的なものにする．今回の場合は，ヨットの角度を切り替えるのに時間がかからないと仮定していたが，現実的な仮定ではない．この仮定をなくすと，切り替えるのに必要な時間とのバランスで最適な切り替える速度は有限になる．

1.3 超弾性の例

弾性体の物体に力を加えたときに物体がどのように変形するかという問題を考える．弾性理論は連続体力学の重要な理論であるが，ここでは必要な事項を根拠なしで紹介するのに止める（詳細については [2, 5] を参照）．

変形がない状態で物体が連結領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を占めるとする．ただし，境界 $\partial\Omega$ はリプシッツ多様体であるとする．

> リプシッツ多様体はリプシッツ関数のグラフの有限な和集合として定義される．

Ω を基準配置（reference configuration）とよぶ．変形すると，任意の物質点 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ は点 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^3$ に移る．ここで，$\boldsymbol{y} : \Omega \to \boldsymbol{y}(\Omega)$ が微分可能な全単射であるのに加え，向きを保存すると仮定する．つまり，

$$\det \nabla \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) > 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{1.15}$$

> ここで，
> $$\nabla \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$
> 向きが保存されないと物質の相互貫通が起こり，物理の基本法則に矛盾する．

$\nabla \boldsymbol{y}$ を変形勾配（テンソル）とよぶ．また，変位ベクトルを次のように定義する：

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}. \tag{1.16}$$

これからの方針は，変形により物体に蓄えられたエネルギーの形を導出して，物体が実際にとる形状をこのエネルギーの最小値として求める，というものである．エネルギー密度の引数となるのは，歪みテンソルとよばれる，局所的な伸び縮みを測る量である．剛体運動，すなわち $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = R\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}_0 \left(R^T = R^{-1}, \det R = 1, \boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{R}^3\right)$ は歪みを発生させないという意味で，歪みテンソルは物体の変形の剛体運動からのずれを表すものである．

そこで，変形勾配の極分解

$$\nabla \boldsymbol{y} = RU, \qquad R^T R = RR^T = I, \tag{1.17}$$

> 行列の極分解 任意の実正方行列 M は，半正定値行列 U と直交行列 R の積に分解できる．つまり，任意の線形写像を回転とある直行系に対する伸び縮みの分解できる．

を行うと，回転 R を除いた部分を用いて定義される right Cauchy-Green テンソル

$$C = (\nabla \boldsymbol{y})^T \nabla \boldsymbol{y} = (RU)^T (RU) = U^2 \tag{1.18}$$

が歪みの程度を表すと期待できる．実際，歪みの度合いを変形後の微小線分 $d\boldsymbol{y}$ の長さの 2 乗と変形前の微小線分 $d\boldsymbol{x}$ の長さの 2 乗の差の半分として定義すると，

$$\frac{1}{2}\left(d\boldsymbol{y} \cdot d\boldsymbol{y} - d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x}\right) = \frac{1}{2}\left((\nabla \boldsymbol{y} d\boldsymbol{x})^T (\nabla \boldsymbol{y} d\boldsymbol{x}) - d\boldsymbol{x}^T d\boldsymbol{x}\right) = \frac{1}{2} d\boldsymbol{x}^T \left(C - I\right) d\boldsymbol{x} \tag{1.19}$$

となるので，

$$G = \frac{1}{2}\left(C - I\right) \tag{1.20}$$

という Green-St.Venant テンソルの定義にたどり着く．変位 $\boldsymbol{u}$ を用いて書き換えると，

$$G = \frac{1}{2}\left((\nabla \boldsymbol{u} + I)^T(\nabla \boldsymbol{u} + I) - I\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T + (\nabla \boldsymbol{u})^T(\nabla \boldsymbol{u})\right). \tag{1.21}$$

変形によるエネルギーの話に戻ろう．弾性エネルギーが

$$\int_\Omega W(\nabla \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{1.22}$$

のように，変形勾配 $\nabla \boldsymbol{y}$ のある関数 $W : \mathbb{R}^{3\times 3} \to [0, \infty]$ を用いて書けるとき，超弾性材料であると言う．このとき，重力などの外力場 $\boldsymbol{b} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ が与えられたとき，系に蓄積される合計の弾性エネルギーは

$$\mathscr{F}[\boldsymbol{y}] = \int_\Omega \left(W(\nabla \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})\right)\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{1.23}$$

となる．応用では，W は Green-St.Venant 歪みテンソル G に依存する形で与えられることが多いが，数学解析の意味では上記のようにすると都合がよい．非線型超弾性の基本的な問題は，与えられた境界条件の下でこの $\mathscr{F}$ を $\boldsymbol{y} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ について最小化することである．どの関数空間で最小化を行うべきかは，W の形（とくに無限遠方での増加）により決まる．

物理的に正しい関数 W は以下の性質を満たさなければならない：

(i) $W(I) = 0$ （変形なしの状態のエネルギーはゼロ）

(ii) $W(QA) = W(A)\ \forall Q \in \mathrm{SO}(3),\ A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$（標構無差別の原理）

(iii) $W(A) \to +\infty$ as $\det A \downarrow 0$（無限の圧縮には無限のエネルギーが必要）

(iv) $W(A) \to +\infty$ as $|A| \to \infty$（無限の引っ張りは無限のエネルギーがかかる）

> $\mathrm{SO}(3)$ は行列式 1 の 3 次直交行列がなす回転群（特殊直交群）である．
> $|A|$ は行列 A の（フロベニウス）ノルムである．

関数 W に関して考えられる最も単純な例は

$$W(A) = \mathrm{dist}(A, \mathrm{SO}(3))^2 = \left(\inf_{B\in \mathrm{SO}(3)} |A - B|\right)^2 \tag{1.24}$$

である．この場合，$\nabla \boldsymbol{y} \in L^2(\Omega)$ のなかで最小値を求めるのが妥当である．しかし，この関数は (iii) の条件を満たさない．

> $A = \begin{pmatrix} 1 & \mu & \mu \\ \mu & 1 & \mu \\ \mu & \mu & 1 \end{pmatrix}$, $\mu \in (0, 1)$ とすると，$\mu \to 1-$ のとき，$\det A \to 0+$ である
> が，$W(A) \le |A - I| = \sqrt{6}\mu \le \sqrt{6}$.

より現実的なモデルとして，例えば Mooney-Rivlin 材料がある：

$$W(A) = \begin{cases} a|A|^2 + b|\operatorname{cof} A|^2 + \Gamma(\det A) & \text{if } \det A > 0 \\ +\infty & \text{if } \det A \le 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

ここで，$a, b > 0$，そして $\Gamma(d) = \alpha d^2 - \beta \log d$，$\alpha, \beta > 0$．$b = 0$ のとき，neo-Hookean 材料とよばれる．他にも様々な物理的に正しいモデルがある．

> 余因子行列 $\operatorname{cof} A$ は $[\operatorname{cof} A]_{ij} = (-1)^{i+j} \det C_{ij}$ と定義される．ただし，C_{ij} は行列 A から i-番目の行と j-番目の列を除いて得られる行列である．A が正則ならば，$\operatorname{cof} A = (\det A)\, A^{-T}$ が成り立つ．
> 物理的には，$\operatorname{cof}(\nabla \boldsymbol{y})$ は変形 $\boldsymbol{y}$ による局所的な面積の変化率を意味する．また，$\det A$ は変形 $\boldsymbol{y}$ による局所的な体積の変化率を意味する．

これまで，一般の非線型弾性理論を考えてきたが，$\nabla \boldsymbol{u}$ が “小さい” と仮定して，式を線形化するアプローチがよく適用される．この場合，(1.21) において，2 次の項を無視して，線形化歪みテンソル

$$\mathscr{E}\boldsymbol{u} := \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T\right) \tag{1.26}$$

を用いる．

線形理論では，歪みを発生させない変位は $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}_0$, $B^T = -B$, $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{R}^3$, で与えられる交代（歪対称）アフィン写像に対応する．

> リー群である回転群 $\mathrm{SO}(3)$ のリー代数 $\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3)) = \mathfrak{so}(3)$ は Lie bracket の作用に対して閉じた同次元の線形空間，つまり交代行列（歪対称行列）の空間である．これらの行列を “微小回転” として解釈できる．

線形弾性では 2 次エネルギー

$$\mathscr{W}[\boldsymbol{u}] = \int_\Omega \frac{1}{2} \mathscr{E}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \mathbf{C}(\boldsymbol{x}) \mathscr{E}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{1.27}$$

を用いる．ただし，$\mathbf{C}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{C}^{ik}_{jl}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \Omega$ は弾性テンソルと呼ばれる対称な正定値 4 階テンソルである．

> 4 階テンソルが正定値であるとは，$c > 0$ が存在して，$A : \mathbf{C}(\boldsymbol{x}) A \geq c|A|^2$ が成り立つという意味である．
> ここで，$A : B$ は行列のフロベニウス積である： $A : B = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ij}$.

均質で等方的な材料の場合，$\mathbf{C}$ は場所 $\boldsymbol{x}$ にも変形の方向にも依らないので，

$$(AQ) : \mathbf{C}(AQ) = A : \mathbf{C}A \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ Q \in \mathrm{SO}(3) \tag{1.28}$$

という条件を満たす．この条件から，$\mathscr{W}$ は次の形を持たなければならないということが示される：

$$\mathscr{W}[\boldsymbol{u}] = \int_\Omega \left(\mu |\mathscr{E}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|^2 + \frac{1}{2}\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right) |\operatorname{tr} \mathscr{E}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|^2 \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{1.29}$$

ここで，剪断弾性率 $\mu > 0$ と体積弾性率 $\kappa > 0$ は材料によって決まる定数である．

> 例えば，冷延鋼の場合，$\mu \approx 75\mathrm{GPa}$, $\kappa \approx 160\mathrm{GPa}$.

非線型の場合と同様，外力 $\boldsymbol{b} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ に対して，合計エネルギー

$$\mathscr{F}[\boldsymbol{u}] := \int_\Omega \left(\mu |\mathscr{E}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|^2 + \frac{1}{2}\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right) |\operatorname{tr} \mathscr{E}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|^2 - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{1.30}$$

の $\boldsymbol{u}$ についての最小化問題を解く．

線形弾性理論のときの汎関数 $\mathscr{F}$ (1.30) は凸であるから，古典的な変分法の理論で最小値の存在を証明することができる．しかし，(i)–(iv) の条件の観点から，非線型理論を重視することが多い．一方で，2 次元以上では，条件 (iii), (iv) を満たし，正の行列式をもつ正則行列に対して有限な値をとる凸な関数 W が存在しないことが知られている．つまり，凸性という性質に頼っている古典理論では，物理的に意味のあるエネルギー汎関数に対する最小化問題を扱うことができない．この講義では，この問題を解決するための比較的に新しい理論を紹介する．

2　古典理論：凸な汎関数

ここでは，汎関数が凸かつ強圧ならば最小値が存在するという古典理論の概要を述べる．まずは抽象的なバナッハ空間の設定で，本講義の主なツールである直接法を紹介する，その後，上の例で見てきたような汎関数が扱えるバナッハ空間（ソボレフ空間）に限定して，より具体的に話をする．これにより例えば，電磁気学の例に出た問題や線形弾性の問題を解決できる．

2.1　変分解析の直接法

この講義で紹介する存在定理の根幹にあるのは直接法という手法である．“直接” というのは，オイラー・ラグランジュ方程式という偏微分方程式に迂回をせずに証明が行われているという意味である．

最初の抽象的な設定では，X を完備な距離空間とする．よく出てくる例はノルム位相のつくバナッハ空間と弱位相のつく回帰的バナッハ空間の凸な閉部分集合である．$\mathscr{F} : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を最小化の対象となる汎関数とする．以下の定理に出てくる二つの条件をまず詳しく定義しておこう．

(H1) **強圧性：** すべての $\Lambda \in \mathbb{R}$ に対して，下位集合

$$\{u \in X : \mathscr{F}[u] \le \Lambda\} \quad \text{は点列プレコンパクトである．} \tag{2.1}$$

つまり，ある $\Lambda \in \mathbb{R}$ とある列 $\{u_j\} \subset X$ に対して $\mathscr{F}[u_j] \le \Lambda$ ならば，$\{u_j\}$ は X において収束する部分列をもつ．英語では coercivity と言う．

(H2) **下半連続性：** $u_j \to u$ in X を満たす任意の列 $\{u_j\} \subset X$ に対して次が成り立つ：

$$\mathscr{F}[u] \le \liminf_{j\to\infty} \mathscr{F}[u_j] \tag{2.2}$$

英語で lower semicontinuity となるので，“l.s.c.” と略されることがよくある．

ここで，コンパクト性と下半連続性の点列バージョンを使っていることに注意する．本来なら，これからよく使用するバナッハ空間の弱位相なら，位相版を使うべきだが，点列版はより便利である．これが許されるのは，可分な回帰的バナッハ空間の弱位相がノルム有界な集合上で距離化できるからである（双対空間における weak*位相もそうである）．

$$\text{Minimize} \quad \mathscr{F}[u] \qquad \text{over all} \ \ u \in X \tag{2.3}$$

という抽象的な問題に対する直接法は次の定理でまとめられている．

Theorem 2.1. $\mathscr{F}$ が強圧で下半連続であるとする．このとき，最小化問題 (2.3) は少なくとも一つの解をもつ．すなわち，$\mathscr{F}[u_*] = \min\{\mathscr{F}[u] : u \in X\}$ を満たす $u_* \in X$ が存在する．

Proof. $\mathscr{F} \equiv +\infty$ ならば，すべての $u \in X$ が解になるので，$\mathscr{F}[u] < +\infty$ を満たす $u \in X$ が少なくとも一つ存在するとしてよい．最小化列 $\{u_j\} \subset X$ を

$$\lim_{j\to\infty} \mathscr{F}[u_j] = \alpha := \inf\{\mathscr{F}[u] : u \in X\} < +\infty \tag{2.4}$$

となるようにとる．このとき，全ての $j \in \mathbb{N}$ に対して $\mathscr{F}[u_j] \le \Lambda$ が成立するような $\Lambda \in \mathbb{R}$ が存在する．強圧性により，部分列（これを同じ記号 $\{u_j\}$ で表す）と $u_* \in X$ があって，

$$u_j \to u_* \in X. \tag{2.5}$$

下半連続性を用いると，

$$\alpha \leq \mathscr{F}[u_*] \leq \liminf_{j\to\infty} \mathscr{F}[u_j] = \alpha \tag{2.6}$$

がわかる．したがって，$\mathscr{F}[u_*] = \alpha$ となり，u_* は求めていた minimizer である． □

この定理により，minimizer の存在は強圧性と下半連続性の確認に帰着された．下半連続性は汎関数の凸性と密接につながっている．もう一つの課題は，与えられた汎関数 $\mathscr{F}$ と集合 X に対して，強圧性と下半連続性が成り立つような適切な位相の選択である（物理的にも意味がある位相になる場合が多い）:

- 強い位相（すなわち，収束する列がより少ないような位相）を選ぶと，$\mathscr{F}$ が下半連続になりやすいが，強圧になりにくくなる．
- 弱い位相にすると逆の問題が起きる．

この講義では，X は無限次元バナッハ空間またはその部分集合になる場合がほとんどである．このとき，強い収束についてのコンパクト性を得るのが非常に難しい（無限次元空間の単位球はコンパクトではない）．一方で，弱収束についての強圧性は比較的に証明しやすい．このため，ほとんどの問題で，弱い位相を採用する必要がある．そうすると，今度は下半連続性が難しくなるので，これについて詳しく考える．

Theorem 2.2. X を回帰的バナッハ空間または回帰的バナッハ空間のアフィン閉部分集合とし，$\mathscr{F} : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ とする．

> アフィン集合は X のある元と X のある部分空間の和として表せる集合である．

つぎの条件

(WH1) **弱い強圧性：** 任意の $\Lambda \in \mathbb{R}$ に対して下位集合 $\{u \in X : \mathscr{F}[u] \leq \Lambda\}$ は点列弱プレコンパクトである．すなわち，ある $\Lambda \in \mathbb{R}$ と列 $\{u_j\} \subset X$ に対して，$\mathscr{F}[u_j] \leq \Lambda$ ならば，$\{u_j\}$ は弱収束する部分列をもつ．

(WH2) **弱下半連続性：** $u_j \to u$（X における弱収束）なる任意の列 $\{u_j\} \subset X$ に対して

$$\mathscr{F}[u] \leq \liminf_{j\to\infty} \mathscr{F}[u_j]\,. \tag{2.7}$$

が成り立つならば，$\mathscr{F}[u]$ を $u \in X$ について最小化する問題は少なくとも一つの解をもつ．

Proof. 定理 2.1 の証明における収束を弱収束に置き換えるだけで示すことができる．ただし，X が回帰的バナッハ空間のアフィン閉部分集合である場合，部分列の収束先 u_* がこの部分集合に入ることを確認する必要がある．このことは，バナッハ空間のアフィン集合に対して，強閉であることと弱閉であることが同値である，という事実から従う．

> C がノルム空間 X の凸な部分集合ならば，C のノルム位相での閉包と弱位相での閉包は一致する．

□

2.2 凸な汎関数

上の理論を適用できる積分型汎関数の具体例として，

$$\mathscr{F}[u] = \int_\Omega f(x, \nabla u(x))\ \mathrm{d}x \tag{2.8}$$

を $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ について最小化する問題を考える．ここで，$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ はリプシッツ領域（＝有界な連結開集合，境界は有限個のリプシッツ関数のグラフの和），$W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ はソボレフ空間，そして $p \in (1,\infty)$（f の増加によって決定される）．

> ソボレフ空間の性質について，それを使うところで簡単に紹介するが，この講義ではほぼすべての問題をソボレフ空間で解くので，その定義や基礎的な事項を復習しておくとよい．
> $W^{1,p}(\Omega)$ は弱微分 $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}$ が存在し，$L^p(\Omega)$ に属する関数ような $u \in L^p(\Omega)$ の空間である．ノルムを
>
> $$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,p}} &= \left(\|u\|_{L^p}^p + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p}^p + \cdots + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_d} \right\|_{L^p}^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1,\infty) \\ \|u\|_{W^{1,\infty}} &= \max\left\{ \|u\|_{L^\infty}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^\infty}, \dots, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_d} \right\|_{L^\infty} \right\} \end{aligned} \tag{2.9}$$
>
> で定義すると，$W^{1,p}(\Omega)$ はバナッハ空間になる．$p \in (1,\infty)$ ならば，回帰的バナッハ空間になる．

この汎関数 $\mathscr{F}$ と関数空間 $X = W^{1,p}(\Omega)$ に直接法を適用したいので，どのような f への仮定のもとで，次のことが言えるか，調べるのが目標である：

- $\mathscr{F}[u]$ はすべての $u \in W^{1,p}(\Omega)$ に対してちゃんと定義される．
- $\mathscr{F}$ は $W^{1,p}(\Omega)$（の部分空間）上で弱強圧である．
- $\mathscr{F}$ は $W^{1,p}(\Omega)$ 上で弱下半連続である．

まずは，$f(x, \nabla u(x))$ という関数が可測であるための条件を見る．

Lemma 2.3. 関数 $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は以下の *Carathéodory* の条件を満たすとする：

(i) $x \mapsto f(x, A)$ は任意の固定した $A \in \mathbb{R}^N$ に対してルベーグ可測である

(ii) $A \mapsto f(x, A)$ は（ルベーグ測度の意味で）ほとんどすべての固定した $x \in \Omega$ に対して連続である

このとき，写像 $V : \Omega \to \mathbb{R}^N$ がボレル可測ならば，$x \mapsto f(x, V(x))$ はルベーグ可測である．

> ルベーグ可測関数：$f : (A, L) \to (\mathbb{R}, T)$ に対して（T はボレル集合の σ-代数，L はルベーグ可測集合族），任意の $E \in T$ に対して $f^{-1}(E) \in L$ となる（ルベーグ集合：外測度 λ^* で定義，Caratheodory criterion $\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)\ \forall A$）
> ボレル可測関数：$f : (A, S) \to (B, T)$ に対して（S, T はボレル集合の σ-代数），任意の $E \in T$ に対して $f^{-1}(E) \in S$ となる（ボレル集合：開集合系から可算回の合併、交叉、差を取ることによって得られる集合，ボレル集合はルベーグ可測である）

Proof. ボレル可測関数は単関数で近似できるので，まず，V を単関数として示す．すなわち，

$$V(x) = \sum_{k=1}^{m} A_k \mathbb{1}_{E_k}(x) \tag{2.10}$$

とする．ここで， $E_k \subset \Omega, k \in \{1, \ldots, m\}$ は $\bigcup_{k=1}^{m} E_k = \Omega$ を満たすボレル集合で，$A_k \in \mathbb{R}^N$. 仮定 (i) より，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\{x \in \Omega : f(x, V(x)) > t\} = \bigcup_{k=1}^{m} \{x \in E_k : f(x, A_k) > t\} \tag{2.11}$$

という集合はルベーグ可測である．よって，V が単関数の場合，$x \mapsto f(x, V(x))$ はルベーグ可測である．

一般のボレル可測な V の場合，各点収束の意味で，単関数 V_k で近似できる．

> ボレル集合族 B は開集合で生成されるが，ルベーグ集合族 L は開集合とゼロ集合で生成されるので，$B \subset L$.
> $B \subset \mathbb{R}^d$ をボレル集合とする．関数 $f : B \to \mathbb{R}^N$ がルベーグ（ボレル）可測であるための必要十分条件は，
>
> $$f_j \to f \qquad \text{各点収束} \ (j \to \infty)$$
>
> が成り立つような単関数の列
>
> $$f_j = \sum_{k=1}^{K(j)} A_k^{(j)} \mathbb{1}_{E_k^{(j)}}$$
>
> が存在することである．ただし，$K(j) \in \mathbb{N}$, $E_k^{(j)} \subset B$ は $\bigcup_{k=1}^{K(j)} E_k^{(j)} = B$ を満たすルベーグ（ボレル）可測集合，$A_k^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ である．
> Lusin の定理より次のことがわかる：任意のルベーグ可測な関数に対して，ルベーグ測度ゼロの集合を除いてそれと一致するボレル可測な関数が存在する．

したがって，(ii) を考慮すると，

$$f(x, V_k(x)) \to f(x, V(x)) \quad \text{a.e. } lx \in \Omega \quad \text{as } k \to \infty. \tag{2.12}$$

可測関数の各点極限は可測だから，$f(x, V(x))$ はルベーグ可測である． □

Remark 2.4. 上の補題の仮定の下で，ルベーグ積分が定義できないことが起こり得る．これは，有限にならないという意味ではなく，被積分関数の正の部分の積分も負の部分の積分も無限になる場合を指す．このようなケースを回避するには，例えば，p-増加

$$|f(x, A)| \leq M\left(1 + |A|^p\right), \quad (x, A) \in \Omega \times \mathbb{R}^{m \times d} \tag{2.13}$$

を仮定することができる（ただし，$M > 0$）．このとき， $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ ならば，$\mathscr{F}[u]$ は有限な値になる．しかし，これからの議論では f が下から有界という仮定をするので，汎関数が $+\infty$ の値をとることを許して，p-増加を仮定しなくて済む．

次に，汎関数 $\mathscr{F}$ の強圧性について考えよう．

Proposition 2.5. 被積分関数 $f : \Omega \times \mathbb{R}^{m\times d} \to [0,\infty)$ がカラテオドリの条件を満たし，$p \in (1,\infty)$ に対して境界値 $g \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega;\mathbb{R}^m)$ であるとする．f が $\mu > 0$ について p-強圧条件

$$\mu|A|^p \le f(x,A), \quad (x,A) \in \Omega \times \mathbb{R}^{m\times d} \tag{2.14}$$

を満たすならば，$\mathscr{F}$ は関数空間

$$W^{1,p}_g(\Omega;\mathbb{R}^m) = \left\{u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) : u|_{\partial\Omega} = g\right\} \tag{2.15}$$

の上で弱強圧である．

> トレースの定理：$p \in [1,\infty]$ に対して，線形作用素
>
> $$\mathrm{tr}_\Omega : \mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathrm{L}^p(\partial\Omega)$$
>
> が存在して，
>
> $$\mathrm{tr}_\Omega(\varphi) = \varphi|_{\partial\Omega} \qquad \text{if } \varphi \in \mathrm{C}(\bar{\Omega})$$
>
> が成り立つ．$p \in (1,\infty)$ ならば，tr_Ω は有界で，$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathrm{L}^p(\partial\Omega)$ の写像として弱連続である．このとき，$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ の tr_Ω による像を $\mathrm{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ という記号で表す．

Proof. 条件

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{F}[u_j] < \infty \tag{2.16}$$

を満たす任意の列 $\{u_j\} \subset W^{1,p}_g(\Omega;\mathbb{R}^m)$ が弱プレコンパクトであることを示したい．仮定 (2.14) より，

$$\mu \cdot \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_\Omega |\nabla u_j|^p \ \mathrm{d}x \le \sup_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{F}[u_j] < \infty \tag{2.17}$$

が成立するため，$\sup_j \|\nabla u_j\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ という評価を得る．$u_0 \in W^{1,p}_g(\Omega;\mathbb{R}^m)$ を一つ任意に固定すれば，$u_j - u_0$ は $W^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^m)$ に属し，$\sup_j \|\nabla(u_j - u_0)\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ が成り立つ．ポアンカレ不等式より，

$$\|u_j - u_0\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u_j - u_0\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla(u_j - u_0)\|^p_{L^p(\Omega)} \le (C_P^p + 1)\|\nabla(u_j - u_0)\|^p_{L^p(\Omega)}. \tag{2.18}$$

> ポアンカレ不等式：$C_P = C_P(\Omega,p)$ があって，
>
> $$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C_P \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \forall u \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

よって，

$$\sup_j \|u_j\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le \sup_j \|u_j - u_0\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|u_0\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \infty. \tag{2.19}$$

$p \in (1,\infty)$ に対して $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ は可分な回帰的バナッハ空間で，可分な回帰的バナッハ空間のノルム有界な部分集合が弱点列プレコンパクトだから，これで証明が終了する． □

> X が可分な回帰的バナッハ空間ならば，X のノルム有界な部分集合は弱点列プレコンパクトである．

p-強圧条件に現れる p の値は解を探すソボレフ空間 $W^{1,p}$ の指数 p を定める．

最後に，弱下半連続性の問題に進もう．以下の基盤となる結果は 1 変数関数の場合 1920 年に Leonida Tonelli により証明されたが，多変数関数への拡張は 1961 年に James Serrin が定理を発表するまで時間がかかった．

Theorem 2.6 (L. Tonelli (1920) & J. Serrin (1961))**.** $f:\Omega\times\mathbb{R}^{m\times d}\to[0,\infty)$ がカラテオドリの条件を満たし，ほとんどすべての $x\in\Omega$ に対して $f(x,\cdot)$ が凸関数ならば，$\mathscr{F}$ は $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ $(1<p<\infty)$ において弱下半連続である．

> $f:D\to\mathbb{R}$ が凸であるとは，
>
> $$f(\theta x+(1-\theta)y)\le\theta f(x)+(1-\theta)f(y)\qquad\forall x,y\in D,\ \theta\in(0,1).$$

Proof. 最初にノルム位相での下半連続性を示してから，弱い位相でも成り立つことを示す．よって，まずは $u_j\to u$ in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ と仮定する．このとき，ほとんどいたる点において $\nabla u_{j_k}\to\nabla u$ が成り立つような部分列 $\{u_{j_k}\}$ が存在する．

> 列 $\{f_j\}$ に対して $u_j\to u$（$L^p(\mathbb{R}^d)$, $p\in[1,\infty]$ での強収束）ならば，$f_{j_k}\to u$（a.e. 各点収束）なる部分列 $\{f_{j_k}\}$ が存在する．

定理の仮定より，$f(x,\nabla u_{j_k}(x))\ge 0$ だから，Fatou の補題が適用できて，

> Fatou の補題：$f_j:\mathbb{R}^d\to[0,+\infty],j\in\mathbb{N}$ がルベーグ可測関数ならば，
>
> $$\int\liminf_{j\to\infty}f_j(x)\,dx\le\liminf_{j\to\infty}\int f_j(x)\,dx.$$

$$\mathscr{F}[u]=\int_\Omega f(x,\nabla u(x))\,\mathrm{d}x\le\liminf_{k\to\infty}\int_\Omega f\left(x,\nabla u_{j_k}(x)\right)\,\mathrm{d}x=\liminf_{j\to\infty}\mathscr{F}\left[u_{j_k}\right].\tag{2.20}$$

これはある部分列に対してしか示せていないが，もとの列 $\{u_j\}_j$ の任意の部分列 $\{u_{j_k}\}_k$ をとっても，同じようにそのさらなる部分列 $\{u_{j_k\ell}\}_\ell$ がとれて，$\mathscr{F}[u]\le\liminf_{\ell\to\infty}\mathscr{F}[u_{j_{k_\ell}}]$ が示せるので，もとの列についても $\mathscr{F}[u]\le\liminf_{j\to\infty}\mathscr{F}[u_j]$ が正しい（レポート課題 1 を参照）．

次に，弱収束についても成り立つことを示す．つまり，$W^{1,p}$ で $u_j\to u$ と弱収束する列 $\{u_j\}\subset W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ をとって，

$$\mathscr{F}[u]\le\liminf_{j\to\infty}\mathscr{F}[u_j]=:\alpha\tag{2.21}$$

を示す．下限の定義より，適当な部分列をとれば，$\mathscr{F}[u_j]$ が α に収束するとしてもかまわない．

> Mazur の補題：バナッハ空間 X において $x_j\rightharpoonup x$（弱収束）ならば，$y_j\to x$（強収束）が成り立つような凸結合
>
> $$y_j=\sum_{n=j}^{N(j)}\theta_n^{(j)}x_n,\qquad\theta_n^{(j)}\in[0,1],\qquad\sum_{n=j}^{N(j)}\theta_n^{(j)}=1$$
>
> が存在する．

Mazur の補題より，u_j の凸結合

$$v_j=\sum_{n=j}^{N(j)}\theta_n^{(j)}u_n,\qquad\theta_n^{(j)}\in[0,1],\qquad\sum_{n=j}^{N(j)}\theta_n^{(j)}=1\tag{2.22}$$

があって，$v_j\to u$（$W^{1,p}$ で強収束）が成り立つ．関数 $f(x,\cdot)$ が a.e. x に対して凸だから，

$$\mathscr{F}\left[v_j\right]=\int_\Omega f\Big(x,\sum_{n=j}^{N(j)}\theta_n^{(j)}\nabla u_n(x)\Big)\,\mathrm{d}x\le\sum_{n=j}^{N(j)}\theta_n^{(j)}\mathscr{F}\left[u_n\right].\tag{2.23}$$

両辺の $\liminf_{j\to\infty}$ をとって，$\mathscr{F}[u_n] \to \alpha$ as $n \to \infty$ と $\sum_{n=j}^{N(j)} \theta_n^{(j)} = 1$ を考慮すると，

$$\liminf_{j\to\infty} \mathscr{F}[v_j] \le \alpha \tag{2.24}$$

$$\left|\sum_{n=j}^{N(j)} \theta_n^{(j)} \mathscr{F}[u_n] - \alpha\right| = \left|\sum_{n=j}^{N(j)} \theta_n^{(j)} (\mathscr{F}[u_n] - \alpha)\right| \le \sup_{n=j,\dots,N(j)} |\mathscr{F}[u_n] - \alpha| \sum_{n=j}^{N(j)} \theta_n^{(j)} = \sup_{n=j,\dots,N(j)} |\mathscr{F}[u_n] - \alpha|$$

一方で，$v_j \to u$ が強収束するので，証明の前半より $\mathscr{F}[u] \le \liminf_{j\to\infty} \mathscr{F}[v_j]$. このことから，(2.21) は従う． □

これまでの結果をまとめると，次の定理を得る．

Theorem 2.7. カラテオドリの条件を満たす関数 $f : \Omega \times \mathbb{R}^{m\times d} \to [0,\infty)$ について，

(i) f は $p \in (1,\infty)$ に対して p-強圧条件 (2.14) を満たす

(ii) $f(x,\cdot)$ は *a.e.* $x \in \Omega$ に対して凸である

が成り立つならば，$\mathscr{F}$ の $W_g^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ での最小値が存在する．ただし，$g \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega;\mathbb{R}^m)$.

Proof. Proposition 2.5 より，$\mathscr{F}$ は $W_g^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ で弱強圧で，Theorem 2.6 より，$\mathscr{F}$ は $W_g^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ で弱下半連続である．よって，Theorem 2.2 が $X = W_g^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ という設定に適用できて，定理の主張が従う． □

凸性が下半連続性に必要な条件でもあるかについて考える．

Proposition 2.8. 積分型汎関数 $\mathscr{F} : W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}, p \in [1,\infty)$, の被積分関数 $f : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ が連続で，x に陽に依存しないとする．このとき，$\mathscr{F}$ が $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ で弱下半連続で，$m = 1$（スカラー値のケース）または $d = 1$（*1* 次元のケース）ならば，f は凸関数である．

Proof. スカラー値関数（$m = 1$）の場合のみ証明する．任意の $a, b \in \mathbb{R}^d$，$a \ne b$ と $\theta \in (0,1)$ をとったら，

$$f(\theta a + (1-\theta)b) \le \theta f(a) + (1-\theta) f(b) \tag{2.25}$$

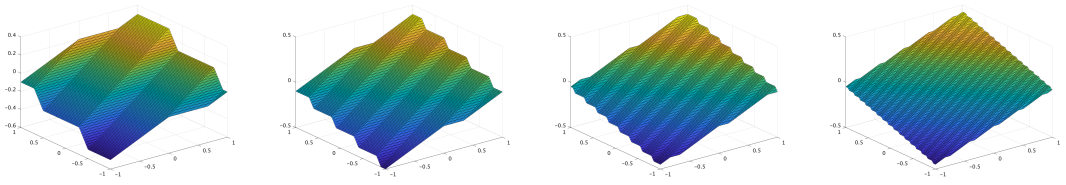
が成立することを示したい．式を短くするため $v := \theta a + (1-\theta)b$ とおいて，次の関数を定義する：

$$u_j(x) := v \cdot x + \frac{1}{j}\varphi_0(jx\cdot(b-a) - \lfloor jx\cdot(b-a)\rfloor), \quad x \in \Omega. \tag{2.26}$$

ここで，$\lfloor\cdot\rfloor$ は床関数 $\lfloor s\rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le s\}$ で，

$$\varphi_0(t) := \begin{cases} -(1-\theta)t & \text{if } t \in [0,\theta) \\ \theta t - \theta & \text{if } t \in [\theta,1) \end{cases} \tag{2.27}$$

である．



$d = 2$, $a = (0,1)$, $b = (0.3,0)$, $\theta = 0.2$ と $j = 1,2,4,8$ のときの u_j のグラフ

$$\nabla u_j(x) = \begin{cases} \theta a + (1-\theta)b - (1-\theta)(b-a) = a & \text{if } jx\cdot(b-a) - \lfloor jx\cdot(b-a)\rfloor \in [0,\theta) \\ \theta a + (1-\theta)b + \theta(b-a) = b & \text{if } jx\cdot(b-a) - \lfloor jx\cdot(b-a)\rfloor \in [\theta,1) \end{cases} \tag{2.28}$$

が成り立つので，$\{u_j\} \subset W^{1,\infty}(\Omega)$．また，$u_j$ の定義 (2.26) の第 2 項が $j \to 0$ のとき 0 関数に一様収束するので，$W^{1,p}$ において $u_j \rightharpoonup v\cdot x$（弱収束）．

> これはレポート課題の中身．

弱下半連続性を用いると，

$$|\Omega| f(v) = \mathscr{F}[v\cdot x] \le \liminf_{j\to\infty} \mathscr{F}[u_j] = |\Omega|\cdot(\theta f(a) + (1-\theta) f(b)) \tag{2.29}$$

のように (2.25) を得る． □

> $d=1$ のとき，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^m$, $\omega = \theta\alpha + (1-\theta)\beta$ に対して，
>
> $$u_j(x) = \omega x + \frac{1}{j}\phi_0(jx(\beta-\alpha) - \lfloor jx(\beta-\alpha)\rfloor)$$
>
> とすることで，同様に示すことができる．

あとで例を挙げるが，多次元のベクトル値関数の場合，勾配変数に関する凸性は弱下半連続性には必要ない．

最後に minimizer の一意性に関する結果を紹介する．

Proposition 2.9. $\mathscr{F} : W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$, $p \in [1,\infty)$ に対応する $f : \Omega \times \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ はカラテオドリの条件を満たし，狭義凸であるとする．すなわち，

$$f(x, \theta A + (1-\theta)B) < \theta f(x,A) + (1-\theta) f(x,B) \quad \forall x \in \Omega,\ A, B \in \mathbb{R}^{m\times d},\ A \neq B,\ \theta \in (0,1), \tag{2.30}$$

このとき，$\mathscr{F}$ の最小化関数 $u_* \in W_g^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$（$g \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega;\mathbb{R}^m)$）が存在すれば，一意である．

Proof. $\mathscr{F}$ の二つの異なる minimizers $u, v \in W_g^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ があるとして，

$$w := \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \in W_g^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \tag{2.31}$$

とおく．

$$\mathscr{F}[w] = \int_\Omega f\left(x, \frac{1}{2}\nabla u(x) + \frac{1}{2}\nabla v(x)\right)\,\mathrm{d}x < \frac{1}{2}\mathscr{F}[u] + \frac{1}{2}\mathscr{F}[v] = \min_{W_g^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)} \mathscr{F} \tag{2.32}$$

より矛盾となる． □

Remark 2.10. u にも依存する汎関数

$$\mathscr{F}[u] := \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\,\mathrm{d}x \tag{2.33}$$

の場合，上の弱下半連続性の証明はそのままうまくいかない．なぜなら，u についても凸であっても，

$$\int_\Omega f\left(x, \sum_{n=j}^{N(j)} \theta_n^{(j)} u_n(x), \sum_{n=j}^{N(j)} \theta_n^{(j)} \nabla u_n(x)\right)\,\mathrm{d}x \tag{2.34}$$

のなかから θ たちを取り出すことができない．
しかし，以下の仮定を満たす汎関数 (2.33) が $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ で弱下半連続であることは別の方法で示すことができる：

(i) $f:\Omega\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d}\to[0,\infty)$, $p\in(1,\infty)$

(ii) $x\mapsto f(x,v,A)$ はすべての固定した $(v,A)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d}$ に対してルベーグ可測である

(iii) $(v,A)\mapsto f(x,v,A)$ はほとんどすべての固定した $x\in\Omega$ に対して連続である

(iv) $f(x,v,\cdot)$ はすべての $(x,v)\in\Omega\times\mathbb{R}^m$ に対して凸である

Remark 2.11. 歴史期的には，C^2-級関数における最小化が最初に研究されていた．数学的には，汎関数が定義される限り，どのような空間においても最小化を考えることができるが，現象のモデルとなる最小化問題では，その現象で解として実現可能なすべての関数を含む空間を考えるのが妥当である．そのとき，より広い空間（例えばソボレフ空間 $W^{1,p}$）における下限と，より狭い空間（例えば C^2-級関数）における下限が一致するかという問題が現れる．正確に書くと，X が Y において稠密になるような線形（またはアフィン）空間 X,Y と汎関数 $\mathscr{F}:Y\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ が与えられたとき，

$$\inf_X \mathscr{F}=\inf_Y \mathscr{F} \tag{2.35}$$

が成り立つかという疑問である．下限が一致したとしても，それが両方の空間で実現されることは期待できない．ただし，正則性理論を用いて Y で実現される最小値が X に属することが証明できる場合もある．

$X=C^\infty$，$Y=W^{1,p}$ という具体的な設定では，適切な増加の条件を課せば，下限が一致することが知られている．正確には，$f:\Omega\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d}\to\mathbb{R}$ がカラテオドリの条件と p-増加条件

$$|f(x,v,A)|\le M\left(1+|v|^p+|A|^p\right),\quad (x,v,A)\in\Omega\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d} \tag{2.36}$$

を満たすならば（ここで，$M>0,p\in[1,\infty)$），汎関数 $\mathscr{F}[u]:=\int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))\mathrm{d}x,\quad u\in\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ は強連続である．よって，

$$\inf_{C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)}\mathscr{F}=\inf_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)}\mathscr{F}. \tag{2.37}$$

境界条件 g があっても，同じことが言える．

しかし，p-増加条件が成り立たなければ，下限が異なるケースもある．このことを最初に指摘したのは *Mikhail Lavrentiev (1926)* で，$X=W^{1,\infty}(0,1)$, $Y=W^{1,1}(0,1)$ の設定での *Manià* による例（*1934*）が有名である．また，*Ball & Mizel*（*1985*）の例では，$X=W^{1,\infty}(-1,1)$, $Y=W^{1,2}(-1,1)$ という設定で，Y において強圧な汎関数を考案している．

この *Lavrentiev gap* 現象は実際の（弾性体理論などの）問題を数値計算する上で障害となる．通常の区分的にアフィンな近似では $W^{1,\infty}$ での最小値を捕まえることができても，$W^{1,p}$ では捕まえることができないからである．

Example 2.12. 電磁気学の例で見た *Dirichlet* 汎関数（$\rho\in L^2(\Omega)$ による線形項つき）

$$\mathscr{F}[u]=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2-\rho(x)\cdot u(x)\right)\mathrm{d}x,\qquad u\in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^m) \tag{2.38}$$

を指定された境界値 $g\in W^{1/2,2}(\partial\Omega;\mathbb{R}^m)$ の下で最小化する問題では，$f(x,u,A)=\frac{1}{2}|A|^2+\rho(x)\cdot u$ である．$\rho\equiv 0$ ならば，*Theorem 2.7* と *Proposition 2.9* の仮定を満たすことが明らかなので，任意の $g\in W^{1/2,2}(\partial\Omega;\mathbb{R}^m)$ に対してただ一つの *minimizer* が存在することがわかる．

一方で，一般の $\rho\in L^2(\Omega)$ の場合，$f(x,u,A)$ が固定した (x,u) に対して凸であるから，*Remark 2.10* より弱下半連続性が従う．もしくは，*Theorem 2.6* を $\int_\Omega\rho\cdot u$ が u について弱連続である事実と合わせることで示すことができる．よって，*minimizer* の存在を言うには，$p=2$-強圧条件を確かめればよい．u へ

の直接の依存もあるので，(2.14) を示すことができないが，*Proposition 2.5* の証明を振り返れば，次の評価を得ることができれば十分であることがわかる：

$$\mathscr{F}[u] \geq \mu\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - C \qquad \forall u \in W_g^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^m). \tag{2.39}$$

定数 $C \in \mathbb{R}$ を引いてもよいのは，$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ の有界性に影響しないからである（もしくは，汎関数の被積分関数（と境界値）に $C/|\Omega|$ を足して，$C = 0$ の場合に帰着できる）．ポアンカレ不等式を用いて，

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[u] &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - \rho(x)\cdot u(x)\right)\,\mathrm{d}x \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\rho\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\rho\|_{L^2(\Omega)}\left(\|u-g\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\rho\|_{L^2(\Omega)}\left(C_P\|\nabla(u-g)\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\rho\|_{L^2(\Omega)}\left(C_P(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}) + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - C_P\|\rho\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} - (C_P+1)\|\rho\|_{L^2(\Omega)}\|g\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{4}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - C_P^2\|\rho\|_{L^2(\Omega)}^2 - (C_P+1)\|\rho\|_{L^2(\Omega)}\|g\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\
&= \frac{1}{4}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - C_P^2\|\rho\|_{L^2(\Omega)}^2 - (C_P+1)\|\rho\|_{L^2(\Omega)}\|g\|_{W^{1,2}(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

最後の評価では，ヤングの不等式 $ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon}b^2$ を使った．弱下半連続性と弱強圧性が揃ったので，*minimizer* が存在することが言えた．

Example 2.13. 線形弾性論に現れる汎関数

$$\mathscr{F}[u] = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(2\mu|\mathscr{E}u|^2 + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right)|\operatorname{tr}\mathscr{E}u|^2 - b\cdot u\right)\,\mathrm{d}x, \qquad u \in W_g^{1,2}\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right) \tag{2.41}$$

について考える．ただし，$\mu, \kappa > 0$, $b \in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$, $g \in W^{1/2,2}\left(\partial\Omega;\mathbb{R}^3\right)$, $\mathscr{E}u = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ である．計算を簡単にするため，$\kappa - 2\mu/3 \geq 0$ そして $g \equiv 0$ を仮定する．

▌ $\kappa - 2\mu/3 < 0$ の場合

まず，次を示す：

$$\|\nabla u\|_{L^2} \leq \sqrt{2}\|\mathscr{E}u\|_{L^2} \qquad \forall u \in W_0^{1,2}\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right). \tag{2.42}$$

これを $u \in C_0^\infty\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$ に対して示せたら，$u \in W_0^{1,2}\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$ に対する不等式は $u \in C_0^\infty\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$ の $W_0^{1,2}\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$ での稠密性より従う．

▌ $W_0^{1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$ は $C_0^\infty\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$ の $W^{1,p}$-ノルム位相による閉包である．

$u \in C_0^\infty\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$ のとき，

$$2(\mathscr{E}u : \mathscr{E}u) - \nabla u : \nabla u = \operatorname{div}[(\nabla u)u - (\operatorname{div} u)u] + (\operatorname{div} u)^2 \tag{2.43}$$

よって，発散定理より，

$$\begin{aligned}
2\|\mathscr{E}u\|_{L^2}^2 - \|\nabla u\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega \operatorname{div}[(\nabla u)u - (\operatorname{div} u)u]\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\operatorname{div} u)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega (\operatorname{div} u)^2\,\mathrm{d}x \\
&\geq 0,
\end{aligned} \tag{2.44}$$

評価 (2.42) が得られた．次に，ヤングの不等式 $\|b\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{2\delta}\|b\|_{L^2}^2 + \frac{\delta}{2}\|u\|_{L^2}^2, \delta > 0$ とポアンカレ不等式 $\|u\|_{L^2} \leq C_P\|\nabla u\|_{L^2}\ \forall u \in W_0^{1,2}$ を用いて，

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[u] &\geq \mu\|\mathscr{E}u\|_{L^2}^2 - \|b\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \\ &\geq \mu\|\mathscr{E}u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2\delta}\|b\|_{L^2}^2 - \frac{\delta}{2}\|u\|_{L^2}^2 \\ &\geq \frac{\mu}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2\delta}\|b\|_{L^2}^2 - \frac{C_P^2\delta}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{2.45}$$

を得るが，$\delta = \mu/\left(2C_P^2\right)$ と選ぶと，強圧性の評価

$$\mathscr{F}[u] \geq \frac{\mu}{4}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{C_P^2}{\mu}\|b\|_{L^2}^2 \tag{2.46}$$

にたどり着く．ポアンカレ不等式をもう一度使うと，

$$\mathscr{F}[u] \geq \frac{\mu}{4(1+C_P^2)}\|\nabla u\|_{W^{1,2}}^2 - \frac{C_P^2}{\mu}\|b\|_{L^2}^2. \tag{2.47}$$

したがって，汎関数 $\mathscr{F}$ は弱強圧である．
あとは，被積分関数で x, u の変数をとめることで得られる，$\varphi(A) = \frac{\mu}{2}|A + A^T|^2 + (\kappa - \frac{2}{3}\mu)|\operatorname{tr} A|^2$ という関数が凸であるかを見ればよい．しかし，これは凸性の定義 $\varphi(\theta A + (1-\theta)B) \leq \theta\varphi(A) + (1-\theta)\varphi(B)\ \forall\theta \in (0,1), \forall A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ より明らかである．よって，*Remark 2.10* より，汎関数 $\mathscr{F}$ は弱下半連続である．一方，$\int_\Omega b \cdot u\, dx$ の項は u について線形で，$W^{1,2}$ で弱連続であることがすぐにわかるので，*Tonelli-Serrin* の定理 *2.6* を使うだけでも弱下半連続性が言える．
結論として，線形弾性の問題に解 $u_* \in W_0^{1,2}\left(\Omega; \mathbb{R}^3\right)$ があることが示された．より詳しいことは *[2]* の *6.2, 6.3* 節を参照されたい．

3 Euler-Lagrange 方程式

Definition 3.1. 極限

$$\delta\mathscr{F}[u][\psi] := \lim_{h\downarrow 0} \frac{\mathscr{F}[u+h\psi]-\mathscr{F}[u]}{h}, \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m) \tag{3.1}$$

が存在するならば，線形写像 $\delta\mathscr{F}[u] : C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ は $\mathscr{F}$ の $u \in W_g^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ における **第一変分** と呼ばれる．

第一変分が存在し，$u_* \in W_g^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ が minimizer ならば，$\delta\mathscr{F}[u_*]=0$ が成り立つ．これは，$\mathscr{F}[u_*+h\psi] \geq \mathscr{F}[u_*]$ と $\mathscr{F}[u_*-h\psi] \geq \mathscr{F}[u_*]$ $\forall h>0\,\forall\psi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ より従う．この条件よりオイラー・ラグランジュ方程式という偏微分方程式が得られる場合がある．u_* がこのオイラー・ラグランジュ方程式の解であることは u_* が minimizer であるための必要条件に過ぎないが，$\mathscr{F}$ が凸ならば，十分条件にもなる．したがって，少なくとも凸な問題では，Euler-Lagrange 方程式を解くことで実際に minimizer を求めることができる．

Definition 3.2. 被積分関数 $f(x,v,A)$ の方向微分を次のように定義する：

$$\text{v における方向 w での微分：} \qquad f'_v(x,v,A)[w] = \lim_{h\downarrow 0}\frac{f(x,v+hw,A)-f(x,v,A)}{h}, \quad v,w\in\mathbb{R}^m \tag{3.2}$$

$$\text{A における方向 B での微分：} \qquad f'_A(x,v,A)[B] = \lim_{h\downarrow 0}\frac{f(x,v,A+hB)-f(x,v,A)}{h}, \quad A,B\in\mathbb{R}^{m\times d}$$

f が A について微分可能であるとは，上の二つ目の極限がすべての B に対して存在し，B の関数として見ると，線形関数であることを意味する．このとき，方向微分を f の A についての微分 $\mathrm{D}_A f$ と方向 B のフロベニウス積として書くことができる：

$$f'_A(x,v,A)[B] = \mathrm{D}_A(x,v,A) : B, \qquad \mathrm{D}_A f(x,v,A) := \left(\partial_{A_k^j} f(x,v,A)\right)_k^j. \tag{3.3}$$

v についての微分も同様である．

> 二つの行列 $A,B\in\mathbb{R}^{m\times d}$ のフロベニウス積：
>
> $$A:B = \mathrm{tr}(A^TB) = \mathrm{tr}(AB^T) = \sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^d A_k^jB_k^j.$$

Theorem 3.3. カラテオドリの条件を満たす $f:\Omega\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d}\to\mathbb{R}$ が第 *2*，第 *3* 変数について連続微分可能で，ある定数 $C>0$ と $p\in[1,\infty)$ に対して増加条件

$$|\mathrm{D}_v f(x,v,A)|, |\mathrm{D}_A f(x,v,A)| \leq C\left(1+|v|^p+|A|^p\right), \quad (x,v,A)\in\Omega\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d} \tag{3.4}$$

を満たすとする．関数 $u_*\in W_g^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$（ただし，$g\in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega;\mathbb{R}^m)$）が汎関数

$$\mathscr{F}[u] := \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))\mathrm{d}x, \quad u\in \mathrm{W}_g^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \tag{3.5}$$

の最小値を与えるならば，u_* は以下の *Euler-Lagrange* 方程式の弱解である：

$$-\mathrm{div}\left[\mathrm{D}_A f(x,u,\nabla u)\right] + \mathrm{D}_v f(x,u,\nabla u) = 0 \quad \textit{in } \Omega. \tag{3.6}$$

ここで，$u_* \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ が弱解であるとは，次の式を満たすということである：

$$\int_\Omega \left(\mathrm{D}_A f(x,u_*,\nabla u_*) : \nabla\psi + \mathrm{D}_v f(x,u_*,\nabla u_*)\cdot\psi\right)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\psi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m). \tag{3.7}$$

ただし，変数 x を適宜，省略している．

Proof. 任意の $\psi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ と任意の $h>0$ に対して $u_* + h\psi \in W_g^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ は許容関数だから，最小値の性質より

$$\mathscr{F}[u_*] \le \mathscr{F}[u_* + h\psi]. \tag{3.8}$$

よって，

$$\begin{aligned} 0 &\le \int_\Omega \frac{f(x,u_*+h\psi,\nabla u_*+h\nabla\psi) - f(x,u_*,\nabla u_*)}{h}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega\int_0^1 \frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x,u_*+th\psi,\nabla u_*+th\nabla\psi)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega\int_0^1 \left(\mathrm{D}_A f(x,u_*+th\psi,\nabla u_*+th\nabla\psi) : \nabla\psi + \mathrm{D}_v f(x,u_*+th\psi,\nabla u_*+th\nabla\psi)\cdot\psi\right)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.9}$$

増加条件 (3.4) より，$h<1$ とすれば，被積分関数は $C(1+|u_*|^p+|\psi|^p+|\nabla u_*|^p+|\nabla\psi|^p)$ で h について一様に抑えられるので，ルベーグの優収束定理を用いて上の不等式において，$h\downarrow 0$ の極限と積分が交換でき，

$$0 \le \int_\Omega \left(\mathrm{D}_A f(x,u_*,\nabla u_*) : \nabla\psi + \mathrm{D}_v f(x,u_*,\nabla u_*)\cdot\psi\right)\,\mathrm{d}x \tag{3.10}$$

が得られる．ψ の代わりに $-\psi$ を使うと，逆の不等式も得られる． □

Remark 3.4. *Euler-Lagrange* 方程式は m 個の方程式からなる偏微分方程式系である．トレースの意味で成り立つ境界条件 $u = g$ *on* $\partial\Omega$ を追加することにより，偏微分方程式系に対する境界値問題となる．

Corollary 3.5. より強い増加条件

$$|\mathrm{D}_v f(x,v,A)|, |\mathrm{D}_A f(x,v,A)| \le C\left(1+|v|^{p-1}+|A|^{p-1}\right) \tag{3.11}$$

を仮定すれば，(3.7) の弱い式は任意の $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ に対しても成り立つ．

Proof. ヘルダー不等式 $\|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^{p/(p-1)}}\|g\|_{L^p}$ より

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\mathrm{D}_A f : \nabla\psi|\,\mathrm{d}x &\le C\int_\Omega \left(1+|u|^{p-1}+|\nabla u|^{p-1}\right)|\nabla\psi|\,\mathrm{d}x \\ &\le C\left(|\Omega|^{1-1/p} + \||u|^{p-1}\|_{L^{p/(p-1)}} + \|\nabla u|^{p-1}\|_{L^{p/(p-1)}}\right)\|\nabla\psi\|_{L^p} \\ &= C\left(|\Omega|^{1-1/p} + \|u\|_{L^p}^{p-1} + \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1}\right)\|\nabla\psi\|_{L^p}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

$\mathrm{D}_v f\cdot\psi$ の項も同様に評価できるので，(3.11) の仮定の下で (3.7) の積分が定義され，有界である．
(3.7) が $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ に対して成り立つことは，$C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ の $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ における稠密性より従う．実際，(3.7) と (3.11) を考慮すると，

$$\langle T,\psi\rangle = \int_\Omega \left(\mathrm{D}_A f(x,u_*,\nabla u_*) : \nabla\psi + \mathrm{D}_v f(x,u_*,\nabla u_*)\cdot\psi\right)\,\mathrm{d}x \tag{3.13}$$

により定義される線形汎関数 $T \in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)^*$ は次を満たす：

$$\langle T,\psi\rangle = 0 \quad \forall\psi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m). \tag{3.14}$$

さらに，ヘルダー不等式を用いた以下の評価より，T は $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ において連続である：

$$|\langle T,\psi\rangle| \le C\int_\Omega \left(1+|u_*|^{p-1}+|\nabla u_*|^{p-1}\right)(|\psi|+|\nabla\psi|)\,\mathrm{d}x \le C\left(1+\|u_*\|_{L^p}^{p-1}+\|\nabla u_*\|_{L^p}^{p-1}\right)\|\psi\|_{W^{1,p}}. \tag{3.15}$$

したがって，$\psi\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ をとってきたとき，$W^{1,p}$ において $\psi_j\to\psi$ なる列 $\{\psi_j\}\subset C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ が存在し，T の連続性より，

$$\langle T,\psi\rangle = \lim_{j\to\infty}\langle T,\psi_j\rangle = 0. \tag{3.16}$$

これは，(3.7) が $\psi\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ に対して成り立つことを意味する． □

第一変分がゼロという条件とそこから従うオイラー・ラグランジュ方程式を満たす関数は極値関数（critical point）と言う．しかし，極値関数は汎関数の最大値や鞍点を与える場合もある，つまり，オイラー・ラグランジュ方程式は最小値のための十分条件ではない．一方で，凸性の仮定を追加すれば，オイラー・ラグランジュ方程式の解は必然的に最小化関数となる．

Proposition 3.6. *Theorem 3.3* の仮定の下，さらに強化した増加条件 (3.11) が満たされるとともに，$(v,A)\mapsto f(x,v,A)$ がすべての $x\in\Omega$ に対して凸であると追加で仮定する．$u_*\in W_g^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ が (3.7) の解ならば，u_* は $\mathscr{F}$ の *minimizer* である．

Proof. $v\in W_g^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ を一つとり，$\psi := v-u_*\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ に対して，

$$g(t) := \mathscr{F}[u_*+t\psi],\quad t\in\mathbb{R} \tag{3.17}$$

という関数を考える．$\mathscr{F}$ が凸なので，g も凸である．また，Theorem 3.3 と Corollary 3.5 の証明と同様にして g が微分可能であることが示せる．u_* が Euler-Lagrange 方程式の解だから，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t)\bigg|_{t=0} = 0. \tag{3.18}$$

したがって，g の凸性も考慮すると，

$$g(t)\ge g(0)+tg'(0) = g(0) = \mathscr{F}[u_*],\quad t\ge 0. \tag{3.19}$$

ここで，$t=1$ と置くと，$\mathscr{F}[v]\ge\mathscr{F}[u_*]$ を得る．$v\in W_g^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ が任意だったので，u_* は minimizer である． □

Example 3.7. 電磁気学の問題で現れた *Dirichlet* 汎関数 $\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x$ に対するオイラー・ラグランジュ方程式はラプラス方程式

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{3.20}$$

である．ここで，

$$\Delta u = \operatorname{div}\nabla u = \partial_1^2 u+\cdots+\partial_d^2 u \tag{3.21}$$

はラプラス作用素である．(3.20) の解は調和写像と呼ばれ，正則性理論より C^∞-級であることがわかるので，弱い解と強い解の区別がない．*Dirichlet* 汎関数は凸だから，ラプラス方程式の解は必ず *Dirichlet* 汎関数の *minimizer* である（*Proposition 3.6*）．さらに，狭義凸でもあるので，*Proposition 2.9* より解（*minimizer*）がただ一つ存在することが言える．

$\rho\in L^2(\Omega;\mathbb{R}^m)$ を含む汎関数

$$\mathscr{F}[u] = \int_\Omega\left(\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2-\rho(x)\cdot u(x)\right)\,\mathrm{d}x,\quad u\in \mathrm{W}^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^m) \tag{3.22}$$

についても同じことが言えて，*Euler-Lagrange* 方程式は次のポアソン方程式である：

$$-\Delta u = \rho \quad \text{in } \Omega. \tag{3.23}$$

Example 3.8. 線形化弾性理論のオイラー・ラグランジュ方程式に対する境界値問題は次のようになる：

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left[2\mu\mathscr{E}u + \left(\kappa - \dfrac{2}{3}\mu\right)(\operatorname{tr}\mathscr{E}u)\operatorname{Id}\right] = b & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.24}$$

最後に，オイラー・ラグランジュ方程式の弱解 $u \in W_g^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$

$$\int_\Omega \left(\mathrm{D}_A f\left(x,u,\nabla u\right) : \nabla\psi + \mathrm{D}_v f\left(x,u,\nabla u\right)\cdot\psi\right)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\psi \in C_0^\infty\left(\Omega;\mathbb{R}^m\right) \tag{3.25}$$

と強い解 $u \in W_g^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$

$$-\operatorname{div}\left[\mathrm{D}_A f(x,u(x),\nabla u(x))\right] + \mathrm{D}_v f(x,u(x),\nabla u(x)) = 0 \quad \text{for a.e. } x \in \Omega \tag{3.26}$$

の関係について考える．

強い方程式 (3.26) に試験関数 $\psi \in C_0^\infty\left(\Omega;\mathbb{R}^m\right)$ をかけて，Ω で積分し，ガウスの発散定理を用いれば，(3.26) を満たす関数 u は (3.25) も満たすことがわかる．この逆は u が十分に正則ならば成り立つ．

Proposition 3.9. 被積分関数 f が *2* 階連続微分可能で，$u \in W^{2,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^m\right)$ がオイラー・ラグランジュ方程式 (3.25) の弱解ならば，u はオイラー・ラグランジュ方程式の強い解である（すなわち，(3.26) を満たす）．

Proof. $u \in W^{2,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^m\right)$ が弱解ならば，(3.25) でガウスの発散定理が適用できて，

$$\int_\Omega \left(-\operatorname{div}\left[\mathrm{D}_A f(x,u,\nabla u)\right] + \mathrm{D}_v f(x,u,\nabla u)\right)\cdot\psi\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\psi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m) \tag{3.27}$$

を得る．以下の変分法の基本補題を用いれば，証明が完了する． □

Lemma 3.10. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を開集合とする．関数 $g \in L^1(\Omega)$ が

$$\int_\Omega g\psi\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\psi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{3.28}$$

を満たすならば，$g = 0$ *a.e.*

Proof. 任意の有界集合に対して示せば十分なので，Ω を有界集合としてよい．また，g を Ω から $\mathbb{R}^d$ 全体にゼロで拡張しておく．$\varepsilon > 0$ を任意にとって，$\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon$ を示せばよい．軟化子の族 $\{\eta_\delta\}_{\delta>0}$ による軟化 $\eta_\delta \star g$ を用いれば，次を満たす関数 $h \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ を見つけることができる：

$$\|g - h\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \le \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.29}$$

> 球対称な正の関数 $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して，軟化子の族 $\{\eta_\delta\}_{\delta>0}$ を次で定義する：
>
> $$\eta_\delta(x) := \frac{1}{\delta^d}\eta\left(\frac{x}{\delta^d}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$
>
> このとき，$u \in L^p(\mathbb{R}^d)$（$p \in [1,\infty)$）の軟化は
>
> $$u_\delta(x) := \left(\eta_\delta \star u\right)(x) := \int \eta_\delta(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^d$$
>
> で定義され，
>
> $$u_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \qquad u_\delta \to u \quad \text{in } L^p(\Omega),\ \delta \downarrow 0$$
>
> を満たす．

$h(x) \neq 0$ なる x に対して $\phi(x) = h(x)/|h(x)|$ とし，$h(x) = 0$ なる x に対して，$\phi(x) = 0$ とすると，$h\phi = |h|$ が成り立つ．このとき，$\delta > 0$ を十分小さくとれば，$\psi = \eta_\delta \star \phi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ が

$$\|\phi - \psi\|_{L^1} \leq \frac{\varepsilon}{2\left(1 + \|h\|_\infty\right)} \tag{3.30}$$

を満たすようにできる．補題の仮定と $|\psi| \leq 1$ を用いると，

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^1} &\leq \|g - h\|_{L^1} + \int |h| \, \mathrm{d}x \\
&= \|g - h\|_{L^1} + \int h\phi \, \mathrm{d}x \\
&= \|g - h\|_{L^1} + \int \left(h(\phi - \psi) + (h - g)\psi + g\psi\right) \, \mathrm{d}x \\
&\leq 2\|g - h\|_{L^1} + \|h\|_\infty \cdot \|\phi - \psi\|_{L^1} + 0 \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.31}$$

がわかる．極限 $\varepsilon \downarrow 0$ をとれば，補題が示された． □

Remark 3.11. *1900* 年にヒルベルトが提示した *23* 問題のうち，*19* 番目の問題は「正則な汎関数の極値は解析的なのか？」というものである．この問題は *Ennio de Giorgi* と *John F. Nash* を中心に解決された．ここで，汎関数

$$\mathscr{F}[u] := \int_\Omega f(\nabla u(x))\ \mathrm{d}x, \quad u \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^m) \tag{3.32}$$

が正則であるというのは，$f : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ が *2* 階微分可能で，定数 $\mu, M > 0$ が存在し，

$$\mu|B|^2 \le \left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f(A+tB)\right|_{t=0} \le M|B|^2, \quad A, B \in \mathbb{R}^{m\times d} \tag{3.33}$$

が成り立つという意味である．正則な汎関数は凸である．

- 正則な汎関数 $\mathscr{F}$ の *minimizer* $u_* \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ は $u_* \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ を満たす．よって，*Euler-Lagrange* 方程式 $-\operatorname{div} \mathrm{D}f(\nabla u_*) = 0$ は強い意味で成り立つ．証明は差分商 $D^h_k u(x) = \frac{u(x+he_k)-u(x)}{h}$ を用いる．Ω の境界が十分滑らかならば，この正則性を境界まで延長できる．

- f が $A = \nabla u$ の *2* 次関数のとき，*Euler-Lagrange* 方程式は線形で，それを偏微分し，上のアプローチを繰り返し適用することで，$u_* \in W^{k,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ が任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して成り立つことが示せる．つまり，$u_* \in C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$.

- 例えば，$\int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - h\cdot u)\ \mathrm{d}x$（ただし，$h \in C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$）や線形化弾性の問題の *minimizer* は C^∞ である．

- 一般の汎関数の場合，*Euler-Lagrange* 方程式が非線形になり，上のトリックが使えない．このとき，*De Giorgi – Nash – Moser* 理論により，$m = 1$（スカラー関数）のときに正則性の問題が解決されている．

  - *(Schauder, 1934-7)* $S(x)$ が $\mu|v|^2 \le v^T S(x) v \le M|v|^2\ \forall (x,v) \in \Omega\times\mathbb{R}^d$ を満たし，$S \in C^{n-1,\alpha}$ ならば，$-\operatorname{div}(S\nabla u) = 0$ の弱解は $C^{n,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に属する．($m > 1$ でも成り立つ)
  - *(de Giorgi, 1957)* $S(x)$ が $\mu|v|^2 \le v^T S(x) v \le M|v|^2\ \forall (x,v) \in \Omega\times\mathbb{R}^d$ を満たすならば，$-\operatorname{div}(S\nabla u) = 0$ の弱解は $C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に属する．($m > 1$ では成り立たない)

  この二つを合わせることにより，f が滑らかならば，$u_* \in C^\infty(\Omega)$ は証明された．

- $m > 1$（ベクトル値関数）のとき，*De Giorgi* の正則性定理が成り立たないことを示す反例がある．$d = 2$ のとき，*Morrey (1938)* によって正則性が成立することが示されているが，$d \ge 3$ では様々な反例が見つかっている：

  - *(Šverák & Yan, 2000-02)* $d \ge 3, m \ge 5$ または $d \ge 4, m \ge 3$：*minimizer* はリプシッツ連続ではない
  - *(Šverák & Yan, 2000-02)* $d \ge 5, m \ge 14$：*minimizer* は有界ではない
  - *(Mooney & Savin, 2016)* $d \ge 3, m \ge 2$：*minimizer* はリプシッツ連続ではない

4 Young 測度

まず，Young 測度の導入のモチベーションとなる大雑把な話をする．汎関数

$$\mathscr{F}[u] = \int_\Omega f(x, \nabla u(x))\ \mathrm{d}x, \qquad u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$$

が与えられていて，そして，勾配 $v_j := \nabla u_j$ が $L^2(\Omega;\mathbb{R}^m)$ で v に弱収束するような関数列 $\{u_j\}$ が与えられたとする．簡単のために，$f : \Omega \times \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ が連続で有界とする．このとき，$\{\mathscr{F}[u_j]\}$ は有界となり，部分列を取ればある実数に収束すると言える．しかし，この極限は f に依存するので，f が具体的に与えられないと計算できない．そこで，任意の f に対して，この極限を特定する方法がないかを考える．

被積分関数 $f(x, v_j(x))$ の $L^\infty(\Omega)$ での weak*極限を考えることもできる（Banach-Alaoglu の定理）．当然，この極限が $f(x, v(x))$ になるとは限らない．例えば，1 次元の $\Omega = (0,1)$ において，$a, b \in \mathbb{R}$, $\theta \in (0,1)$ に対して次の関数

$$v_j(x) := \begin{cases} a & \text{if } jx - \lfloor jx \rfloor \in [0, \theta), \\ b & \text{if } jx - \lfloor jx \rfloor \in [\theta, 1), \end{cases} \qquad x \in (0,1)\ . \tag{4.1}$$

をとると，$v_j(x) \rightharpoonup^* v = \theta a + (1-\theta)b$ が成り立つ（レポート）．

> $$\int_\Omega g(v_j - v)\ \mathrm{d}x \to 0 \qquad \forall g \in L^1(\Omega)$$
>
> を示せばよい．

ここで，$f(x,a) = \alpha$, $f(x,b) = \beta$ を満たす関数 f を選ぶと，

$$f(x, v_j(x)) = \begin{cases} \alpha & \text{if } jx - \lfloor jx \rfloor \in [0, \theta), \\ \beta & \text{if } jx - \lfloor jx \rfloor \in [\theta, 1), \end{cases} \qquad x \in (0,1)\ . \tag{4.2}$$

となり，

$$f(x, v_j(x)) \rightharpoonup^* \theta\alpha + (1-\theta)\beta \neq f(x, v) = f(x, \theta a + (1-\theta)b) \tag{4.3}$$

のように，$f(x, v_j(x)) \rightharpoonup^* f(x, v(x))$ は（よほど運がよくなければ）成立しない．一方で，次のことが正しい：

$$f(x, v_j(x)) \rightharpoonup^* \int f(x, v)\ \mathrm{d}\nu_x(v), \qquad \nu_x = \theta\delta_a + (1-\theta)\delta_b,\ \ x \in (0,1). \tag{4.4}$$

（任意の適切な f に対しても正しいことを後で示す.）ここで，$\nu_x \in \mathscr{M}^1(\mathbb{R})$ は x でパラメータ付けされた確率測度の族である．この測度族 $\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ は Young 測度と呼ばれ，$\{v_j\}$ の関数列の値の漸近的な分布を表す．

Young 測度を例えば次のように使うことができる：Young 測度の良いコンパクト性質を利用して，偏微分方程式の非線型項で極限をとってから，極限で得られる Young 測度が実は点質量で関数に対応することを示す．

これからの目標は，弾性問題に現れる凸でないが準凸（quasiconvex）であるような被積分関数 $f(x,\cdot)$ に対して，弱下半連続性，ひいては minimizer の存在を示すことである．非常に荒い概要は次のようである：$u_j \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ として，∇u_j が生成する Young 測度を ν_x とする．つまり，

$$f(x, \nabla u_j(x)) \rightharpoonup \int f(x, A)\ \mathrm{d}\nu_x(A) \quad \text{in } L^1.$$

Young 測度（の積分）の下半連続性（証明が必要）を用いると，

$$\liminf_{j\to\infty} \int_\Omega f(x, \nabla u_j(x))\ \mathrm{d}x \geq \int_\Omega \int f(x, A)\ \mathrm{d}\nu_x(A)\ \mathrm{d}x \geq \int_\Omega f(x, \nabla u(x))\ \mathrm{d}x$$

を得る．ただし，∇u は ν_x の重心 $[\nu_x] = \int A \, \mathrm{d}\nu_x(A)$ で，∇u_j の L^p-弱極限である．二つ目の不等式は Young 測度に対する Jensen 型不等式 $f([\nu]) \leq \int f \, \mathrm{d}\nu$ （同じく証明が必要）より従う．最初の不等式では Young 測度を用いて，汎関数の極限をとることができて，二つ目の不等式は Jensen 型の不等式である．Young 測度が両方の不等式がちょうどうまくいくような都合のよすぎるものである．

4.1 基本定理

Theorem 4.1 (L. C.Young, 1937-1942)**.** $\{V_j\} \subset L^p\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$, $p \in [1,\infty]$ をノルム有界な列とする．このとき，部分列（同じ記号 V_j を使う）と，「部分列 V_j で生成される L^p-*Young* 測度」と呼ばれる確率測度の族

$$\{\nu_x\}_{x\in\Omega} \subset \mathscr{M}^1\left(\mathbb{R}^N\right) \tag{4.5}$$

> $\mathbb{R}^N$ の全ての開集合を含む最小の σ-代数で定義される測度のことをボレル測度という．測度とは，非負の関数で，$\mu(\emptyset) = 0$, 完全加法性（*countable additivity*）$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$（$E_k$ 互いに素）を満たすもの．確率測度は区間 $[0,1]$ に値をもち，$\mu(\mathbb{R}^N) = 1$ を満たすボレル測度である．

が存在し，次のことが成り立つ：

(i) 族 $\{\nu_x\}_x$ は弱 *可測である．すなわち，任意のカラテオドリ関数 $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ に対して合成関数

$$x \mapsto \langle f(x,\cdot), \nu_x \rangle := \int f(x,A) \, \mathrm{d}\nu_x(A), \quad x \in \Omega \tag{4.6}$$

はルベーグ可測である．

(ii) $p \in [1,\infty)$ ならば，

$$\int_\Omega \int |A|^p \, \mathrm{d}\nu_x(A) \, \mathrm{d}x < \infty. \tag{4.7}$$

$p = \infty$ ならば，コンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^N$ が存在し，次が成り立つ：

$$\operatorname{supp} \nu_x \subset K \quad \textit{for a.e. } x \in \Omega. \tag{4.8}$$

(iii) 族 $\{f(x,V_j)\}_j$ が一様 L^1-有界で L^1-*equiintegrable* となるような任意のカラテオドリ関数 $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ に対して

$$f(x,V_j) \rightharpoonup \left(x \mapsto \int f(x,A) \, \mathrm{d}\nu_x(A)\right) \qquad L^1(\Omega) \text{ で弱収束.} \tag{4.9}$$

Definition 4.2. $\{f_j\}_j \subset L^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$ が L^p-*equiintegrable* であるとは，次の条件のどれかが成り立つという意味である：

(i)

$$\lim_{R\uparrow\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_{\{|f_j|>R\}} |f_j|^p \, \mathrm{d}x = 0; \tag{4.10}$$

(ii)

$$\lim_{R\uparrow\infty} \limsup_{j\to\infty} \int_{\{|f_j|>R\}} |f_j|^p \, \mathrm{d}x = 0; \tag{4.11}$$

(iii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在し，$|B| < \delta$ を満たすすべてのボレル集合 $B \subset \Omega$ に対して次が成り立つ：

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \int_B |f_j|^p \, \mathrm{d}x < \varepsilon. \tag{4.12}$$

Theorem 4.3 (Dunford–Pettis)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を有界開集合とする．ノルム有界な族 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ に対して，次の 2 条件は同値である：

(i) $\{f_j\}$ は L^1*-equiintegrable* である．

(ii) $\{f_j\}$ は $L^1(\Omega)$ で弱点列プレコンパクトである．

> L^1 は L^∞ の双対空間ではないため，L^1 での弱収束は表現しにくいが，L^1 をラドン測度の部分空間として考えることにより，次が言える：
> $\{u_n\} \subset L^1(\Omega)$ が $L^1(\Omega)$ で一様有界で L^1-equiintegrable ならば，$u_n \rightharpoonup u$ in $L^1(\Omega)$ は次と同値である：
> $$\int_\Omega u_n\varphi \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega u\varphi \,\mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in C_c(\Omega). \tag{4.13}$$
> したがって，(4.9) に $\varphi \in C_c(\Omega)$ をかけて，積分すると，φ を f に吸収できて，(4.9) と同値な次の条件を得る：
> $$\int_\Omega f\left(x, V_j(x)\right) \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega \int f(x,A) \,\mathrm{d}\nu_x(A) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \langle f(x,\cdot), \nu_x\rangle \,\mathrm{d}x =: \langle\langle f, v\rangle\rangle \tag{4.14}$$
> が族 $\left(f\left(x, V_j\right)\right)_j$ が一様 L^1-有界で equiintegrable となるようなカラテオドリ関数 $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ について成り立つ．$\langle\langle f, \nu\rangle\rangle$ を f と ν の双対積と言う．

Definition 4.4. 上の定理の条件 *(i), (ii)* を満たす測度 $\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ に対して，$\nu = \{\nu_x\}_x \in \mathbf{Y}^p\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right)$ と書く．$N = 1$ のとき，単に $\mathbf{Y}^p(\Omega)$ と書くことが多い．

> 測度 $\{\nu_x\}_x$ が *(i), (ii)* を満たすならば，それを生成する列 $\{V_j\} \subset L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ が存在することが示せる（*Dirac* 測度による近似を用いる）ので，定理の *(iii)* の条件を定義の条件に含めなくてもよい．

Young 測度 ν が $\{(V_j\}$ により生成されることを表す記号として次の記号を使う：

$$V_j \xrightarrow{\mathbf{Y}} \nu. \tag{4.15}$$

さらに，$\nu = \{\nu_x\}_x \in \mathbf{Y}^p\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right)$ の重心 $[\nu] \in L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right)$ を次で定義する：

$$[\nu](x) = [\nu_x] := \langle \mathrm{Id}, v_x\rangle = \int A \,\mathrm{d}\nu_x(A), \qquad x \in \Omega. \tag{4.16}$$

基本定理の証明は Young 測度のコンパクト性原理を述べる以下の補題に基づいている．

Lemma 4.5. $p \in [1,\infty]$ に対し，$\left\{\nu^{(j)}\right\}_j \subset \mathbf{Y}^p\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right)$ を L^p*-Young* 測度の列とする．次を仮定する：

- $p \in [1,\infty)$ のとき，
$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \langle\langle\, |\cdot|^p, \nu^{(j)}\rangle\rangle = \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_\Omega \int |A|^p \,\mathrm{d}\nu_x^{(j)}(A) \,\mathrm{d}x < \infty. \tag{4.17}$$
- $p = \infty$ のとき，コンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^N$ が存在し，
$$\operatorname{supp} \nu_x^{(j)} \subset K \quad \textit{a.e. } x \in \Omega, \ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{4.18}$$

このとき，部分列 $\{\nu_j\}$（添字を変えないことにする）と $\nu \in \mathbf{Y}^p\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right)$ が存在し，条件

(A1) 関数列 $x \mapsto \left\langle f(x,\cdot), \nu_x^{(j)}\right\rangle$ は一様 L^1-有界である

(A2) 以下の *equiintegrability* が満たされる：

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \left\langle\left\langle |f(x,A)|\mathbb{1}_{\{|f(x,A)|\geq h\}}, \nu^{(j)}\right\rangle\right\rangle \to 0 \quad \text{as } h\to\infty \tag{4.19}$$

を満たす任意のカラテオドリ関数 $f:\Omega\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ に対して次が成り立つ：

$$\langle\langle f,\nu^{(j)}\rangle\rangle \to \langle\langle f,\nu\rangle\rangle \quad \text{as } j\to\infty. \tag{4.20}$$

さらに，次が成り立つ：

- $p<\infty$ のとき，
$$\langle\langle |\cdot|^p,\nu\rangle\rangle \leq \liminf_{j\to\infty}\langle\langle |\cdot|^p,\nu^{(j)}\rangle\rangle; \tag{4.21}$$
- $p=\infty$ のとき，
$$\operatorname{supp}\nu_x\subset K \quad \text{a.e. } x\in\Omega. \tag{4.22}$$

Proof. (Theorem 4.1)
Young 測度のコンパクト性原理を Dirac 測度（点質量）

$$\nu_x^{(j)} = \delta\left[V_j\right]_x = \delta_{V_j(x)}, \quad x\in\Omega \tag{4.23}$$

に適用する．

> δ_V は $V\in\mathbb{R}^N$ での Dirac 質量で，任意のボレル集合 B に対して，$\delta_V(B)=1$ if and only if $v\in B$ で定義される．

すると，$\delta\left[V_j\right]\in\mathbf{Y}^p\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$．当然，$\delta[V_j]_x$ は $\mathscr{L}^d$-測度 0 の x の集合を除いてしか定義されない．

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\langle\langle |\cdot|^p,\nu^{(j)}\rangle\rangle = \sup_{j\in\mathbb{N}}\int_\Omega\int |A|^p \,\mathrm{d}\nu_x^{(j)}(A)\,\mathrm{d}x = \sup_{j\in\mathbb{N}}\int_\Omega |V_j(x)|^p\,\mathrm{d}x \tag{4.24}$$

であるから，(4.17) の条件は V_j が L^p で一様有界であるという仮定よりすぐに従う（$p=\infty$ も同様）．コンパクト性原理より $\nu\in\mathbf{Y}^p\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$ を得る．つまり，ν は Theorem 4.1 の (i), (ii) を満たす．

仮定 (A1), (A2) の下，この ν は $\langle\langle f,\nu^{(j)}\rangle\rangle\to\langle\langle f,\nu\rangle\rangle$ を満たす．この収束は Theorem 4.1 の収束 (4.14), すなわち (iii) の (4.9) に他ならない．一方，(A1) は Theorem 4.1 の「$f(x,V_j)$ が一様 L^1-有界」という仮定と一致し，(A2) は Theorem 4.1 の $f(x,V_j)$ の equiintegrability の仮定と一致する． □

Lemma 4.5 の証明の概要を述べてから，それぞれのステップを詳しく見よう．

> 測度：部分集合上で定義される非負の関数で，$\mu(\emptyset)=0$, 完全加法性（countable additivity）$\mu(\bigcup_{k=1}^\infty E_k)=\sum_{k=1}^\infty\mu(E_k)$（$E_k$ 互いに素）を満たすもの．
> ボレル測度：$\mathbb{R}^N$ の全ての開集合を含む最小の σ-代数で定義される測度
> 符号付ボレル測度 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^N)$：負の値もとれるボレル測度
> （有限な）正の測度 $\mathscr{M}^+(\mathbb{R}^N)$：$+\infty$ の値をとらない正のボレル測度
> 確率測度 $\mathscr{M}^1(\mathbb{R}^N)$：区間 $[0,1]$ に値をもち，$\mu(\mathbb{R}^N)=1$ を満たすボレル測度
> 局所ラドン測度 $\mathscr{M}^+_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$：コンパクト集合に制限されたとき有限な正のラドン測度となるような測度
> $\mathscr{M}^+(U)$：$\mathbb{R}^N\setminus U$ の測度がゼロであることを表す記号．

1. ラドン測度
$$\mu^{(j)} := \mathscr{L}^d_x \llcorner \Omega \otimes \nu^{(j)}_x$$
を定義して，$\{\mu^{(j)}\}$ が $C_0(\Omega \times \mathbb{R}^N)^*$ で一様有界な列であるから，Banach-Alaoglu の定理より
$$\left\langle f, \mu^{(j)} \right\rangle \to \langle f, \mu \rangle \quad \text{for all } f \in C_0\left(\Omega \times \mathbb{R}^N\right)$$
を満たす $\mu \in C_0(\Omega \times \mathbb{R}^N)^*$ が存在する．

> $C_0(U)$ は無限遠方で消える連続関数の空間である．つまり，$f \in C_0(U)$ であるのは，$\forall \varepsilon > 0$ コンパクト集合 $K \subset U$ が存在して，$\|f\|_{L^\infty(U\setminus K)} < \varepsilon$. 一様収束の位相でバナッハ空間となる．

2. 測度分解定理により，確率測度の族 $\{\nu_x\}$ が存在し，$\mu = \kappa(dx) \otimes \nu_x$ と書ける．ただし，任意のボレル集合 B に対して，$\kappa(B) = \mu(B \times \mathbb{R}^N)$ と定義される．

3. $\kappa = \mathscr{L}^d_x \llcorner \Omega$ であることを示すと，任意の $f \in C_0(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ に対して次が従う：
$$\lim_{j\to\infty} \langle\langle f, \nu^{(j)} \rangle\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle f, \mu^{(j)} \rangle = \langle f, \mu \rangle = \langle\langle f, \nu \rangle\rangle. \tag{4.25}$$

4. f が有界なカラテオドリ関数で，コンパクト集合 K があって $\operatorname{supp} f \subset \Omega \times K$ ならば (4.20) が成り立つ．

5. コンパクト性原理（Lemma 4.5）の条件を満たす任意の f に対しても (4.20) が成り立つ．

Lemma 4.5 を証明する前にステップ 2 とステップ 4 で用いる補助結果を示しておく．

Theorem 4.6 (測度分解定理)**.** 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ において $\mu \in \mathscr{M}^+\left(\Omega \times \mathbb{R}^N\right)$ が（正の）ラドン測度ならば，弱スター可測な確率測度の族 $(\nu_x)_{x\in\Omega} \subset \mathscr{M}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ が存在して，次が成り立つ：
$$\kappa(B) := \mu\left(B \times \mathbb{R}^N\right) \quad B \subset \Omega \text{ はボレル集合} \tag{4.26}$$
で定義される測度 $\kappa \in \mathscr{M}^+(\Omega)$ に対して，
$$\mu = \kappa(\mathrm{d}x) \otimes \nu_x. \tag{4.27}$$
すなわち，
$$\int f \ \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \int f(x, A) \ \mathrm{d}\nu_x(A) \ \mathrm{d}\kappa(x) \qquad \forall f \in C_0\left(\Omega \times \mathbb{R}^N\right). \tag{4.28}$$
この族 $(\nu_x)_{x\in\Omega} \subset \mathscr{M}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ は次の意味で一意である：$(\nu'_x)_{x\in\Omega} \subset \mathscr{M}^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ が上記の性質を持つならば，$\nu_x = \nu'_x$ が κ-ほとんどすべての $x \in \Omega$ について成り立つ．

この定理は確率論で知られている，条件つき確率測度の存在定理に含まれる．

Proof. $\psi \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ に対して符号付測度 $\mu_\psi \in \mathscr{M}(\Omega)$ を
$$\mu_\psi(B) := \int_{B\times\mathbb{R}^N} \psi(A) \ \mathrm{d}\mu(x, A), \qquad B \subset \Omega \text{ はボレル集合} \tag{4.29}$$
で定義する．このとき，
$$\mu_\psi(B) \le \|\psi\|_{L^\infty} \mu\left(B \times \mathbb{R}^N\right) = \|\psi\|_{L^\infty} \kappa(B) \tag{4.30}$$
より，$\mu_\psi \ll \kappa$（μ_ψ は κ に関して絶対連続）である．Radon-Nikodym の定理より，$|h_\psi| \le \|\psi\|_{L^\infty}$ を満たす κ-可測な関数 $h_\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ が存在して，$\mu_\psi = h_\psi \kappa$ （つまり，$\mu_\psi(B) = \int_B h_\psi \ \mathrm{d}\kappa$）が成り立つ．

> Radon-Nikodym の定理：$\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$ と $\kappa \in \mathscr{M}^+(\mathbb{R}^d)$ が $\mu \ll \kappa$（つまり，$\kappa(B) = 0 \Rightarrow |\mu|(B) = 0\ \forall B$）を満たすならば，
>
> $$\frac{d\mu}{d\kappa}(x_0) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mu(B(x_0, r))}{\kappa(B(x_0, r))} \tag{4.31}$$
>
> の極限（Radon-Nikodym 微分）が $\operatorname{supp}\kappa$ にある κ-ほとんどすべての $x_0 \in \mathbb{R}^d$ に対して存在し，κ-可測であり，
>
> $$\mu(B) = \int_B \frac{d\mu}{d\kappa}\, \mathrm{d}\kappa, \qquad B \text{ ボレル集合} \tag{4.32}$$
>
> が成り立つ．$\frac{d\mu}{d\kappa}$ は κ-測度 0 の集合を除いて一意である．

この対応は ψ について線形である：

$$\mu_{\alpha\psi_1+\beta\psi_2} = \alpha\mu_{\psi_1} + \beta\mu_{\psi_2} = \alpha h_{\psi_1}\kappa + \beta h_{\psi_2}\kappa = (h_{\alpha\psi_1+\beta\psi_2})\,\kappa \qquad \forall \psi_1, \psi_2 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{4.33}$$

$C_0(\mathbb{R}^N)$ で稠密な可算な族 $\mathscr{D} \subset C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ をとれば，$\kappa(N) = 0$ を満たす集合 $N \subset \Omega$ が存在して，

$$h_{\psi_1}(x) + h_{\psi_2}(x) = h_{\psi_1+\psi_2}(x) \quad \forall x \in \Omega\backslash N\ \ \forall \psi_1, \psi_2 \in \mathscr{D}. \tag{4.34}$$

$x \in \Omega\backslash N$ と $\psi \in \mathscr{D}$ に対して $T_x[\psi] := h_\psi(x)$ とおくと，$|T_x[\psi]| \le \|\psi\|_{L^\infty}$ が成立するので，T_x は $C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ 上の有界線形汎関数に拡張できる．よって，リースの表現定理より，任意の $x \in \Omega\backslash N$ に対して測度 $\nu_x \in \mathscr{M}\left(\mathbb{R}^N\right)$ が存在して，$|\nu_x|\left(\mathbb{R}^N\right) \le 1$ そして，

$$T_x[\psi] = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(A)\ \mathrm{d}\nu_x(A), \quad \psi \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right) \tag{4.35}$$

を満たす．

> リースの表現定理：ラドン測度の空間 $\mathscr{M}\left(\mathbb{R}^d\right)$ と双対空間 $C_0\left(\mathbb{R}^d\right)^*$ は双対積
>
> $$\langle \varphi, \mu \rangle = \int \varphi\ \mathrm{d}\mu, \quad \varphi \in C_0\left(\mathbb{R}^d\right),\ \mu \in \mathscr{M}\left(\mathbb{R}^d\right) \tag{4.36}$$
>
> を通して同型である．つまり，対応する $f = \langle \cdot, \mu \rangle \in C_0(\mathbb{R}^d)^*$ と $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$ は $\|f\|_{C_0^*} = \|\mu\|$ を満たす．
> さらに，$f \in C_0\left(\mathbb{R}^d\right)^*$ が正（すなわち，$f(\varphi) \ge 0$ for $\varphi \ge 0$）で，正規化されている（すなわち，$f(\mathbb{1}) = 1$）ならば，上の μ は確率測度 $\mu \in \mathscr{M}^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ となる．
> As an easy, often convenient, consequence, we can define measures through their action on $\mathrm{C}_0\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^N\right)$. Note, however, that we then need to check the boundedness $|\langle \varphi, \mu \rangle| \le \|\varphi\|_\infty$ for all $\varphi \in \mathrm{C}_0\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^N\right)$.

次に，$x \in N$ に対し $\nu_x := \delta_0$ とおけば，すべての $\psi \in \mathscr{D}$ に対して $x \mapsto \langle \psi, \nu_x \rangle = T_x[\psi] = h_\psi(x)$ は κ-可測である．よって，$\psi \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ の関数を $\mathscr{D}$ の関数で近似することによって，$h_\psi(x)$ はすべての $\psi \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ に対しても κ-可測であると言える．ここから族 $\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ の弱スター可測性が従う（証明が必要）．

いま，任意のボレル集合 $B \subset \Omega$ と $\psi \in \mathscr{D}$ に対して，

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(x)\psi(A)\ \mathrm{d}\mu(x,A) &= \mu_\psi(B)\\ &= \int_B h_\psi(x)\ \mathrm{d}\kappa(x)\\ &= \int_B \int_{\mathbb{R}^N} \psi(A)\ \mathrm{d}\nu_x(A)\ \mathrm{d}\kappa(x)\\ &= \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(x)\psi(A)\ \mathrm{d}\nu_x(A)\ \mathrm{d}\kappa(x).\end{aligned}$$

これは $f = \mathbb{1}_B \otimes \psi$ のときの (4.28) 式である．x についての階段関数と A についての $\mathscr{D}$ の関数の 2 段階近似により，(4.28) がすべての $f \in C_0\left(\Omega \times \mathbb{R}^N\right)$ そして $f = \mathbb{1}_{B\times\mathbb{R}^N}$（$B \subset \Omega$ は任意のボレル集合）の形をもつ関数について成り立つことが言える．

ν_x が確率測度であることを示すには，任意のボレル集合 $B \subset \Omega$ について，

$$\mu\left(B \times \mathbb{R}^N\right) = \int_B \nu_x\left(\mathbb{R}^N\right)\ \mathrm{d}\kappa(x) \le \int_B 1\ \mathrm{d}\kappa(x) = \mu\left(B \times \mathbb{R}^N\right) \tag{4.37}$$

が成り立つことに注意すればよい．よって，κ-ほとんどすべての $x \in \Omega$ に対して，$\nu_x\left(\mathbb{R}^N\right) = 1$ が成り立ち，これを $|\nu_x|\left(\mathbb{R}^N\right) \le 1$ と合わせると，ν_x が確率測度であることがわかる．

変数が分離されている $f = \varphi \otimes \psi$（$\varphi \in C_0(\Omega), \psi \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$）に (4.28) を適用すれば，$\nu_x$ の一意性が従う． □

Theorem 4.7 (Scorza Dragoni, 1948)**.** ほとんどすべての固定した $x \in \Omega$ に対して $f(x,\cdot)$ が一様連続であるようなカラテオドリ関数 $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ に対して，$|\Omega\backslash S_k| \downarrow 0$ を満たすコンパクト集合 $S_k \subset \Omega, k \in \mathbb{N}$ の単調増加列が存在して，$f|_{S_k\times\mathbb{R}^N}$ は連続である．

一様連続性の仮定は外すことができる（[4], Theorem 6.35）.

Proof. $j \in \mathbb{N}$ に対して，関数

$$g_j(x) := \sup\left\{|f(x,A) - f(x,B)| : A, B \in \mathbb{R}^N, |A-B| \le 1/j\right\}, \quad x \in \Omega \tag{4.38}$$

を考える．ほとんどすべての固定した $x \in \Omega$ に対して $f(x,\cdot)$ が一様連続だから，$j \to \infty$ のとき $g_j \to 0$ a.e. in Ω.

Egorov の定理より，$n \in \mathbb{N}$ に対して，$|\Omega\backslash K_0| \le 1/(2n)$ を満たすコンパクト集合 $K_0 \subset \Omega$ が存在し，$g_j \to 0$ が一様収束となる．

> Egorov の定理：有界なボレル集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ で定義されるルベーグ可測な関数 $f_j : \Omega \to \mathbb{R}^N, j \in \mathbb{N}$ が f にほとんどいたるところで各点収束するならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対してコンパクト集合 $K_\varepsilon \subset \Omega$ が存在し，$|\Omega\backslash K_\varepsilon| \le \varepsilon$ かつ $f_j \to f$ が K_ε で一様収束する．

$\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ を $\mathbb{R}^N$ の稠密な部分集合とすれば，Lusin の定理より，$|\Omega\backslash K_i| \le 1/\left(2^{i+1}n\right)$ を満たすコンパクト集合 K_i が存在して，$f(\cdot, A_i)$ が K_i で連続である．

> Lusin の定理：有界なボレル集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ で定義される関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ がルベーグ可測ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，コンパクト集合 $K \subset \Omega$ が存在して，$|\Omega\backslash K| \le \varepsilon$ かつ $f|_K$ が連続である．

$$S_n := K_0 \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \tag{4.39}$$

とおくと，

$$|\Omega \backslash S_n| \leq \frac{1}{2n}\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\right) = \frac{1}{n} \tag{4.40}$$

が成り立つ．よって，$|\Omega \setminus S_n| \to 0$ as $n \to \infty$.

あとは $f|_{S_n \times \mathbb{R}^N}$ の連続性を示せばよい．$\varepsilon > 0$ を固定する．このとき，g_j が S_n で 0 に一様収束するので，$\delta > 0$ があって，$A, B \in \mathbb{R}^N$, $|A - B| \leq 2\delta$ ならば $|f(x, A) - f(x, B)| \leq \varepsilon \; \forall x \in S_n \subset K_0$．任意の $(\overline{x}, \overline{A}) \in S_n \times \mathbb{R}^N$ に対して，稠密な集合 $\{A_i\}$ より A_i を選んで，$\left|\overline{A} - A_i\right| \leq \delta$ となるようにできる．次に，この A_i に対して $\eta > 0$ が存在し，$y \in S_n \subset K_i$ が $|\overline{x} - y| \leq \eta$ を満たすならば $|f(\overline{x}, A_i) - f(y, A_i)| \leq \varepsilon$ が成り立つようにできる．

したがって，$(x, A) \in S_n \times \mathbb{R}^N$ が

$$|\overline{x} - x| \leq \eta \quad \text{かつ} \quad |\overline{A} - A| \leq \delta \tag{4.41}$$

を満たすならば，$|A_i - A| \leq \left|A_i - \overline{A}\right| + |\overline{A} - A| \leq 2\delta$ であるため，

$$|f(\overline{x}, \overline{A}) - f(x, A)| \leq f(\overline{x}, \overline{A}) - f(\overline{x}, A_i)| + |f(\overline{x}, A_i) - f(x, A_i) + |f(x, A_i) - f(x, A)| \leq 3\varepsilon. \tag{4.42}$$

つまり，$f|_{S_n \times \mathbb{R}^N}$ は任意の $(\overline{x}, \overline{A}) \in S_n \times \mathbb{R}^N$ において連続である． □

Proof. (Lemma 4.5)

Step 1　次のラドン測度を定義する：

$$\mu^{(j)} := \mathscr{L}_x^d \llcorner \Omega \otimes \nu_x^{(j)}. \tag{4.43}$$

つまり，$\mu^{(j)} \in \mathscr{M}\left(\Omega \times \mathbb{R}^N\right) \cong C_0\left(\Omega \times \mathbb{R}^N\right)^*$ は以下の作用で定義される：

$$\left\langle f, \mu^{(j)} \right\rangle = \int_\Omega \int f(x, A) \, \mathrm{d}\nu_x^{(j)}(A) \, \mathrm{d}x \quad \forall f \in C_0\left(\Omega \times \mathbb{R}^N\right). \tag{4.44}$$

例えば，$\nu^{(j)} = \delta[V_j]$ ならば，

$$\left\langle f, \mu^{(j)} \right\rangle = \int_\Omega f(x, V_j(x)) \; \mathrm{d}x \quad \forall f \in C_0\left(\Omega \times \mathbb{R}^N\right) \tag{4.45}$$

となる．

> 局所的コンパクトなハウスドルフ位相空間 X 上のラドン測度は開集合で内部正則で，コンパクト集合上で有界なボレル測度である．
> ラドン測度と $C_0(X)$-関数の 1 対 1 の関係がある：
>
> - μ がラドン測度ならば，$I : f \mapsto \int f d\mu$ は $C_0(X) \to \mathbb{R}$ の連続で正の線形写像である（$I(f) \geq 0 \forall f \geq 0$）．つまり，任意のコンパクト集合 K に対して M_K があって，$|I(f)| \leq M_K \sup |f| \forall f \in C_0(K)$.
> - 逆に Riesz-Kakutani の定理で $C_0(X)$ 上の正の線形写像は一意のラドン測度についての積分に対応する．

上で定義した $\mu^{(j)}$ は正の測度で，

$$\left|\left\langle f, \mu^{(j)} \right\rangle\right| \leq |\Omega| \cdot \|f\|_{L^\infty} \tag{4.46}$$

を満たす．よって，$\left\{\mu^{(j)}\right\}$ は $C_0(\Omega\times\ \mathbb{R}^N)^*$ で一様有界である．Banach-Alaoglu の定理により，部分列と $\mu \in C_0\left(\Omega \times \mathbb{R}^N\right)^*$ があって，

$$\left\langle f, \mu^{(j)} \right\rangle \to \langle f, \mu \rangle \quad \forall f \in C_0\left(\Omega \times \mathbb{R}^N\right) \tag{4.47}$$

> Banach-Alaoglu の定理：X が可分なバナッハ空間ならば，双対空間 X^* においてノルム有界な集合は弱スター点列プレコンパクトである．

Step 2　次に，極限の μ が $\mu = \kappa(\mathrm{d}x) \otimes \nu_x$ の形で書けることを示す．これは，分解定理 4.6 より直ちに従う．つまり，$\kappa(B) = \mu(B \times \mathbb{R}^N)$ と定義すると，確率測度の弱スター可測な族 $\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ が存在して，$\mu = \kappa(\mathrm{d}x) \otimes \nu_x$ と書ける．

Step 3　次の補題を使う：

> $\mu_j \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$（$\mathscr{M}^+\left(\mathbb{R}^N\right)$ での弱∗収束，すなわち $\langle\psi, \mu_j\rangle \to \langle\psi, \mu\rangle \forall \psi \in C_0(\mathbb{R}^N)$）とする．このとき，任意の下半連続な関数 $g : \mathbb{R}^N \to [0, \infty]$ に対して，
>
> $$\int g \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int g \, \mathrm{d}\mu_j, \tag{4.48}$$
>
> そして，台がコンパクトな任意の上半連続な関数 $h : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$ に対して，
>
> $$\int h \, \mathrm{d}\mu \geq \limsup_{j\to\infty} \int h \, \mathrm{d}\mu_j. \tag{4.49}$$
>
> とくに，開集合 $U \subset \mathbb{R}^N$ とコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^N$ に対して，
>
> $$\mu(U) \leq \liminf_{j\to\infty} \mu_j(U) \quad \text{かつ} \quad \mu(K) \geq \limsup_{j\to\infty} \mu_j(K). \tag{4.50}$$
>
> 証明のアイデア：$\psi \in C_0(\mathbb{R}^N)$, $0 \leq \psi \leq 1$ と g の正則化 g_t（下半連続ならば，単調に収束するように正則化できる）に対して，
>
> $$\int \psi g_t \, \mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int \psi g_t \, \mathrm{d}\mu_j \leq \liminf_{j\to\infty} \int g_t \, \mathrm{d}\mu_j$$
>
> となるので，ψ について sup をとり，$t \to \infty$ とすれば示される（L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara の本 [1] の Proposition 1.62.）

そこで，$U \subset \Omega$ を開集合とすると，

$$\mu\left(U \times \mathbb{R}^N\right) \leq \liminf_{j\to\infty} \mu^{(j)}\left(U \times \mathbb{R}^N\right) = |U|. \tag{4.51}$$

ここで，$|U|$ は U のルベーグ測度である．一方，コンパクト集合に適用するため，コンパクト集合 $K \subset \Omega$

と $R>0$ をとって，

$$\begin{aligned}\mu(K\times\overline{B(0,R)}) &\geq \limsup_{j\to\infty}\mu^{(j)}(K\times\overline{B(0,R)}) \\ &= \limsup_{j\to\infty}\int_K\int_{\{|A|\leq R\}} 1\ \mathrm{d}\nu_x^{(j)}(A)\ \mathrm{d}x \\ &= \limsup_{j\to\infty}\left(|K|-\int_K\int_{\{|A|>R\}} 1\ \mathrm{d}\nu_x^{(j)}(A)\ \mathrm{d}x\right) \\ &= |K|-\liminf_{j\to\infty}\int_K \nu_x^{(j)}\left(\{A\in\mathbb{R}^N:\ |A|>R\}\right)\ \mathrm{d}x \\ &\geq |K|-\frac{1}{R^p}\sup_{j\in\mathbb{N}}\langle\langle|\cdot|^p,\nu^{(j)}\rangle\rangle\end{aligned} \tag{4.52}$$

チェビシェフ不等式：

$$\nu^{(j)}(\{A:|A|\geq R\})\leq\frac{1}{R^p}\int_{\{|A|\geq R\}}|A|^p\ \mathrm{d}\nu^{(j)} \tag{4.53}$$

ここで $R\to\infty$ とする．仮定 (4.17) より，右辺は $|K|$ に収束し，ラドン測度の内部正則性（任意のボレル集合 B に対して $\mu(B)=\sup\{\mu(K):K\subset B\text{ compact}\}$）より左辺は $\mu(K\times\mathbb{R}^n)$ に収束する．よって，

$$\mu\left(K\times\mathbb{R}^N\right)\geq|K| \tag{4.54}$$

ラドン測度 κ が正則なので，$\kappa(B)<\infty$ なる任意のボレル集合 B に対して，

$$\sup_{K\subset B\,\text{compact}}\kappa(K)=\kappa(B)=\inf_{U\supset B\,\text{open}}\kappa(U).$$

よって，上の不等式より

$$\sup_{K\subset B\,\text{compact}}|K|\leq\sup_{K\subset B\,\text{compact}}\kappa(K)=\kappa(B)=\inf_{U\supset B\,\text{open}}\kappa(U)\leq\inf_{U\supset B\,\text{open}}|U|.$$

ルベーグ測度の正則性より，測度分解定理において $\kappa(B)=|B|$ となり，

$$\mu=\mathscr{L}_x^d\llcorner\Omega\otimes\nu_x \tag{4.55}$$

を得る．ただし，$\{\nu_x\}_x$ は弱∗可測な確率測度の族である．よって，$f\in C_0\left(\Omega\times\mathbb{R}^N\right)$ に対して，

$$\lim_{j\to\infty}\langle\langle f,\nu^{(j)}\rangle\rangle=\lim_{j\to\infty}\langle f,\mu^{(j)}\rangle=\langle f,\mu\rangle=\langle\langle f,\nu\rangle\rangle. \tag{4.56}$$

これは $f\in C_0\left(\Omega\times\mathbb{R}^N\right)$ に関する (4.20) である．

Step 4　f が有界なカラテオドリ関数で，コンパクト集合 K があって $\operatorname{supp}f\subset\Omega\times K$ が成立するときに (4.20) が成り立つことを示す．このとき，$f(x,\cdot)$ がほとんどすべての固定した $x\in\Omega$ に対して一様連続となる．Theorem 4.7 を用いて，次を満たす集合 $S_k\in\Omega, k\in\mathbb{N}$ をとってくる：$|\Omega\backslash S_k|\downarrow 0$ かつ $f|_{S_k\times\mathbb{R}^N}$ は連続である．Tietze の拡張定理を用いて，$f|_{S_k\times\mathbb{R}^N}$ を $f_k\in C_0(\Omega\times\mathbb{R}^N)$ に拡張する．ただし，k に関して一様有界となるように $\Omega\times\mathbb{R}^N$ 全体に拡張する（f の台が有界集合に収まるので，Tietze による拡張にカットオフ関数をかけることにより，ある有界集合の外側でゼロになるようにできる；また，その結果を f の sup でトランケートすれば一様有界にできる）．

> Tietze の拡張定理：X を距離空間，$F \subset X$ を閉集合とする．$f : F \to \mathbb{R}^m$ が連続ならば，連続な関数 $\overline{f} : X \to \mathbb{R}^m$ に拡張できる．さらに，f が有界ならば $\overline{f}$ も有界になるようにできる．
> 証明は Urysohn の補題に基づいている．

$f_k \in C_0\left(\Omega \times \mathbb{R}^N\right)$ だから，列 $\left\{\left\langle f_k(x,\cdot), \nu_x^{(j)}\right\rangle\right\}_j$ は $L^1(\Omega)$ で弱プレコンパクトである．よって，$\{\nu_x^{(j)}\}$ のある部分列があって，任意の $\varphi \in C_c(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega \int \varphi(x) f_k(x,A)\ \mathrm{d}\nu_x^{(j)}(A)\ \mathrm{d}x$$

が収束する．(4.47) より，この収束先は

$$\int_\Omega \int \varphi(x) f_k(x,A)\ \mathrm{d}\nu_x(A)\ \mathrm{d}x$$

でなければならない．同じことが $\{\nu_x^{(j)}\}$ の任意の部分列について言えるので，元の列全体が収束すると結論できる：

$$\int_\Omega \int \varphi(x) f_k(x,A)\ \mathrm{d}\nu_x^{(j)}(A)\ \mathrm{d}x \ \to\ \int_\Omega \int \varphi(x) f_k(x,A)\ \mathrm{d}\nu_x(A)\ \mathrm{d}x.$$

すなわち，

$$\left\langle f_k(x,\cdot), \nu_x^{(j)}\right\rangle \rightharpoonup \langle f_k(x,\cdot), \nu_x\rangle \quad L^1(\Omega) \text{ で弱収束} \quad \text{as } j \to \infty \tag{4.57}$$

とくに，

$$\left\langle f(x,\cdot), \nu_x^{(j)}\right\rangle \rightharpoonup \langle f(x,\cdot), \nu_x\rangle \quad \text{in } L^1(S_k) \quad \text{as } j \to \infty \tag{4.58}$$

一方で，

$$\int_\Omega \left|\left\langle f(x,\cdot), \nu_x^{(j)}\right\rangle - \mathbb{1}_{S_k}\left\langle f(x,\cdot), \nu_x^{(j)}\right\rangle\right| \mathrm{d}x \le \int_{\Omega\setminus S_k} \left|\left\langle f(x,\cdot), \nu_x^{(j)}\right\rangle\right| \mathrm{d}x \tag{4.59}$$

f の有界性より，右辺は $k \to \infty$ のときに j に関して一様にゼロに収束する．この評価は $\nu^{(j)}$ を ν で置き換えても成り立つ．したがって，

$$\left\langle f(x,\cdot), \nu_x^{(j)}\right\rangle \rightharpoonup \langle f(x,\cdot), \nu_x\rangle \quad \text{in } L^1(\Omega) \quad \text{as } j \to \infty \tag{4.60}$$

すなわち，(4.20) は $\operatorname{supp} f \subset \Omega \times K$ を満たす有界なカラテオドリ関数 f について成り立つ．

Step 5　最後に，f の有界性とコンパクトな台の仮定を外す．このとき，$f \ge 0$ に対して (4.20) を証明すれば十分であることに注意する．実際，$f = f^+ - f^-$ と分解すると，f^+, f^- は非負なカラテオドリ関数になる．$h \in \mathbb{N}$ に対して，カットオフ関数 $\rho_h \in C_c^\infty(\mathbb{R}; [0,1])$ を $\rho_h = 1$ on $B(0,h)$ かつ $\operatorname{supp}\rho_h \subset B(0,2h)$ を満たすように選ぶ．

$$f^h(x,A) = \rho_h\left(|A|^{p/2}\right)\rho_h(f(x,A))f(x,A) \tag{4.61}$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
E_{j,h} &:= \int_\Omega \int \left| f(x,\cdot) - f^h(x,\cdot) \right| \, \mathrm{d}\nu_x^{(j)} \, \mathrm{d}x \\
&\le \int_\Omega \int \left[1 - \rho_h \left(|A|^{p/2} \right) \rho_h(f(x,A)) \right] |f(x,A)| \, \mathrm{d}\nu_x^{(j)}(A) \, \mathrm{d}x \\
&\le \iint_{\left\{(x,A)\in\Omega\times\mathbb{R}^N : |A|^{p/2}\ge h \text{ or } |f(x,A)|\ge h\right\}} |f(x,A)| \, \mathrm{d}\nu_x^{(j)}(A) \, \mathrm{d}x \\
&\le \int_\Omega \int_{\left\{A\in\mathbb{R}^N : |A|^{p/2}\ge h \text{ and } |f(x,A)|<h\right\}} h \, \mathrm{d}\nu_x^{(j)}(A) \, \mathrm{d}x \\
&\qquad + \iint_{\{(x,A)\in\Omega\times\mathbb{R}^N : |f(x,A)|\ge h\}} |f(x,A)| \, \mathrm{d}\nu_x^{(j)}(A) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{h} \int_\Omega \int_{\left\{A\in\mathbb{R}^N : |A|^{p/2}\ge h\right\}} h^2 \, \mathrm{d}\nu_x^{(j)}(A) \, \mathrm{d}x \\
&\qquad + \iint_{\{(x,A)\in\Omega\times\mathbb{R}^N : |f(x,A)|\ge h\}} |f(x,A)| \, \mathrm{d}\nu_x^{(j)}(A) \, \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{h} \sup_{j\in\mathbb{N}} \langle\langle |A|^p, \nu^{(j)} \rangle\rangle + \sup_{j\in\mathbb{N}} \langle\langle |f(x,A)| \mathbb{1}_{\{|f(x,A)|\ge h\}}, \nu^{(j)} \rangle\rangle.
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

Lemma 4.5 の仮定 (4.17) と equiintegrability の仮定 (4.19) より，最後の二つの項は両方 $h \to \infty$ のときゼロに収束する．したがって，固定した $h \in \mathbb{N}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{j\to\infty} \left| \langle\langle f, \nu^{(j)} \rangle\rangle - \langle\langle f, \nu \rangle\rangle \right| \\
&\le \limsup_{j\to\infty} \left(\left| \langle\langle f - f^h, \nu^{(j)} \rangle\rangle \right| + \left| \langle\langle f^h, \nu^{(j)} \rangle\rangle - \langle\langle f^h, \nu \rangle\rangle \right| + \left| \langle\langle f^h - f, \nu \rangle\rangle \right| \right) \\
&\le \sup_{j\in\mathbb{N}} E_{j,h} + \left| \langle\langle f^h - f, \nu \rangle\rangle \right|
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

真ん中の $\limsup$ がゼロであるのはステップ 4 で示した Young 測度の収束より従う．(4.63) の両辺で $h \to \infty$ とすれば，右辺の第 1 項は (4.62) の評価よりゼロであり，第 2 項はルベーグの単調収束定理よりゼロである．

> 単調収束定理 : (X, Σ, μ) を測度空間とする．$\{f_k\}$ が $0 \le f_1(x) \le \cdots \le f_k(x) \le f_{k+1}(x) \le \cdots$ を満たし，$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ が μ-ほとんどすべての $x \in X$ について成り立つならば，f は Σ-可測であり，
>
> $$\lim_{k\to\infty} \int f_k \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu$$
>
> が成立する．

よって，(4.20) は示された．

Last step　あとは，(4.21)（$p \in [1,\infty)$ のとき）と (4.22)（$p = \infty$ のとき）を示せばよい．(4.21) では，$h \in \mathbb{N}$ に対して $|A|_h := \min\{|A|, h\}$ と定義する．このとき，

$$
\liminf_{j\to\infty} \langle\langle |\cdot|^p, \nu^{(j)} \rangle\rangle \ge \lim_{j\to\infty} \langle\langle |\cdot|_h^p, \nu^{(j)} \rangle\rangle = \langle\langle |\cdot|_h^p, \nu \rangle\rangle \quad \forall h \in \mathbb{N}. \tag{4.64}
$$

極限 $h \to \infty$ をとり，単調収束定理を適用すれば，望まれる結果が得られる．

(4.22) では，$\varphi \in C_0(\Omega)$, $\psi \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ を $\operatorname{supp}\psi \cap K = \emptyset$ となるように任意にとる．このとき，

$$
\langle\langle \varphi \otimes \psi, \nu \rangle\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle\langle \varphi \otimes \psi, \nu^{(j)} \rangle\rangle = 0. \tag{4.65}
$$

φ と ψ を変化させることによって $\operatorname{supp}\nu_x \subset K$ a.e. $x \in \Omega$ が従う．　□

Young 測度と非負な関数のペアリングが下半連続であることを示す．ここで，被積分関数に対して equi-integrability 条件を課さなくてもよいのがポイントである．

Proposition 4.8. ノルム有界な列 $\{V_j\} \subset L^p\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$, $p \in [1,\infty]$ が *Young* 測度 $\nu \in \mathbf{Y}^p\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$ を生成するとする．$f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$ がカラテオドリ関数ならば，

$$\liminf_{j\to\infty} \int_\Omega f\left(x, V_j(x)\right)\ \mathrm{d}x = \liminf_{j\to\infty} \langle\langle f, \delta\left[V_j\right]\rangle\rangle \geq \langle\langle f, \nu\rangle\rangle. \tag{4.66}$$

Proof. $h \in \mathbb{N}$ に対して $f_h(x,A) = \min\{f(x,A), h\}$ と定義する．基礎定理の (iii) の主張を f_h に適用できて，

$$\int_\Omega f_h\left(x, V_j(x)\right)\ \mathrm{d}x \to \langle\langle f_h, \nu\rangle\rangle = \int_\Omega \int f_h(x,A)\ \mathrm{d}\nu_x(A)\ \mathrm{d}x \tag{4.67}$$

が従う．$f \geq f_h$ であるため，

$$\liminf_{j\to\infty} \int_\Omega f\left(x, V_j(x)\right)\ \mathrm{d}x \geq \langle\langle f_h, \nu\rangle\rangle. \tag{4.68}$$

極限 $h \to \infty$ をとって，単調収束定理（$f_h \geq 0$ に注意）を用いれば，証明は完了する． □

4.2 Young 測度の例

関数列 $\{V_j\} \subset L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ が生成する Young 測度を実際に特定するとき，次の補題が有用である．

Lemma 4.9. $\{\varphi_k\}_k$ と $\{h_\ell\}_\ell$ をそれぞれ，$C_0(\Omega)$ と $C_0(\mathbb{R}^N)$ の任意の稠密な可算集合とする．このとき，L^p-ノルムで一様有界な列 $\{V_j\} \subset L^p\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$ と $\nu \in \mathbf{Y}^p\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$ が

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \varphi_k(x)\, h_\ell\left(V_j(x)\right)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi_k(x)\, \langle h_\ell, \nu_x\rangle\ \mathrm{d}x \qquad \forall k,\ell \in \mathbb{N} \tag{4.69}$$

を満たすならば，$V_j \overset{\mathbf{Y}}{\to} \nu$ である．

Proof. $\nu_x^{(j)} = \delta[V_j(x)]$ とおく．コンパクト性原理（Lemma 4.5）の証明を振り返ると，次のことを示せばよいということがわかる：

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \int f(x,A)\ \mathrm{d}\nu_x^{(j)}(A)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \int f(x,A)\ \mathrm{d}\nu_x(A)\ \mathrm{d}x \qquad \forall f \in C_0(\Omega \times \mathbb{R}^N). \tag{4.70}$$

すなわち，より一般のカラテオドリ関数 f への拡張は Lemma 4.5 と同じように行えばよい．

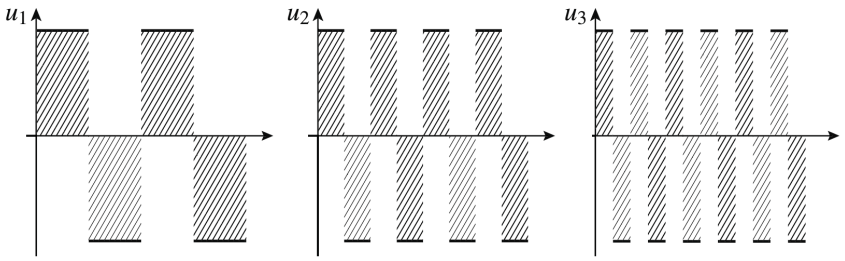
一方，$f_{k,\ell} := \varphi_k \otimes h_\ell$（つまり，$f_{k,\ell}(x,A) = \varphi_k(x) h_\ell(A)$）の線形結合からなる集合は $C_0\left(\Omega \times \mathbb{R}^N\right)$ に稠密である（多項式による近似をかませばよい）．よって，(4.70) の f を最大値ノルムで $f_{k,\ell}$ の列で近似すれば，(4.69) で $k,\ell \to \infty$ をとることで (4.70) を得る． □

Remark 4.10. $C_0(\mathbb{R}^N)$ に稠密な可算集合は例えば次のように構成できる：

$$\left\{(P\mathbb{1}_{B(0,n)}) * \eta_{1/m},\ P \text{ 係数が有理数である多項式}, n, m \in \mathbb{N}\right\}. \tag{4.71}$$

すなわち，*Weierstrass* の定理によりコンパクト集合上で稠密である多項式を半径 n の球の外側でカットオフし，軟化子 $\eta_{1/m}$ で滑らかにする．

Example 4.11.



$\Omega := (0,1)$ において $u := \mathbb{1}_{(0,1/2)} - \mathbb{1}_{(1/2,1)}$ を考え，周期 1 で $\mathbb{R}$ 全体に拡張する．このとき，列 $u_j(x) := u(jx), j \in \mathbb{N}$ は次で与えられる等質な（つまり，x に依らない）*Young* 測度 $\nu \in \mathbf{Y}^\infty((0,1))$ を生成する：

$$\nu = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_{+1}. \tag{4.72}$$

実際，$\varphi \in C_0((0,1))$ と $h \in C_0(\mathbb{R})$ を任意にとると，φ は一様連続だから，*modulus of continuity*（連続度）ω（すなわち，ω は連続な増加関数で $\omega(0) = 0$）が存在して，$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le \omega(|x-y|)$ が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\lim_{j\to\infty} \int_0^1 \varphi(x) h\left(u_j(x)\right)\ \mathrm{d}x \qquad (4.73)\\
&\quad = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{j-1} \left[\int_{k/j}^{(k+1)/j} \varphi\left(\frac{k}{j}\right) h\left(u_j(x)\right)\ \mathrm{d}x + \int_{k/j}^{(k+1)/j} \left(\varphi(x) - \varphi\left(\frac{k}{j}\right)\right) h\left(u_j(x)\right)\ \mathrm{d}x \right]\\
&\quad = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{j} \varphi\left(\frac{k}{j}\right) \int_0^1 h(u(y))\ \mathrm{d}y\\
&\quad = \int_0^1 \varphi(x)\ \mathrm{d}x \cdot \left(\frac{1}{2}h(-1) + \frac{1}{2}h(+1)\right)
\end{aligned}$$

2 行目の極限は以下より従う（ただし，M_h は h の上限である）：

$$\int_{k/j}^{(k+1)/j} \left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{k}{j}\right)\right| \left|h\left(u_j(x)\right)\right|\ \mathrm{d}x \le \int_{k/j}^{(k+1)/j} \omega(|x - k/j|) \left|h\left(u_j(x)\right)\right|\ \mathrm{d}x \le \frac{1}{j}\omega\left(\frac{1}{j}\right) M_h. \tag{4.74}$$

また，最後の等式は φ のリーマン和が積分に収束することを用いた．*Lemma 4.9* を適用すれば，予告した ν の形が正しいことが示される．

Example 4.12. 二つの行列 $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ が *rank-one* 接続しているとする．つまり，$\mathrm{rank}(A-B) \le 1$ が成り立つ．このとき，$a, n \in \mathbb{R}^2$ が存在して，$B - A = a \otimes n$ と書ける．

> $a \in \mathbb{R}^m$, $n \in R^d$ に対して，$a \otimes n = an^T \in \mathbb{R}^{m\times d}$ と定義する．つまり，
>
> $$a \otimes n = \begin{pmatrix} a_1n_1 & a_1n_2 & \dots & a_1n_d \\ a_2n_1 & a_2n_2 & \dots & a_2n_d \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_mn_1 & a_mn_2 & \dots & a_mn_d \end{pmatrix} \tag{4.75}$$

このとき，$\theta \in (0,1)$ に対して，関数 $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次で定義する：

$$u(x) := Ax + \left(\int_0^{x\cdot n} \chi(t)\ \mathrm{d}t\right) a, \qquad x \in \mathbb{R}^2. \tag{4.76}$$

ただし，$\chi := \mathbb{1}_{\bigcup_{z\in\mathbb{Z}}[z, z+1-\theta)}$.

そこで，有界リプシッツ領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ で関数列 $\{u_j\}$ を

$$u_j(x) := \frac{1}{j} u(jx), \qquad x \in \Omega \tag{4.77}$$

で定義すれば，列 $\{\nabla u_j\}$ は以下で与える等質な *Young* 測度 $\nu \in \mathbf{Y}^\infty\left(\Omega; \mathbb{R}^{2\times 2}\right)$ を生成する：

$$\nu = \theta\delta_A + (1-\theta)\delta_B. \tag{4.78}$$

実際，u の k-成分の x_ℓ についての微分は $(\nabla u)_{k\ell} = a_{k\ell} + \chi(x\cdot n)a_k n_\ell$ だから，

$$\nabla u(x) = \begin{cases} B & x\cdot n \in [z, z+1-\theta), z \in \mathbb{Z} \\ A & x\cdot n \in [z+1-\theta, z+1), z \in \mathbb{Z} \end{cases}. \tag{4.79}$$

A, B が *rank-one* 接続していなければ，それを勾配にもつような連続な u が構成できないことに注意する．

4.3 Young 測度と生成列の収束の対応

Lemma 4.13. 関数列 $\{V_j\} \subset L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right), p \in (1,\infty]$ が *Young* 測度 $\nu \in \mathbf{Y}^p\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right)$ を生成するとする．このとき，ν の重心を $V(x) := [\nu](x) = [\nu_x]$ とおくと，次が成り立つ：

$$p \in (1,\infty) \text{ のとき：} \qquad V_j \rightharpoonup V \quad L^p \text{ で弱収束} \tag{4.80}$$

$$p = \infty \text{ のとき：} \qquad V_j \overset{*}{\rightharpoonup} V \quad L^\infty \text{ で弱}*\text{収束} \tag{4.81}$$

Proof. $p > 1$ ならば，$L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right)$ の有界列は弱プレコンパクトであるから，任意の弱収束部分列の収束先を特定すればよい．L^p で弱収束するならば L^1 でも弱収束するので，Dunford-Pettis の定理より，そのような弱収束部分列は L^1-equiintegrable である．$f(x,A) = A$ とおくと，考えている部分列 $\{V_j\}$ に対して，$\{f(x, V_j(x))\}$ が L^1-有界で，L^1-equiintegrable であるので，基本定理の (iii) がこの f に（成分ごとに）適用できて，

$$f(x, V_j(x)) = V_j(x) \rightharpoonup \int f(x,A)\, \mathrm{d}\nu_x(A) = \int A\, \mathrm{d}\nu_x(A) = V(x) \qquad L^1(\Omega) \text{ で弱収束} \tag{4.82}$$

を得る．$p = \infty$ のとき，上の議論を弱$*$位相の設定に変えればよい． □

Remark 4.14. 上の補題は $p = 1$ のときには成り立たない．反例として，集中現象がおきる列 $V_j = j\mathbb{1}_{(0,1/j)}$ を考えればよい．このとき，$\nu = \delta_0$ であるが，列 $\{V_j\}$ が L^1-*equiintegrable* でないため，$L^1(0,1)$ で弱収束しない．

Lemma 4.15. $\nu \in \mathbf{Y}^p\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right), p \in [1,\infty]$ をノルム有界な列 $\{V_j\} \subset L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right)$ で生成される *Young* 測度とし，$K \subset \mathbb{R}^N$ をコンパクト集合とする．このとき，

$$\mathrm{dist}\,(V_j, K) \to 0 \ \text{ 測度収束} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{supp}\,\nu_x \subset K \ \ a.e.\ x \in \Omega. \tag{4.83}$$

さらに，$V \in L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right)$ に対して，

$$V_j \to V \quad \text{測度収束} \quad \Longleftrightarrow \quad \nu_x = \delta_{V(x)} \quad a.e.\ x \in \Omega. \tag{4.84}$$

> 測度収束 $V_j \to V$：
>
> $$\lim_{j\to\infty} \lambda\left(\{x \in \Omega;\ |V_j(x) - V(x)| \geq \delta\}\right) = 0 \qquad \forall \delta > 0.$$
>
> - $V_j \to V$ 測度収束 $\Leftrightarrow \{V_j\}$ の任意の部分列は a.e. 収束する部分列をもつ
> - よって，a.e. 収束 $\Rightarrow$ 測度収束．逆は成り立たない：$\mathbb{1}_{[0,1]}$，$\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}$，$\mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$，$\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{4}]}$，$\mathbb{1}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}, \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}, \cdots$
> - $L^p(\Omega)$ 収束 $\Rightarrow$ 測度収束．逆は成り立たない：$V_j = j\mathbb{1}_{(0,\frac{1}{j})}$
> - 次の結果は（少なくともルベーグ測度に対して）a.e. 収束を測度収束で置き換えても成り立つ：Fatou の補題，単調収束定理，ルベーグの優収束定理

Proof. $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to [0,1]$ が有界な正の Caratheodory 関数で $\delta \in (0,1)$ ならば，基本定理より

$$\limsup_{j\to\infty} |\{x \in \Omega : f\left(x, V_j(x)\right) \geq \delta\}| \leq \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\delta} \int_\Omega f\left(x, V_j(x)\right)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\delta} \int_\Omega \int f(x,\cdot)\ \mathrm{d}\nu_x\ \mathrm{d}x \tag{4.85}$$

> マルコフの不等式
>
> $$\mu(\{x \in X :\ |f(x)| \geq \delta\}) \leq \frac{1}{\delta} \int_X |f|\ \mathrm{d}\mu$$

一方，

$$\int_\Omega \int f(x,\cdot)\ \mathrm{d}\nu_x\ \mathrm{d}x = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega f\left(x, V_j(x)\right)\ \mathrm{d}x \leq \delta|\Omega| + \limsup_{j\to\infty} |\{x \in \Omega : f\left(x, V_j(x)\right) \geq \delta\}| \tag{4.86}$$

よって，$f\left(x, V_j(x)\right)$ が 0 に測度収束するための必要十分条件は

$$\langle f(x,\cdot), \nu_x \rangle = 0 \quad \text{for } \mathscr{L}^d\text{-a.e. } x \in \Omega. \tag{4.87}$$

補題の最初の主張を示すために，次の f を考える：

$$f(x,A) = \frac{\mathrm{dist}(A,K)}{1 + \mathrm{dist}(A,K)}, \quad (x,A) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \tag{4.88}$$

- $f\left(x, V_j(x)\right) \to 0$ 測度収束 $\Leftrightarrow \mathrm{dist}\left(V_j, K\right) \to 0$ 測度収束
- $\langle f(x,\cdot), \nu_x \rangle = 0 \Leftrightarrow \operatorname{supp} \nu_x \subset K$.

補題の二つ目の主張を示すために，次の f を考える：

$$f(x,A) := \frac{|A - V(x)|}{1 + |A - V(x)|}, \quad (x,A) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \tag{4.89}$$

- $f\left(x, V_j(x)\right) \to 0$ 測度収束 $\Leftrightarrow V_j \to V$ 測度収束
- $\langle f(x,\cdot), \nu_x \rangle = 0 \Leftrightarrow \nu_x = \delta_{V(x)}$.

□

この補題を通して，Young 測度を見るだけで生成列が測度収束するかどうかがわかる．

4.4 勾配 Young 測度

Definition 4.16. $\nu \in \mathbf{Y}^p\left(\Omega;\mathbb{R}^{m\times d}\right)$ *(*ただし，これまでの話では $\mathbb{R}^N=\mathbb{R}^{m\times d}\cong\mathbb{R}^{md}$ だった）が $W^{1,p}$-勾配 *Young* 測度であるとは，ノルム有界な列 $\{u_j\}\subset W^{1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^m\right)$ が存在して，$\nabla u_j \overset{\mathbf{Y}}{\to} \nu$ が成り立つことを意味する．すなわち，$\{\nabla u_j\}$ は ν を生成する．このような勾配 *Young* 測度の空間を $\mathbf{GY}^p\left(\Omega;\mathbb{R}^{m\times d}\right)$ と表す．

注意：ν を生成するすべての関数列が勾配で書けるという意味ではない．勾配 Young 測度の例は Example 4.12 で紹介している．

Lemma 4.17. $\nu\in\mathbf{GY}^p\left(\Omega;\mathbb{R}^{m\times d}\right), p\in(1,\infty]$ に対して，$u\in \mathrm{W}^{1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^m\right)$ が $[\nu]=\nabla u$ を満たす関数ならば，次を満たすノルム有界な関数列 $\{u_j\}\subset W^{1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^m\right)$ が存在する：

$$\operatorname{supp}\left(u_j-u\right)\Subset\Omega \quad \textit{and} \quad \nabla u_j\overset{\mathbf{Y}}{\to}\nu. \tag{4.90}$$

さらに，$p\in(1,\infty)$ ならば，$\{\nabla u_j\}$ が L^p*-equiintegrable* であるようにできる．

Proof.（概要）

- 生成列 $\{v_j\}$ を一つとる．
- $V_j=M(|v_j|+|\nabla v_j|)$ とする．ここで，Mf は f の maximal function

> $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ に対する (Hardy-Littlewood) 極大関数 $Mf:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$（調和解析でよく使われる）
>
> $$(Mf)(x_0)=\sup_{r>0}\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}|f(x)|\,\mathrm{d}x,\quad x_0\in\mathbb{R}^d \tag{4.91}$$
>
> $p\in(1,\infty]$ ならば，$\|Mf\|_{L^p}\le C(d,p)\|f\|_{L^p}$.
> 任意の $K>0$ と $f\in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m\right), p\in(1,\infty]$ に対して Mf は $\{M(|f|+|\nabla f|)<K\}$ 上でリプシッツ連続.

- $-k$ と k の間で V_j を打ち切った関数 $\tau_k V_j$ を考える．
- その部分列をうまくとって，$W_k=\tau_k V_{j_k}$ が L^p-equiintegrable になるようにする．
- v_{j_k} は $S_k=\{x\in\Omega:\ V_{j_k}(x)\le k\}$ 上でリプシッツ連続で，この集合の外側にリプシッツなままで拡張して，w_k を得る．
- ∇w_k は W_k の equiintegrability を継承し，∇v_k と同じ Young 測度を生成することを示す．
- カットオフをかけた w_k よりさらに部分列 $\{u_j\}$ を取り出すことで，コンパクトな台も実現できる．

□

x に依らない勾配 Young 測度を等質（homogeneous）な勾配 Young 測度とよぶ．このような測度は次の平均化性質がある．

Lemma 4.18. 線形なトレースをもつ $u\in W^{1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^m\right)$ に対して $[\nu]=\nabla u$ を満たす $\nu\in\mathbf{GY}^p\left(\Omega;\mathbb{R}^{m\times d}\right)$, $p\in[1,\infty]$ ならば，任意のリプシッツ領域 $D\subset\mathbb{R}^d$ に対し等質な勾配 *Young* 測度 $\overline{\nu}\in\mathbf{GY}^p\left(D;\mathbb{R}^{m\times d}\right)$ が存在し，

$$\int h\,\mathrm{d}\overline{\nu}=\fint_\Omega\int h\,\mathrm{d}\nu_x\,\mathrm{d}x \tag{4.92}$$

が p-増加条件を満たす任意の連続な関数 $h:\mathbb{R}^{m\times d}\to\mathbb{R}$ について成り立つ（$p<\infty$）.
この結果は $\Omega=(-1/2,1/2)^d$ が d-次元立方体で u が周期境界条件を満たす設定でも成り立つ．

Proof. （概要）

- $u_j|_{\partial\Omega} = Fx$（線形関数）を満たし，$\{\nabla u_j\}$ が ν を生成するような $\{u_j\}$ をとる（前の補題より存在）.
- D を次のように被覆する：

$$D = Z^{(j)} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega\left(a_k^{(j)}, r_k^{(j)}\right), \qquad \left|Z^{(j)}\right| = 0,\ \ a_k^{(j)} \in D,\ \ 0 < r_k^{(j)} \leq 1/j,\ \ \Omega(a,r) := a + r\Omega \tag{4.93}$$

> Vitali の被覆定理： $\Omega, D \subset \mathbb{R}^d$ 有界開集合ならば，$a_k \in D, r_k > 0$（$k \in \mathbb{N}$）が存在して，
>
> $$D = Z \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\Omega\left(a_k, r_k\right)}, \quad \Omega\left(a_k, r_k\right) := a_k + r_k\Omega$$
>
> と書ける．ただし，$Z \subset D$ はルベーグ測度ゼロ集合.
> さらに，$r : D \to (0, \infty)$ に対して，$r_k < r\left(a_k\right)\ \forall k \in \mathbb{N}$ となるようにできる.

- 各パーツで v_j を u_j のスケーリングで定義する：

$$v_j(y) := r_k^{(j)} u_j\left(\frac{y - a_k^{(j)}}{r_k^{(j)}}\right) + Fa_k^{(j)} \quad \text{if } y \in \Omega\left(a_k^{(j)}, r_k^{(j)}\right)\ (k \in \mathbb{N}) \tag{4.94}$$

  線形な境界値のおかげで連続に張り合わされる.

- $\{\nabla v_j\}$ は勾配 Young 測度 $\overline{\nu}$ を生成する.
- この測度は等質であり，(4.92) を満たす.

□

Lemma 4.19. $u \in W^{1,p}\left(\Omega; \mathbb{R}^m\right), p \in [1, \infty]$ が線形なトレースをもつならば，等質な勾配 *Young* 測度 $\overline{\delta[\nabla u]} \in \mathbf{GY}^p\left(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d}\right)$ が存在し，

$$\int h\ \mathrm{d}\overline{\delta[\nabla u]} = \fint_{\Omega} h(\nabla u(x))\ \mathrm{d}x \tag{4.95}$$

が p-増加（$p < \infty$）するすべての連続な $h : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ について成り立つ.
$\Omega = (-1/2, 1/2)^d$ と周期的な境界値をもつ u についても成り立つ.

5　凸性の一般化

$$\mathscr{F}[u] := \int_\Omega f(x, \nabla u(x))\ \mathrm{d}x, \qquad u \in W_g^{1,p}\left(\Omega; \mathbb{R}^m\right), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d \tag{5.1}$$

の最小化を直接法を用いて考えたとき，汎関数 $\mathscr{F}$ の下半連続性が必要になるが，そのための十分条件として，被積分関数 f の ∇u の変数についての凸性があった．しかし，この条件にはいくつかの問題点がある：

- $d = 1$ または $m = 1$ のとき，f の凸性は $\mathscr{F}$ の下半連続性のための必要条件でもあるので，数学的に理論が閉じるが，$d > 1$ かつ $m > 1$ の場合は凸性が必要にならない．例として，

  $$\mathscr{F}[u] = \int_\Omega \det \nabla u(x)\ \mathrm{d}x, \qquad u \in W_0^{1,2}\left(\Omega; \mathbb{R}^2\right), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \tag{5.2}$$

  を考える．

  $$\mathscr{F}[u] = \int_\Omega \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \operatorname{div}\left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, -u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)\ \mathrm{d}x \tag{5.3}$$

  だから，ゼロのトレースを考慮してストークスの定理を用いると $\mathscr{F}$ が恒等的にゼロであることがわかる．実は，これはトレースがゼロでなくても成り立つ．つまり，$\mathscr{F}$ は下半連続である．しかし，det 関数は凸ではない：正則行列を二つの特異行列の和として書けるし，正則な行列でも反例が作れる：

  $$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

  このとき，$\det A = \det B = 8$，しかし，$\det(A/2 + B/2) = \frac{34}{4} > 8$.

- さらに，凸性は連続体力学の原理と相性が悪い．すなわち，エネルギー密度に対して以下の回転に対する不変性と変形なしの状態に対する単調性

  $$f(QA) = f(A) \quad \text{for all } Q \in \mathrm{SO}(d), A \in \mathbb{R}^{d\times d}, \tag{5.5}$$

  $$f(\alpha \mathrm{Id}) > f(\mathrm{Id}), \qquad \alpha \neq 1, \tag{5.6}$$

  を課すのが妥当（$\mathrm{SO}(d)$ は $\det = 1$ の直行行列，Id は恒等写像）であるが，凸な関数はこれを満たすことができない．実際，$\gamma \in (0, 2\pi)$ に対して，

  $$Q := \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2) \tag{5.7}$$

  とすると，f が凸ならば，

  $$f((\cos\gamma)\mathrm{Id}) = f\left(\frac{Q + Q^T}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(Q) + f\left(Q^T\right)\right) = f(\mathrm{Id}) \tag{5.8}$$

  となり，圧縮にエネルギーが必要という原理に反する．

5.1　凸性のさまざまな一般化の関係

Definition 5.1.

(1) 局所有界なボレル可測関数 $h : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ が準凸（*quasiconvex*）である：

$$h(A) \leq \fint_{B(0,1)} h(A + \nabla\psi(z))\ \mathrm{d}z \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{m\times d},\ \forall \psi \in W_0^{1,\infty}\left(B(0,1); \mathbb{R}^m\right). \tag{5.9}$$

(2) 局所有界なボレル可測関数 $h:\mathbb{R}^{m\times d}\to\mathbb{R}$ が *rank-one convex* であるとは，全ての *rank-one* 直線に沿って凸である，という意味．つまり，

$$h(\theta A+(1-\theta)B)\le\theta h(A)+(1-\theta)h(B)\qquad \forall A,B\in\mathbb{R}^{m\times d}\ \ \textit{such that}\ \ \operatorname{rank}(A-B)\le 1,\ \ \forall\theta\in(0,1). \tag{5.10}$$

(3) 関数 $h:\mathbb{R}^{3\times 3}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ が多凸（*polyconvex*）であるとは，

$$h(A)=H(A,\operatorname{cof}A,\det A),\quad A\in\mathbb{R}^{3\times 3}, \tag{5.11}$$

の形で書けて，$H:\mathbb{R}^{3\times 3}\times\mathbb{R}^{3\times 3}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ が $\mathbb{R}^{3\times 3}\times\mathbb{R}^{3\times 3}\times\mathbb{R}\cong\mathbb{R}^{19}$ 上の関数として凸である．

Remark 5.2.

- （準凸）いくつかの条件があるが，$f(x,\cdot)$ が準凸であることは $\mathscr{F}$ の下半連続性のための必要十分条件になる．
- （準凸）準凸性の定義で $B(0,1)$ を任意の有界リプシッツ領域で置き換えてもよい．また，h が p-増加ならば，テスト関数を $\psi\in W_0^{1,p}(\Omega)$ に広げてもよい．
- （準凸）準凸性の物理的な解釈：$d=m=3$ として，変形していない状態で $\Omega:=B(0,1)$ を占める弾性体の変形 $y:B(0,1)\to\mathbb{R}^3$ による弾性エネルギーのモデルが次で与えられるとする：

$$\mathscr{F}[y]=\int_{B(0,1)}h(\nabla y(x))\,\mathrm{d}x,\quad y\in W^{1,\infty}\left(B(0,1);\mathbb{R}^3\right). \tag{5.12}$$

アフィンな変形 $y_a(x)=y_0+Ax$, $y_0\in\mathbb{R}^3, A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ を考えると，h が準凸ならば，

$$\mathscr{F}[y_a]=\int_{B(0,1)}h(A)\,\mathrm{d}x\le\int_{B(0,1)}\fint_{B(0,1)}h(A+\nabla\psi(z))\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=\int_{B(0,1)}h(A+\nabla\psi(z))\,\mathrm{d}z=\mathscr{F}[y_a+\psi] \tag{5.13}$$

が任意の $\psi\in W_0^{1,\infty}\left(B(0,1);\mathbb{R}^3\right)$ に対して成り立つ．すなわち，エネルギーの観点からアフィンな変形は内部変形している状態より常に好ましいということになり，実際の材料では合理的な仮定である．

- （*rank-one* 凸）$F\in\mathbb{R}^{m\times d}$ が *rank one* であることは次の条件と同値である：$a\in\mathbb{R}^m\backslash\{0\}, b\in\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ が存在して，$F=a\otimes b=ab^T$．
  また，(5.10) が成り立てば，h は自動的に局所有界になることが示せる．
- *(rank-one* 凸，準凸）$d=1$ または $m=1$ のとき，*rank-one* 凸性は凸性と同値であるため，準凸性とも同値になる．
- （多凸）弾性体のモデルの多くは多凸である．例えば，
  - 圧縮性 *neo-Hook* 材料：

$$f(A):=a|A|^2+\Gamma(\det A),\qquad a>0,\ \ \Gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\ \text{凸} \tag{5.14}$$

  - 圧縮性 *Mooney-Rivlin* 材料

$$f(A):=a|A|^2+b|\operatorname{cof}A|^2+\Gamma(\det A),\qquad a,b>0 \tag{5.15}$$

$$\Gamma(d)=\begin{cases}\alpha d^2-\beta\log d & \textit{if } d>0\\ +\infty & \textit{if } d\le 0\end{cases},\qquad \alpha,\beta>0 \tag{5.16}$$

– *Ogden* 材料（*Mooney-Rivlin* の一般化）

Theorem 5.3.

(1) $h : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ が凸ならば，準凸である．この逆は成立しない．

(2) $h : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ が準凸ならば，*rank-one* 凸である．この逆は *2* 次形式の場合は成り立つが，一般には成立しない．

(3) $h : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が凸ならば，多凸である．この逆は成立しない．

(4) $h : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$ が多凸ならば，準凸である．この逆は成立しない．

まとめると，

$$\text{凸} \quad \subsetneq \quad \text{多凸} \quad \subsetneq \quad \text{準凸} \quad \subsetneq \quad \text{rank-one 凸}$$

Proof.

(1) h が凸であるとする．固定した $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ と $\psi \in W_0^{1,\infty}(B(0,1);\mathbb{R}^m)$ に対してラドン測度 $\mu \in \mathscr{M}\left(\mathbb{R}^{m\times d}\right)$ を次のように定義する：

$$\langle h, \mu\rangle = \fint_{B(0,1)} h(A + \nabla\psi(x))\ \mathrm{d}x, \qquad h \in C_0\left(\mathbb{R}^{m\times d}\right). \tag{5.17}$$

実際，$|\langle h,\mu\rangle| \le \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{m\times d})}$ という有界性より μ は C_0 の双対 $C_0\left(\mathbb{R}^{m\times d}\right)^* \cong \mathscr{M}\left(\mathbb{R}^{m\times d}\right)$（リースの表現定理）の元である．さらに，$\mu$ は確率測度である：$\langle h,\mu\rangle \ge 0$ for $h \ge 0$，$\langle \mathbb{1},\mu\rangle = 1$ は明らか．

μ の重心 $[\mu]$ は

$$[\mu] = \langle \mathrm{id}, \mu\rangle = A + \fint_{B(0,1)} \nabla\psi(x)\ \mathrm{d}x = A. \tag{5.18}$$

h は凸だから，Jensen の不等式より

$$h(A) = h([\mu]) \le \langle h,\mu\rangle = \fint_{B(0,1)} h(A + \nabla\psi(x))\ \mathrm{d}x. \tag{5.19}$$

> Jensen の不等式：$\mu \in \mathscr{M}^1(\mathbb{R}^N)$ で，$h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ が凸ならば，
>
> $$h([\mu]) \le \langle h,\mu\rangle = \int h(A)\ \mathrm{d}\mu(A).$$
>
> 証明のアイデア：h が凸なので，$A = [\mu]$ において支持超平面が存在する：
>
> $$h(A) \ge h([\mu]) + D\cdot(A - [\mu]), \qquad \forall A \in \mathbb{R}^N. \tag{5.20}$$
>
> よって，
>
> $$\int h(A)\ \mathrm{d}\mu(A) \ge \int \left(h([\mu]) + D\cdot(A-[\mu])\right)\ \mathrm{d}\mu(A) = h([\mu]) + D\cdot\int (A-[\mu])\ \mathrm{d}\mu(A) = h([\mu]) \tag{5.21}$$

逆が成り立たないのは，$h(A) = \det(A)$ という反例でわかる．実際，後で示すように，

$$\int_\Omega \det\nabla u(x)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \det\nabla v(x)\ \mathrm{d}x \qquad u, v \in W^{1,d}(\Omega;\mathbb{R}^d),\ u - v \in W_0^{1,d}(\Omega;\mathbb{R}^d) \tag{5.22}$$

したがって，

$$\det(A)|B(0,1)| = \int_{B(0,1)} \det(A)\ \mathrm{d}z = \int_{B(0,1)} \det(A+\nabla\psi(z))\ \mathrm{d}z, \qquad z \in W_0^{1,\infty}(B(0,1);\mathbb{R}^d). \tag{5.23}$$

Example 5.4. (Alibert-Dacorogna-Marcellini 1988[7, 78]) For $d = m = 2$ and $\gamma \in \mathbb{R}$ define

$$h_\gamma(A) := |A|^2\left(|A|^2 - 2\gamma \det A\right), \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}. \tag{5.24}$$

For this function it is known that - h_γ is convex if and only if $|\gamma| \le \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.94$, - h_γ is rank-one convex if and only if $|\gamma| \le \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.15$, - h_γ is quasiconvex if and only if $|\gamma| \le \gamma_{\mathrm{QC}}$ for some $\gamma_{\mathrm{QC}} \in \left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$. It is currently unknown whether $\gamma_{\mathrm{QC}} = 2/\sqrt{3}$.

(2) $A, B \in \mathbb{R}^{m\times d}$ を $B - A = a \otimes n$, $a \in \mathbb{R}^m\backslash\{0\}$, $n \in \mathbb{S}^{d-1}$ を満たすようにとる．$h(\theta A + (1-\theta)B) \le \theta h(A) + (1-\theta)h(B)$ が成り立つことを示したい．Q_n を中心が原点にある単位立方体として，n がその二つの面の法線ベクトルになるようにする．また，$\theta \in (0,1)$ とする．

$F := \theta A + (1-\theta)B$ とおいて，$u_j \in W_0^{1,\infty}(Q_n;\mathbb{R}^m)$ を次のように定義する：

$$u_j(x) := Fx + \frac{1}{j}\varphi_0(jx\cdot n - \lfloor jx\cdot n\rfloor)a, \quad x \in Q_n \tag{5.25}$$

ただし，

$$\varphi_0(t) := \begin{cases} -(1-\theta)t & \text{if } t \in [0,\theta], \\ \theta t - \theta & \text{if } t \in (\theta, 1], \end{cases} \tag{5.26}$$

この列 $\{u_j\}$ を n 方向の laminate と呼ぶ．

$$\nabla u_j(x) = \begin{cases} F - (1-\theta)a\otimes n = A & \text{if } jx\cdot n - \lfloor jx\cdot n\rfloor \in (0,\theta) \\ F + \theta a \otimes n = B & \text{if } jx\cdot n - \lfloor jx\cdot n\rfloor \in (\theta, 1) \end{cases} \tag{5.27}$$

より，

$$\lim_{j\to\infty} \fint_{Q_n} h\left(\nabla u_j(x)\right)\ \mathrm{d}x = \theta h(A) + (1-\theta)h(B). \tag{5.28}$$

φ_0 が一様有界だから，$u_j \overset{*}{\rightharpoonup} Fx$ in $W^{1,\infty}$．列 $\{u_j\}$ をアフィン境界条件 $v_j|_{\partial Q} = Fx$ を満たす別の列 $\{v_j\} \subset W_{Fx}^{1,\infty}(Q_n;\mathbb{R}^m)$ で置き換えて，

$$\lim_{j\to\infty} \fint_{Q_n} h\left(\nabla v_j(x)\right)\mathrm{d}x = \theta h(A) + (1-\theta)h(B) \tag{5.29}$$

がそのまま成り立つようにできるということを後半で示す．すると，準凸性より（領域を Q_n にしてもよいという事実を使っている），すべての $j \in \mathbb{N}$ に対して，

$$h(F) \le \fint_{Q_n} h\left(F + \nabla(v_j(z) - Fz)\right)\ \mathrm{d}z = \fint_{Q_n} h\left(\nabla v_j(z)\right)\ \mathrm{d}z. \tag{5.30}$$

したがって，

$$h(\theta A + (1-\theta)B) \le \theta h(A) + (1-\theta)h(B) \tag{5.31}$$

が成立し，h は rank-one convex である．

あとは，アフィンな境界値をもつ列 $\{v_j\}$ を構成すればよい．これにはカットオフ関数 $\{\rho_j\} \subset C_c^\infty(Q_n;[0,1])$ を用いる．ただし，集合 $G_j = \{x \in \Omega : \rho_j(x) = 1\}$ が $|Q_n\backslash G_j| \to 0$ as $j \to \infty$ を満たすように ρ_j をとる．

$$v_{j,k}(x) := \rho_j(x)u_k(x) + (1-\rho_j(x))\,Fx, \quad x \in \Omega, \tag{5.32}$$

とおくと，$v_{j,k} \in W^{1,\infty}(Q_n;\mathbb{R}^m)$ であり，∂Q_n の近くで $v_{j,k}(x) = Fx$ が成り立つ．

$$\nabla v_{j,k}(x) = \rho_j(x)\nabla u_k(x) + (1-\rho_j(x))\,F + (u_k(x) - Fx) \otimes \nabla\rho_j(x). \tag{5.33}$$

を考えると，$u_k \to Fx$ が一様収束しているので，j を固定して，

$$\limsup_{k\to\infty} \|\nabla v_{j,k}\|_{L^\infty(Q_n)} \le \|\nabla u_k\|_{L^\infty(Q_n)} + |F| < \infty \tag{5.34}$$

がわかる．よって，各 $j \in \mathbb{N}$ に対して $k(j) \in \mathbb{N}$ を選んで，$\left\|\nabla v_{j,k(j)}\right\|_{L^\infty(Q_n)}$ が j に依らない定数でおさえられるようにできる h が局所有界としているので，定数 $C > 0$ があって，

$$\left\|h\left(\nabla u_{k(j)}\right)\right\|_{L^\infty(Q_n)} + \left\|h\left(\nabla v_{j,k(j)}\right)\right\|_{L^\infty(Q_n)} \le C \qquad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{5.35}$$

これより，$v_j := v_{j,k(j)}$ とおけば，

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty}\int_{Q_n} \left|h\left(\nabla v_j\right) - h\left(\nabla u_{k(j)}\right)\right| \,\mathrm{d}x &\le \lim_{j\to\infty}\int_{Q_n\setminus G_j} \left|h\left(\nabla u_{k(j)}\right)\right| + \left|h\left(\nabla v_{j,k(j)}\right)\right| \,\mathrm{d}x \\
&\le \lim_{j\to\infty} C\,|Q_n\setminus G_j| \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5.36}$$

を得るので，証明の前半で $\{u_j\}$ を $\{v_j\}$ で置き換える操作が正当化された．

2 次形式を除いて，逆が成り立たない反例は V. Šverák による．この反例は準凸でない rank-one convex な関数 $h : \mathbb{R}^{3\times 2} \to \mathbb{R}$ を構成する．

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \\ z & z \end{pmatrix} : x,y,z \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{3\times 2}, \qquad g : L \to \mathbb{R},\ \ g\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \\ z & z \end{pmatrix} := -xyz \tag{5.37}$$

$$\mathbf{P} : \mathbb{R}^{3\times 2} \to L, \qquad \mathbf{P}(A) := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \\ (e+f)/2 & (e+f)/2 \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \tag{5.38}$$

として，$\alpha, \beta > 0$ に対して，

$$h_{\alpha,\beta}(A) := g(\mathbf{P}(A)) + \alpha\left(|A|^2 + |A|^4\right) + \beta|A - \mathbf{P}(A)|^2. \tag{5.39}$$

とすると，

- $\alpha > 0$ が十分小さければア，任意の $\beta > 0$ に対して $h_{\alpha,\beta}$ は準凸にならない
- 任意の $\alpha > 0$ に対して $\beta > 0$ が存在し，$h_{\alpha,\beta}$ は rank-one convex である

を示せば，適切な α, β を選ぶことによって望まれる性質を持つ関数 h が得られる．

この例をきっかけに，rank-one 凸性と違って，準凸性は局所的な性質ではないことがわかった（各点での微分を含む振る舞いを見ても判定できない）．

(3) h が凸ならば，$H(A, \operatorname{cof} A, \det A) = h(A)$ とすることで h が polyconvex であることがすぐに従う．一方，$h(A) = \det A$ という関数を考えると，明らかに polyconvex であり，凸ではないので，逆の含意が成立しない．

(4) $h(A) = H(A, \operatorname{cof} A, \det A)$ とする．$A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ と $\psi \in W_0^{1,\infty}\left(B(0,1);\mathbb{R}^3\right)$ に対して，$w = Ax + \psi$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\fint_{B(0,1)} h(A+\nabla\psi)\ \mathrm{d}x &= \fint_{B(0,1)} H(\nabla w, \operatorname{cof}\nabla w, \det\nabla w)\ \mathrm{d}x \\
&\geq H\left(\fint_{B(0,1)} \nabla w\ \mathrm{d}x, \fint_{B(0,1)} \operatorname{cof}\nabla w\ \mathrm{d}x, \fint_{B(0,1)} \det\nabla w\ \mathrm{d}x\right) \\
&= H\left(\fint_{B(0,1)} (A+\nabla\psi)\ \mathrm{d}x, \fint_{B(0,1)} \operatorname{cof}(A+\nabla\psi)\ \mathrm{d}x, \fint_{B(0,1)} \det(A+\nabla\psi)\ \mathrm{d}x\right) \\
&= H(A, \operatorname{cof} A, \det A) \\
&= h(A), \qquad (5.40)
\end{aligned}$$

最初の不等式は Jensen の不等式 $H(\int g(x)\ \mathrm{d}\mu(x)) \leq \int H(g(x))\ \mathrm{d}\mu(x)$ から従う：$\mu \in \mathscr{M}^1(\mathbb{R}^3)$ を $\mu = \frac{1}{|B(0,1)|}\mathscr{L}^3 \llcorner B(0,1)$ として，H の凸性を使う．また，下から二つ目の等式は小行列式の準アフィン性 $M(A) = \fint_{B(0,1)} M(A+\nabla\psi(z))\ \mathrm{d}z$ より従う（Corollary 5.5）．

逆が成り立たない反例として，

$$g(A) = \operatorname{dist}(A, \{-F, F\})^p, \qquad A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad (5.41)$$

の準凸包 $h = Qg$ が知られている．ただし，F は階数 2 以上の 3×3-行列で $p \in (1,2)$. h は準凸であるが，polyconvex でないことが示せる．

□

Lemma 5.4. $M : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ を $(r\times r)$-小行列式（$r \in \{1, \ldots, \min\{d,m\}\}$）とする．$u, v \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m), p \in [r,\infty]$ で，$u - v \in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ ならば，次が成り立つ：

$$\int_\Omega M(\nabla u(x))\ \mathrm{d}x = \int_\Omega M(\nabla v(x))\ \mathrm{d}x. \qquad (5.42)$$

つまり，小行列式は積分の値が引数の境界値にしか依存しないような被積分関数である．このような被積分関数のことを null-Lagrangian と呼ぶ．$(r\times r)$-小行列式とは，元の行列から r 行と r 列を選んでできた行列の行列式のことである．

Proof.

- まず，u, v が滑らかで，$u - v$ の台が Ω のコンパクトな部分集合である場合に示せばよいことを見る．実際，$u, v \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ を任意の精度で $W^{1,p} \cap C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ の関数 $\widetilde{u}, \widetilde{v}$ で近似できて，さらにカットオフをかけて $\widetilde{\widetilde{v}} = \rho_j\widetilde{v} + (1-\rho_j)\widetilde{u}$ を考えれば，$\widetilde{u} - \widetilde{\widetilde{v}} = \rho_j(\widetilde{u} - \widetilde{v}) \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ となる．

  このとき，近似列 u_j の $W^{1,p}$-での収束が $\int_\Omega M(\nabla u_j)$ に遺伝することを示す必要がある．すなわち，

$$u_j \to u \quad \text{in } W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \qquad \Rightarrow \qquad \int_\Omega M(\nabla u_j(x))\ \mathrm{d}x \to \int_\Omega M(\nabla u(x))\ \mathrm{d}x. \qquad (5.43)$$

  これを見るためにまず，$|M(A)| \leq |A|^r$ が Hadamard の不等式より従うことに注意する．

> Hadamard の不等式：列 $B_1, \ldots, B_n$ をもつ $n\times n$-行列 B に対して，
>
> $$|\det B| \leq \prod_{i=1}^n |B_i|. \qquad (5.44)$$

$g_j(x) = |\nabla u_j|^r$ とおくと，$r \leq p$ より，g_j は L^1-ノルムで $|\nabla u|^r$ に収束する．よって，Pratt の定理より，$M(\nabla u_j)$ は L^1-ノルムで $M(\nabla u)$ に収束する．

> Pratt の定理：$f_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^N, j \in \mathbb{N}$ をルベーグ可測関数とする．$f_j \to f$ が各点収束し，関数列 $\{g_j\} \subset L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ が存在し，$g_j \to g$ in L^1，$|f_j| \leq g_j$ を満たすならば，$f_j \to f$ in L^1 が成り立つ．
> 証明は Fatou の補題を用いる．

各点収束が仮定されているため，部分列を取り出し，任意の部分列に対して成り立つという議論を経る必要がある．

- 次に，$M(\nabla u)$ がある関数の発散の形で書けることに気づけば十分である．例えば，$d = m = r = 2$ のとき，$u = (u^1, u^2)^T$ とおくと，

$$\det \nabla u = \partial_1 u^1 \partial_2 u^2 - \partial_2 u^1 \partial_1 u^2 = \partial_1 \left(u^1 \partial_2 u^2\right) - \partial_2 \left(u^1 \partial_1 u^2\right) = \operatorname{div}\left(u^1 \partial_2 u^2, -u^1 \partial_1 u^2\right). \tag{5.45}$$

他の d, m, r については帰納法で示すことができるが，計算が煩雑のため，ここでは省略する．示せたとして，$M(\nabla u) = \operatorname{div} G(u, \nabla u)$ を満たすような G があるので，$\operatorname{supp}(u - v) \Subset \Omega$ を考慮して，ガウスの発散定理を適用すると，

$$\int_\Omega M(\nabla u)\ \mathrm{d}x = -\int_{\partial\Omega} G(u, \nabla u) \cdot n\ \mathrm{d}\mathscr{H}^{d-1} = -\int_{\partial\Omega} G(v, \nabla v) \cdot n\ \mathrm{d}\mathscr{H}^{d-1} = \int_\Omega M(\nabla v)\ \mathrm{d}x. \tag{5.46}$$

- 微分形式と一般化してストークスの定理を用いれば，シンプルな証明が可能である．$x^1, \ldots, x^d$ と $u^1, \ldots, u^m$ を入れ替えることにより，小行列式が ∇u の左上に位置する $r \times r$-行列の行列式であるとしてもよい．このとき，

$$\begin{aligned} M(\nabla u) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d &= du^1 \wedge \cdots \wedge du^r \wedge dx^{r+1} \wedge \cdots \wedge dx^d \\ &= d\left(u^1 \wedge du^2 \wedge \cdots \wedge du^r \wedge dx^{r+1} \wedge \cdots \wedge dx^d\right). \end{aligned} \tag{5.47}$$

のように，外微分で書ける．よって，Stokes の定理より，

$$\begin{aligned} \int_\Omega M(\nabla u) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d &= \int_\Omega d\left(u^1 \wedge du^2 \wedge \cdots \wedge du^r \wedge dx^{r+1} \wedge \cdots \wedge dx^d\right) \\ &= \int_{\partial\Omega} u^1 \wedge du^2 \wedge \cdots \wedge du^r \wedge dx^{r+1} \wedge \cdots \wedge dx^d \end{aligned} \tag{5.48}$$

左辺は $\partial\Omega$ の近傍における u の値にしか依らないことがわかる．

□

Corollary 5.5. すべての小行列式 $M : \mathbb{R}^{m \times d} \to \mathbb{R}$ は準アフィン（*quasiaffine*）である，すなわち，M と $-M$ は共に準凸である．

Proof. $F \in \mathbb{R}^{m \times d}$ と $\psi \in W_0^{1,\infty}\left(B(0,1); \mathbb{R}^m\right)$ とすると，上の Lemma より，

$$M(F) = \fint_{B(0,1)} M(F)\ \mathrm{d}z = \fint_{B(0,1)} M(F + \nabla\psi(z))\ \mathrm{d}z. \tag{5.49}$$

これは求めた関係式である． □

Lemma 5.6. 準凸性の定義において，領域 $B(0,1)$ を任意の有界リプシッツ領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ で置き換えてもかまわない．

Proof. $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ ならば，$\widetilde{\psi} \in W_0^{1,p}(B(0,1);\mathbb{R}^m)$ が存在して，任意の $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ と可測な $h:\mathbb{R}^{m\times d}\to\mathbb{R}$ に対して

$$\int_\Omega h(A+\nabla\psi)\,\mathrm{d}x = \int_{B(0,1)} h(A+\nabla\tilde{\psi})\,\mathrm{d}y \tag{5.50}$$

が成り立つことを示す（どちらかの積分が存在して有界ならば）.

Vitali の被覆定理（証明は [3], Appendix 10）を用いて，$B(0,1)$ を縮尺を変えた Ω のコピーで覆う：

$$B(0,1) = Z \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega(a_k, r_k), \quad |Z| = 0 \tag{5.51}$$

ただし，$a_k \in \Omega,\ r_k > 0,\ \Omega(a_k,r_k) = a_k + r_k\Omega$.

$$\widetilde{\psi}(y) := r_k\psi\left(\frac{y-a_k}{r_k}\right) \quad \text{if} \quad y \in \Omega(a_k,r_k) \tag{5.52}$$

と定義すると，可測関数 $h:\mathbb{R}^{m\times d}\to\mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}\int_{B(0,1)} h(A+\nabla\widetilde{\psi})\,\mathrm{d}y &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega(a_k,r_k)} h\left(A+\nabla\psi\left(\frac{y-a_k}{r_k}\right)\right)\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} r_k^d \int_\Omega h(A+\nabla\psi)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{|B(0,1)|}{|\Omega|}\int_\Omega h(A+\nabla\psi)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5.53}$$

最後の等式は $\sum_k r_k^d|\Omega| = |B(0,1)|$ より得られる．これで (5.50) が示された．また，$\widetilde{\psi} \in W_0^{1,p}\left(\widetilde{\Omega};\mathbb{R}^m\right)$ もこれよりわかる． □

5.2 下半連続性と最小値の存在

弱下半連続性の大まかな流れは次のようである：$u_j \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ をとって，∇u_j が生成し，∇u を重心にもつ Young 測度を ν とする．このとき，

$$\liminf_{j\to\infty}\int_\Omega f(x,\nabla u_j(x))\,\mathrm{d}x \geq \langle\langle f,\nu\rangle\rangle = \int_\Omega\int f(x,A)\,\mathrm{d}\nu_x(A)\,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega f(x,\nabla u(x))\,\mathrm{d}x.$$

最初の不等式は以前に示した Young 測度の下半連続性である：

Proposition 4.8 ノルム有界な列 $\{V_j\}\subset L^p\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$, $p\in[1,\infty]$ が Young 測度 $\nu\in\mathbf{Y}^p\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$ を生成するとする．$f:\Omega\times\mathbb{R}^N\to[0,\infty)$ がカラテオドリ関数ならば，

$$\liminf_{j\to\infty}\int_\Omega f(x,V_j(x))\,\mathrm{d}x = \liminf_{j\to\infty}\langle\langle f,\delta[V_j]\rangle\rangle \geq \langle\langle f,\nu\rangle\rangle. \tag{5.54}$$

二つ目の不等式は Young 測度に対する Jensen の不等式である．ただし，固定した x に対して ν_x が勾配 Young 測度であることを確認する必要がある．Jensen の不等式を証明して，ν_x が勾配 Young 測度であることを確かめてから，弱下半連続性の証明を完成させよう．

Lemma 5.7. $\nu\in\mathbf{GY}^p\left(B(0,1);\mathbb{R}^{m\times d}\right)$, $p\in(1,\infty]$ が等質な勾配 *Young* 測度ならば，p-増加する任意の準凸な関数 $h:\mathbb{R}^{m\times d}\to\mathbb{R}$ に対して

$$h([\nu]) \leq \int h\,\mathrm{d}\nu. \tag{5.55}$$

$p=\infty$ のとき，p-増加は自動的に満たされる．また，h が凸ならば，上の主張は通常の Jensen の不等式となる．ただし，凸な場合は Jensen の不等式は勾配 Young 測度に限定されない．

Proof. $F=[\nu]$ とおいて（ν 等質より定数行列），$\{\nabla u_j\}$ が L^p-equiintegrable（$p<\infty$ のとき）で，∇u_j が ν を生成する（$\nabla u_j \overset{\mathrm{Y}}{\to} \nu$ ）ような列 $\{u_j\}\subset W^{1,p}_{Fx}\left(B(0,1);\mathbb{R}^m\right)$ をとってくる．この列の存在は補題 4.17 により保証される．h の準凸性より，

$$h(F)\le \fint_\Omega h\left(\nabla u_j(x)\right)\,\mathrm{d}x,\qquad j\in\mathbb{N}. \tag{5.56}$$

ここで，h が p-増加ならば，準凸性の定義で $\psi\in W^{1,\infty}_0$ を $\psi\in W^{1,p}_0$ に置き換えてもよい，という事実を使った（これは $W^{1,\infty}_0$ の $W^{1,p}_0$ における稠密性より従う）．

h は p-増加であるため，$|h(\nabla u_j(x))|\le C(1+|\nabla u_j(x)|^p)$ が成立し，∇u_j が L^p-equiintegrable のため，$h(\nabla u_j(x))$ は L^1-equiintegrable である．よって，$j\to\infty$ で Young 測度の基本定理が適用できて，

$$h(F)\le \fint_\Omega\int h\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}x=\int h\,\mathrm{d}\nu. \tag{5.57}$$

最後の等式は ν が等質であることから従う． □

Remark 5.8. 面白いことに，この逆も正しく，勾配 *Young* 測度の特徴づけを与える：
Theorem (Kinderlehrer-Pedregal)　*Young* 測度 $\nu\in\mathbf{Y}^p\left(\Omega;\mathbb{R}^{m\times d}\right), p\in(1,\infty]$ に対して，$u\in W^{1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^m\right)$ が存在して，$[\nu]=\nabla u$ が成り立つとする．このとき，ν は勾配 *Young* 測度 $\nu\in\mathbf{GY}^p\left(\Omega;\mathbb{R}^{m\times d}\right)$ であるのは，ほとんどすべての $x\in\Omega$ と p-増加する準凸な $h:\mathbb{R}^{m\times d}\to\mathbb{R}$ に対して *Jensen* 型不等式

$$h(\nabla u(x))\le\int h\,\mathrm{d}\nu_x \tag{5.58}$$

が成り立つときとそのときのみである．
実際，任意の *Young* 測度が勾配 *Young* 測度であるとは限らない．等質でない測度の場合はこれは明らかである：$\delta[V]$, $\operatorname{curl} V\neq 0$ を考えれば，この *Young* 測度の重心 V は勾配ではないから，勾配 *Young* 測度ではない．等質な *Young* 測度の重心は定数で勾配で書けるから，明らかではないが，勾配 *Young* 測度にならないものもある．例えば，$A,B\in\mathbb{R}^{m\times d}$, $A\neq B$, $\theta\in(0,1)$ に対して，

$$\nu=\theta\delta_A+(1-\theta)\delta_B\in\mathbf{Y}^\infty\left(B(0,1);\mathbb{R}^{m\times d}\right) \tag{5.59}$$

とすると，$\operatorname{rank}(A-B)\le 1$ のとき ν は勾配 *Young* 測度であるが，$\operatorname{rank}(A-B)\ge 2$ のときは，勾配 *Young* 測度ではない．

Corollary 5.9. $p\in(1,\infty]$ に対して $\nu\in\mathbf{GY}^p\left(\Omega;\mathbb{R}^{m\times d}\right)$ を等質な勾配 *Young* 測度とする．このとき，$h:\mathbb{R}^{m\times d}\to\mathbb{R}$ が p-増加する準アフィンな関数ならば，

$$h([\nu])=\int h\,\mathrm{d}\nu. \tag{5.60}$$

特に，この等式は任意の小行列式に対して成り立つ．

次に，勾配 Young 測度 ν_x が与えられたとき，固定した a.e. x_0 に対して ν_{x_0} が等質な勾配 Young 測度であることを示す．上で触れたように，これは弱下半連続性を示すときに Jensen の不等式を適用するのに必要な事実である．

Proposition 5.10. $\nu=\{\nu_x\}_x\in\mathbf{GY}^p\left(\Omega;\mathbb{R}^{m\times d}\right)$, $p\in[1,\infty)$ が勾配 *Young* 測度ならば，ほとんどすべての $x_0\in\Omega$ に対して，確率測度 ν_{x_0} は等質な勾配 *Young* 測度 $\nu_{x_0}\in\mathbf{GY}^p\left(B(0,1);\mathbb{R}^{m\times d}\right)$ である．

Proof. Lemma 4.9 のように，$C_0(\Omega)\times C_0(\mathbb{R}^{m\times d})$ を生成する可算集合 $\{\varphi_k\otimes h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ をとる．$x_0\in\Omega$ をすべての関数 $x\mapsto\langle h_k,\nu_x\rangle, k\in\mathbb{N}$ のルベーグ点となるようにとる，すなわち，

$$\lim_{r\downarrow 0}\fint_{B(x_0,r)}|\langle h_k,\nu_x\rangle-\langle h_k,\nu_{x_0}\rangle|\ \mathrm{d}y=\lim_{r\downarrow 0}\fint_{B(0,1)}|\langle h_k,\nu_{x_0+ry}\rangle-\langle h_k,\nu_{x_0}\rangle|\ \mathrm{d}y=0. \tag{5.61}$$

$\langle h_k,\nu_x\rangle$ は x の関数として積分可能だからルベーグの微分定理より，固定した k に対して，ほとんどすべての x がルベーグ点で，h_k は可算個しかないので，やはりほとんどすべての $x\in\Omega$ がこの性質をもつ．$\{\nabla u_j\}$ が ν を生成するような $\{u_j\}\subset W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ に対して，

$$v_j^{(r)}(y):=\frac{u_j\left(x_0+ry\right)-[u_j]_{B(x_0,r)}}{r},\quad y\in B(0,1) \tag{5.62}$$

とおく（blow-up technique）．ただし，$[u]_{B(x_0,r)}=\fint_{B(x_0,r)}u\ \mathrm{d}x$．変数変換をして，

$$\begin{aligned}\int_{B(0,1)}\varphi_k(y)h_k\left(\nabla v_j^{(r)}(y)\right)\ \mathrm{d}y &= \int_{B(0,1)}\varphi_k(y)h_k\left(\nabla u_j\left(x_0+ry\right)\right)\ \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{r^d}\int_{B(x_0,r)}\varphi_k\left(\frac{x-x_0}{r}\right)h_k\left(\nabla u_j(x)\right)\ \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{5.63}$$

を得るので，極限 $j\to\infty$ と $r\downarrow 0$ をこの順番でとると，

$$\begin{aligned}\lim_{r\downarrow 0}\lim_{j\to\infty}\int_{B(0,1)}\varphi_k(y)h_k\left(\nabla v_j^{(r)}(y)\right)\ \mathrm{d}y &= \lim_{r\downarrow 0}\frac{1}{r^d}\int_{B(x_0,r)}\varphi_k\left(\frac{x-x_0}{r}\right)\langle h_k,\nu_x\rangle\ \mathrm{d}x \\ &= \lim_{r\downarrow 0}\int_{B(0,1)}\varphi_k(y)\langle h_k,\nu_{x_0+ry}\rangle\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{B(0,1)}\varphi_k(y)\langle h_k,\nu_{x_0}\rangle\ \mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{5.64}$$

さらに，

$$\int_{B(0,1)}\left|\nabla v_j^{(r)}\right|^p\ \mathrm{d}y=\int_{B(0,1)}\left|\nabla u_j\left(x_0+ry\right)\right|^p\ \mathrm{d}y=\frac{1}{r^d}\int_{B(x_0,r)}|\nabla u_j(x)|^p\ \mathrm{d}x \tag{5.65}$$

において，最後の積分は固定した r に対して j について一様有界である．測度 $|\nabla u_j|^p\,\mathscr{L}^d\llcorner\Omega$ を $C_0(\mathbb{R}^d)^*$ の元とみなすと，Banach-Alaoglu の定理より（C_0 は可分），弱$*$収束する部分列があり，その収束先を $\lambda\in\mathscr{M}^+(\overline{\Omega})$ とする．

Besicovitch の微分定理より，

$$\limsup_{r\downarrow 0}\frac{\lambda\left(\overline{B\left(x_0,r\right)}\right)}{r^d}<\infty \tag{5.66}$$

は $\mathscr{L}^d$-ほとんどすべての $x_0\in\Omega$ について成り立つので，x_0 をこれを満たす x_0 にしぼることができる．

> Besicovitch の微分定理：$\mu\in\mathscr{M}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^N\right),\nu\in\mathscr{M}^+\left(\mathbb{R}^d\right)$ ならば，ν の台に含まれる ν-ほとんどすべての $x_0\in\mathbb{R}^d$ に対して
>
> $$\frac{d\mu}{d\nu}\left(x_0\right):=\lim_{r\downarrow 0}\frac{\mu\left(B\left(x_0,r\right)\right)}{\nu\left(B\left(x_0,r\right)\right)} \tag{5.67}$$
>
> は存在する．さらに，μ は次のように分解できる：$\mu=\dfrac{d\mu}{d\nu}\nu+\mu^s$. ただし，$\mu^s=\mu\llcorner E$ は ν-測度ゼロ集合 E に台をもつ．
>
> $$E:=\left(\mathbb{R}^d\backslash\operatorname{supp}\nu\right)\cup\left\{x\in\operatorname{supp}\nu:\lim_{r\downarrow 0}\frac{|\mu|(B(x,r))}{\nu(B(x,r))}=\infty\right\} \tag{5.68}$$
>
> $\mu\ll\nu$ ならば，$\mu=\frac{d\mu}{d\nu}\nu$ となる．

このように x_0 をしぼると，

$$\limsup_{r\downarrow 0}\lim_{j\to\infty}\int_{B(0,1)}\left|\nabla v_j^{(r)}\right|^p\ \mathrm{d}y<\infty. \tag{5.69}$$

が成り立つ．さらに，$\left[v_j^{(r)}\right]_{B(0,1)}=0$ だから，Poincaré 不等式（$\|u-[u]_\Omega\|_{L^p(\Omega)}\le C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$）より，上の不等式で積分を $\|v_j^{(r)}\|^p_{W^{1,p}(B(0,1))}$ で置き換えてもよい．対角線をとることで列 $w_n=v_{j(n)}^{r(n)}, n\in\mathbb{N}$ があって，$W^{1,p}\left(B(0,1);\mathbb{R}^m\right)$ で一様有界で，全ての $k\in\mathbb{N}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{B(0,1)}\varphi_k(y)h_k\left(\nabla w_n(y)\right)\ \mathrm{d}y=\int_{B(0,1)}\varphi_k(y)\left\langle h_k,\nu_{x_0}\right\rangle\ \mathrm{d}y. \tag{5.70}$$

したがって，Lemma 4.9 より $\nabla w_n\overset{\mathrm{Y}}{\to}\nu_{x_0}$．ここで，$\nu_{x_0}$ を $B(0,1)$ 上の等質な勾配 Young 測度として見ている． □

Theorem 5.11 (Morrey, 1952 & Acerbi-Fusco, 1984)**.** $f:\Omega\times\mathbb{R}^{m\times d}\to[0,\infty)$ は p-増加（$p\in(1,\infty)$）するカラテオドリ関数で，$f(x,\cdot)$ がほとんどすべての $x\in\Omega$ に対して準凸ならば，汎関数 $\mathscr{F}=\int_\Omega f(x,\nabla u(x))\ \mathrm{d}x$ は $W^{1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^m\right)$ 上で弱下半連続である．

Proof. $u_j\rightharpoonup u$ in $W^{1,p}$ なる列 $\{u_j\}\subset W^{1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^m\right)$ を一つとってくる．$\{\nabla u_j\}$ が勾配 Young 測度 $\nu=\{\nu_x\}_x\in\mathbf{GY}^p\left(\Omega;\mathbb{R}^{m\times d}\right)$ を生成し，$[\nu]=\nabla u$ であるとする．この生成列は元の列の部分列かもしれないが，任意の部分列に対して弱下半連続性が示せたら，元の列に対しても示せたことになる．Proposition 4.8 より

$$\liminf_{j\to\infty}\int_\Omega f\left(x,\nabla u_j(x)\right)\ \mathrm{d}x\ge\left\langle\left\langle f,v\right\rangle\right\rangle=\int_\Omega\int f(x,A)\ \mathrm{d}\nu_x(A)\ \mathrm{d}x. \tag{5.71}$$

さらに，Proposition 5.10 より，ほとんどすべての $x\in\Omega$ に対して ν_x を $\mathbf{GY}^p\left(B(0,1);\mathbb{R}^{m\times d}\right)$ に入る等質な Young 測度としてみなすことができる．よって，Jensen の不等式（Lemma 5.7）より，

$$\int f(x,A)\ \mathrm{d}\nu_x(A)\ge f(x,\nabla u(x))\qquad\text{a.e. } x\in\Omega. \tag{5.72}$$

二つの評価を合わせると，

$$\liminf_{j\to\infty}\mathscr{F}\left[u_j\right]\ge\mathscr{F}[u], \tag{5.73}$$

を得て，弱下半連続性は示された． □

Remark 5.12. 上の定理では，汎関数が非負であると仮定しているが，負の方向の増加が p より小さければ，弱下半連続性が成り立つ．

準凸性は弱下半連続性の必要条件でもある．以下では x に陽に依存しない汎関数のみで示すが，x に依存しても成り立つ．

Proposition 5.13. $f:\mathbb{R}^{m\times d}\to\mathbb{R}$ が連続で p-増加するとする．汎関数

$$\mathscr{F}[u]:=\int_\Omega f(\nabla u(x))\ \mathrm{d}x,\qquad u\in W^{1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^m\right), \tag{5.74}$$

が弱下半連続（境界値指定ありまたは境界値指定なしのどちらでも）ならば，f は準凸である．

Proof. We may assume that $B(0,1)\Subset\Omega$; otherwise we can translate and rescale the domain. Let $A\in\mathbb{R}^{m\times d}$ and $\psi\in W_0^{1,\infty}\left(B(0,1);\mathbb{R}^m\right)$. We need to show

$$f(A)\le\fint_{B(0,1)}f(A+\nabla\psi(z))\ \mathrm{d}z. \tag{5.75}$$

Take for every $j \in \mathbb{N}$ a Vitali cover of $B(0,1)$ consisting of disjoint balls,

$$B(0,1) = Z^{(j)} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} B\left(a_k^{(j)}, r_k^{(j)}\right), \quad \left|Z^{(j)}\right| = 0 \tag{5.76}$$

with $a_k^{(j)} \in B(0,1), 0 < r_k^{(j)} \leq 1/j (k \in \mathbb{N})$. Also fix a smooth function $h : \Omega \setminus B(0,1) \to \mathbb{R}^m$ with $h(x) = Ax$ for $x \in \partial B(0,1)$ and $h|_{\partial\Omega}$ equal to the prescribed boundary values if there are any. Define

$$u_j(x) := \begin{cases} Ax + r_k^{(j)} \psi\left(\frac{x - a_k^{(j)}}{r_k^{(j)}}\right) & \text{if } x \in B\left(a_k^{(j)}, r_k^{(j)}\right) (k \in \mathbb{N}), \\ h(x) & \text{if } x \in \Omega \backslash B(0,1), \end{cases} \quad x \in \Omega. \tag{5.77}$$

Then, since ψ is uniformly bounded, it is not hard to see that $u_j \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}$ for

$$u(x) = \begin{cases} Ax & \text{if } x \in B(0,1), \\ h(x) & \text{if } x \in \Omega \backslash B(0,1), \end{cases} \quad x \in \Omega. \tag{5.78}$$

Thus, the lower semicontinuity yields, after cancelling the constant part of the functional on $\Omega \setminus B(0,1)$,

$$\begin{aligned} \int_{B(0,1)} f(A)\, \mathrm{d}x &\leq \liminf_{j\to\infty} \int_{B(0,1)} f\left(\nabla u_j(x)\right)\, \mathrm{d}x \\ &= \liminf_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B\left(a_k^{(j)}, r_k^{(j)}\right)} f\left(A + \nabla\psi\left(\frac{x - a_k^{(j)}}{r_k^{(j)}}\right)\right)\, \mathrm{d}x \\ &= \liminf_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(r_k^{(j)}\right)^d \int_{B(0,1)} f(A + \nabla\psi(y))\, \mathrm{d}y \\ &= \int_{B(0,1)} f(A + \nabla\psi(y))\, \mathrm{d}y \end{aligned} \tag{5.79}$$

since $\sum_k \left(r_k^{(j)}\right)^d = 1$. This is nothing else than quasiconvexity. □

最後に，これまでの結果をまとめて，最小化問題

$$\begin{cases} \text{Minimize} & \mathscr{F}[u] := \int_\Omega f(x, \nabla u(x))\, \mathrm{d}x \\ \text{over all} & u \in W^{1,p}\left(\Omega; \mathbb{R}^m\right) \text{ with } u|_{\partial\Omega} = g, \end{cases} \tag{5.80}$$

の解の存在について述べる．以前と同様，ここでは，$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ は有界リプシッツ領域，$p \in (1,\infty)$, そして，$g \in \mathrm{W}^{1-1/p,p}\left(\partial\Omega; \mathbb{R}^m\right)$.

Theorem 5.14. カラテオドリ関数 $f : \Omega \times \mathbb{R}^{m\times d} \to [0,\infty)$ は次を満たすとする：

(i) f は p-増加する（$p \in (1,\infty)$）：

$$|f(x,A)| \leq M\left(1 + |A|^p\right), \qquad (x,A) \in \Omega \times \mathbb{R}^{m\times d}; \tag{5.81}$$

(ii) f は p-強圧条件を満たす：

$$\mu|A|^p \leq f(x,A), \quad \mu > 0; \tag{5.82}$$

(iii) $f(x,\cdot)$ は（第 2 変数について）準凸である．

このとき，上記の最小化問題の解 $u \in \mathrm{W}_g^{1,p}\left(\Omega; \mathbb{R}^m\right)$ が存在する．

Proof. Proposition 2.5 より $\mathscr{F}$ は $W^{1,p}_g(\Omega;\mathbb{R}^m)$ 上で弱強圧である．Morrey の定理 5.11 より，$\mathscr{F}$ は $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ 上で弱下半連続である．よって，最小化関数の存在は直接法より従う． □

Remark 5.15. $\int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))\,\mathrm{d}x$ という汎関数でも同様の結果が成り立つ．すなわち，p-強圧性，増加 $|f(x,u,A)| \le M(1+|u|^q+|A|^p)$ と $f(x,u,\cdot)$ の準凸性があれば，汎関数は弱下半連続になり，最小値が存在する．

スカラー値の問題と同様に，最小化関数の正則性を考えることができる．測度ゼロ集合を除いて *minimizer* が $C^{1,\alpha}$-級であるというような結果が得られている．しかし，スカラー値の問題と違って，*Euler-Lagrange* 方程式のすべての解に通用する理論ではない（被積分関数をうまくとって，任意の正則な関数の近傍で正則でない解が作れる）．

Morrey の定理では，被積分関数 f が p-増加するという仮定が本質的だった．すなわち，$M>0$ と $p\in(1,\infty)$ があって，

$$|f(x,A)| \le M\left(1+|A|^p\right), \quad (x,A)\in\Omega\times\mathbb{R}^{m\times d}. \tag{5.83}$$

実際，証明で用いられる Jensen の不等式を示すときにこれを使った．しかし，この仮定は非線型弾性理論では現実的なものではない．物理的な理由から，

$$f(A)\to+\infty \quad \text{as} \quad \det A\downarrow 0 \tag{5.84}$$

を要求することが妥当であるが，

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha>0 \tag{5.85}$$

を考えると，$\det A_\alpha\downarrow 0$ as $\alpha\downarrow 0$ を満たしながら，$|A_\alpha|$ は一様有界なため，p-増加条件と両立しない．

Morrey の定理をより一般的な増加をもつ汎関数に拡張できるかは未解決問題である．一方で，準凸な関数より狭いクラスに限定することにより，現実的な増加をもつ汎関数に対して最小値が存在することを証明する理論は John Ball により提案された．このクラスとは多凸関数のことである．

以下では，このアイデアを（応用上で最も重要な）3 次元の設定で追う．$\Omega\subset\mathbb{R}^3$ をリプシッツ境界をもつ有界領域として，次の最小化問題を考える：

$$\begin{cases} \text{Minimize} & \mathscr{F}[u]=\int_\Omega \left(f(x,\nabla u(x))-b(x)\cdot u(x)\right)\,\mathrm{d}x \\ \text{over all} & u\in W^{1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right) \text{ with } \det\nabla u>0 \text{ a.e. and } u|_{\partial\Omega}=g, \end{cases} \tag{5.86}$$

ここで，$f:\Omega\times\mathbb{R}^{3\times3}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ はカラテオドリ関数（無限大を含むタイプ），$g\in W^{1-1/p,p}\left(\partial\Omega;\mathbb{R}^3\right)$，$b\in L^s\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$．ただし，$1/p+1/s=1$ で，指数 p は後に定める．

この節を通して以下の 2 つの性質を仮定する：

(P1) $f(x,\cdot)$ はほとんどすべての $x\in\Omega$ に対して多凸である．つまり，

$$f(x,A)=F(x,A,\operatorname{cof}A,\det A), \quad (x,A)\in\Omega\times\mathbb{R}^{3\times3}, \tag{5.87}$$

と書けて，$F(x,\cdot,\cdot,\cdot)$ は a.e. $x\in\Omega$ で凸で連続であるような F が存在する．

(P2) 増加条件として，以下を仮定する：

$$\begin{cases} f(x,A)\to+\infty & \text{as} \quad \det A\downarrow 0, \\ f(x,A)=+\infty & \text{if} \quad \det A\le 0. \end{cases} \tag{5.88}$$

Theorem 5.16 (J. Ball, 1977)**.** 仮定 *(P1), (P2)* に加えて，$\mu > 0$ と

$$p \geq 2, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1, \quad r > 1 \tag{5.89}$$

なる $p, q, r \in (1, \infty)$ が存在し，

$$f(x, A) \geq \mu \left(|A|^p + |\operatorname{cof} A|^q + |\det A|^r \right), \quad (x, A) \in \Omega \times \mathbb{R}^{3\times 3} \tag{5.90}$$

が成り立つとする．このとき，集合

$$\begin{aligned} \mathscr{A} := \big\{ u \in W^{1,p}\left(\Omega; \mathbb{R}^3\right) : \operatorname{cof} \nabla u \in L^q\left(\Omega; \mathbb{R}^{3\times 3}\right), \det \nabla u \in L^r(\Omega), \\ \det \nabla u > 0 \ \textit{a.e., and} \ u|_{\partial\Omega} = g \big\} \end{aligned} \tag{5.91}$$

が空でなければ，最小化問題 (5.86) の $\mathscr{A}$ における解が存在する．

Proof. 直接法を用いる．まず，$\mathscr{F}$ の最小化列 $\{u_j\} \subset \mathscr{A}$ に対して一様評価を導く．そのため，$u_0|_{\partial\Omega} = g$ なる $u_0 \in W^{1,p}\left(\Omega; \mathbb{R}^3\right)$ を一つ固定する．Poincaré 不等式を用いると（定数 $C > 0$ は Ω, p, u_0 にしか依らないが，出現するたびに値が変わる可能性がある），

$$\begin{aligned} \|\nabla u_j\|_{L^p}^p &\geq \frac{1}{2^{p-1}} \|\nabla (u_j - u_0)\|_{L^p}^p - \|\nabla u_0\|_{L^p}^p \\ &\geq C \|u_j - u_0\|_{W^{1,p}}^p - C \\ &\geq C \|u_j\|_{W^{1,p}}^p - C. \end{aligned} \tag{5.92}$$

ただし，最初の評価では不等式 $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ for $a, b \geq 0$ を使った．したがって， $\delta > 0$ に対する Young の不等式より，

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(f\left(x, \nabla u_j(x)\right) - b(x) \cdot u_j(x) \right) \mathrm{d}x \\ &\geq \mu \left(\|\nabla u_j\|_{L^p}^p + \|\operatorname{cof} \nabla u_j\|_{L^q}^q + \|\det \nabla u_j\|_{L^r}^r \right) - \|b\|_{L^s} \cdot \|u_j\|_{L^p} \\ &\geq \mu \left(C \|u_j\|_{W^{1,p}}^p - C + \|\operatorname{cof} \nabla u_j\|_{L^q}^q + \|\det \nabla u_j\|_{L^r}^r \right) - \frac{1}{\delta^s s} \|b\|_{L^s}^s - \frac{\delta^p}{p} \|u_j\|_{W^{1,p}}^p . \end{aligned} \tag{5.93}$$

δ を $C\mu > \delta^p/p$ となるよう十分小さく選べば，

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \left(\|u_j\|_{W^{1,p}}^p + \|\operatorname{cof} \nabla u_j\|_{L^q}^q + \|\det \nabla u_j\|_{L^r}^r \right) \leq C \left(\sup_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{F}\left[u_j\right] + 1 \right). \tag{5.94}$$

$W^{1,p}, L^q, L^r$ がともに回帰的バナッハ空間であるので，$\{u_j\}$ から適当に部分列を取り出せば，$u_* \in W^{1,p}\left(\Omega; \mathbb{R}^3\right)$, $H \in L^q\left(\Omega; \mathbb{R}^{3\times 3}\right)$, $d \in L^r(\Omega)$ が存在して，次が成り立つ：

$$\begin{cases} u_j \rightharpoonup u_* & W^{1,p} \text{ で弱収束} \\ \operatorname{cof} \nabla u_j \rightharpoonup H & L^q \text{ で弱収束} \\ \det \nabla u_j \rightharpoonup d & L^r \text{ で弱収束} . \end{cases} \tag{5.95}$$

ここで，$H = \operatorname{cof} \nabla u_*$, $d = \det \nabla u_*$ であることを期待するが，自明ではないので，後で示す（Lemma 5.17）ことにして，

$$\begin{cases} u_j \rightharpoonup u_* & W^{1,p} \text{ で弱収束} \\ \operatorname{cof} \nabla u_j \rightharpoonup \operatorname{cof} \nabla u_* & L^q \text{ で弱収束} \\ \det \nabla u_j \rightharpoonup \det \nabla u_* & L^r \text{ で弱収束} . \end{cases} \tag{5.96}$$

が成り立つこととして，証明を進める．

汎関数 $\mathscr{F}$ の主要部分

$$u \mapsto \int_\Omega f(x, \nabla u)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega F(x, \nabla u, \operatorname{cof}\nabla u, \det \nabla u)\ \mathrm{d}x, \tag{5.97}$$

が $\mathscr{A}$ 上で弱下半連続である．実際，$\{u_j\}$ が (5.96) を満たすならば，

$$\begin{aligned} U_j &= (\nabla u_j, \operatorname{cof}\nabla u_j, \det \nabla u_j) \\ U &= (\nabla u_*, \operatorname{cof}\nabla u_*, \det \nabla u_*) \end{aligned} \tag{5.98}$$

とおくと，$U_j \rightharpoonup U$ in $L^p \times L^q \times L^r$. また，部分列をとることによって，

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega F(x, U_j(x))\ \mathrm{d}x = \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega F(x, U_j(x))\ \mathrm{d}x := \alpha \tag{5.99}$$

であるとしてもよい．Mazur の補題より，凸結合

$$V_j = \sum_{n=j}^{N(j)} \theta_n^{(j)} U_n, \qquad \theta_n^{(j)} \in [0,1], \quad \sum_{n=j}^{N(j)} \theta_n^{(j)} = 1 \tag{5.100}$$

が存在して，$V_j \to U$（$L^p \times L^q \times L^r$ で強収束）が成り立つ．$F(x,\cdot)$ がほとんどすべての $x \in \Omega$ で凸なので，

$$\int_\Omega F(x, V_j(x))\ \mathrm{d}x = \int_\Omega F\left(x, \sum_{n=j}^{N(j)} \theta_n^{(j)} U_n(x)\right)\ \mathrm{d}x \le \sum_{n=j}^{N(j)} \theta_n^{(j)} \int_\Omega F(x, U_n(x))\ \mathrm{d}x. \tag{5.101}$$

F が非負かつ連続で，（部分列を取り出せば）$V_j \to U$ は各点収束するので，Fatou の補題より，

$$\int_\Omega F(x, U(x))\ \mathrm{d}x \le \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega F\left(x, V_j(x)\right)\ \mathrm{d}x. \tag{5.102}$$

さらに，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=j}^{N(j)} \theta_n^{(j)} \int_\Omega F(x, U_n(x))\ \mathrm{d}x = \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega F\left(x, U_j(x)\right)\ \mathrm{d}x. \tag{5.103}$$

これと，$\int b\cdot u\ \mathrm{d}x$ の項が $W^{1,p}$ で弱連続であることを合わせると，

$$\mathscr{F}[u_*] \le \liminf_{j\to\infty} \mathscr{F}[u_j] = \inf_{\mathscr{A}} \mathscr{F} < \infty. \tag{5.104}$$

とくに，(P2) の仮定より，$\det \nabla u_* > 0$ がほとんどいたるところで成立する．また，$W^{1,p}_g(\Omega;\mathbb{R}^3)$ が凸集合として弱閉であるため，$u_*|_{\partial\Omega} = g$ を得る．よって，$u_* \in \mathscr{A}$ により証明は完了する． □

Lemma 5.17. 実数 $p, q, r \in (1,\infty)$ は次を満たすとする：

$$p \ge 2, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \le 1, \quad r > 1 \tag{5.105}$$

ある $H \in L^q\left(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3}\right), d \in L^r(\Omega)$ に対して，列 $\{u_j\} \subset W^{1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$ が

$$\begin{cases} u_j & \rightharpoonup u & W^{1,p} \text{ で弱収束} \\ \operatorname{cof}\nabla u_j & \rightharpoonup H & L^q \text{ で弱収束} \\ \det \nabla u_j & \rightharpoonup d & L^r \text{ で弱収束} \end{cases} \tag{5.106}$$

を満たすならば，$H = \operatorname{cof}\nabla u$ かつ $d = \det \nabla u$.

Remark 5.18. 指数 p に関する要求を緩めたら，小行列式の弱連続性は簡単に示すことができる．実際，次のことがわかる：
$M:\mathbb{R}^{3\times 3}\to\mathbb{R}$ を $(r\times r)$-小行列式とする．このとき，$p\in(r,\infty]$ ならば，

$$u_j \rightharpoonup u \quad W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3) \text{ で弱収束} \qquad \Rightarrow \qquad M(\nabla u_j) \rightharpoonup M(\nabla u) \quad L^{p/r}(\Omega;\mathbb{R}) \text{ で弱収束}. \tag{5.107}$$

証明： M は *1,2*-行と *1,2*-列で作られる (2×2)-小行列式の場合，$\psi\in C_c^\infty(\Omega)$ に対して，

$$\int_\Omega M(\nabla u_j)\,\psi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \left(\partial_1 u_j^1\partial_2 u_j^2 - \partial_2 u_j^1\partial_1 u_j^2\right)\psi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \left(\left(u_j^1\partial_2 u_j^2\right)\partial_1\psi - \left(u_j^1\partial_1 u_j^2\right)\partial_2\psi\right)\,\mathrm{d}x. \tag{5.108}$$

右辺で $j\to\infty$ とすると，例えば，第 *1* 項については

$$\int_\Omega \left(u_j^1\partial_2 u_j^2\right)\partial_1\psi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \left(u^1\partial_2 u^2\right)\partial_1\psi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \left((u_j^1-u^1)\partial_2 u_j^2\right)\partial_1\psi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \left(u^1\partial_2(u_j^2-u^2)\right)\partial_1\psi\,\mathrm{d}x \tag{5.109}$$

と分解できるので，右辺の第 *3* 項は $\partial_2 u_j^2$ の L^p-弱収束よりゼロに収束し，第 *2* 項はヘルダー不等式

$$\left|\int_\Omega \left((u_j^1-u^1)\partial_2 u_j^2\right)\partial_1\psi\,\mathrm{d}x\right| \le \|u_j^1-u^1\|_{L^p}\|\partial_2 u_j^2\|_{L^{p'}}\|\partial_1\psi\|_{L^\infty} \tag{5.110}$$

と u_j の L^p における強収束よりゼロに収束する．よって，

$$\int_\Omega M(\nabla u_j)\,\psi\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega M(\nabla u)\,\psi\,\mathrm{d}x \qquad as\ \ j\to\infty. \tag{5.111}$$

$C_c^\infty(\Omega)$ の $L^s(\Omega)$ での稠密性より，この収束は積分が定義される $\psi\in L^{(p/2)'}(\Omega)$ のときでも成立する（M に出てくる項は $\partial_k u^i\partial_l u^j$ の形をしていて，それぞれの微分は L^p-関数であるため，$\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+\frac{1}{(p/2)'}=1$ とヘルダー不等式を用いればよい）．

行列式（$r=3$）の場合，公式

$$\int_\Omega \det\nabla u_j\,\psi\,\mathrm{d}x = -\sum_{l=1}^3\int_\Omega \left[u_j^1\,(\operatorname{cof}\nabla u_j)_l^1\right]\partial_l\psi\,\mathrm{d}x \tag{5.112}$$

を用いて，左辺が $\psi\in L^{(p/3)'}(\Omega)$ に対して意味をもつことに注意して，同様に証明できる．

しかし，物理的に意味のある弾性エネルギー密度は $|\det\nabla u|^2$ のような *2* 次の項を含むことが多いため，指数をこのように緩める（つまり，$p>3$ とする）ことはできない．

Proof. $\varphi=\left(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3\right)^T\in C^1\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$ ならば，

$$(\operatorname{cof}\nabla\varphi)_l^k = (-1)^{k+l}\left[\partial_{l+1}\left(\varphi^{k+1}\partial_{l+2}\varphi^{k+2}\right) - \partial_{l+2}\left(\varphi^{k+1}\partial_{l+1}\varphi^{k+2}\right)\right], \qquad k,l\in\{1,2,3\}. \tag{5.113}$$

ただし，$k,l=4$ を 1 と，$k,l=5$ を 2 と同一視する．よって，任意の $\psi\in C_c^\infty(\Omega)$ に対して，

$$\int_\Omega (\operatorname{cof}\nabla\varphi)_l^k\psi\,\mathrm{d}x = -(-1)^{k+l}\int_\Omega \left(\left(\varphi^{k+1}\partial_{l+2}\varphi^{k+2}\right)\partial_{l+1}\psi - \left(\varphi^{k+1}\partial_{l+1}\varphi^{k+2}\right)\partial_{l+2}\psi\right)\,\mathrm{d}x =: \left\langle(\operatorname{Cof}\nabla\varphi)_l^k,\psi\right\rangle. \tag{5.114}$$

頭文字を大文字にした $\operatorname{Cof}\nabla\varphi$ を余因子行列の超関数版と呼ぶ．$\operatorname{Cof}\nabla\varphi$ の連続性を考えるため，$k,l,m,n\in\{1,2,3\}$ と $\psi\in C_c^\infty(\Omega)$ を固定して，

$$\mathscr{G}[\varphi] = \int_\Omega \left(\varphi^k\partial_l\varphi^m\right)\partial_n\psi\,\mathrm{d}x, \quad \varphi\in W^{1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right), \tag{5.115}$$

という代表的な項を調べる．

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{p}\le 1 \tag{5.116}$$

ならば，ヘルダー不等式より，

$$|\mathscr{G}[\varphi]| \leq C(\Omega)\|\varphi\|_{L^s}\|\nabla\varphi\|_{L^p}\|\nabla\psi\|_{L^\infty}. \tag{5.117}$$

これはとくに $s = p \geq 2$ のときも成り立つので，$C^1\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$ の $W^{1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$ における稠密性より，(5.114) は $\varphi \in W^{1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$ に対しても正しい．

さらに，(5.117) より，任意の列 $\{\varphi_j\} \subset W^{1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$ に対して，

$$\begin{cases} \varphi_j \to \varphi & L^s \text{ で強収束} \\ \nabla\varphi_j \rightharpoonup \nabla\varphi & L^p \text{ で弱収束} \end{cases} \quad \text{ならば} \quad \mathscr{G}\left[\varphi_j\right] \to \mathscr{G}[\varphi]. \tag{5.118}$$

$\varphi_j \rightharpoonup \varphi$ が $W^{1,p}$ での弱収束ならば，Rellich-Kondrachov の定理より上の条件は次のときに成立する：

$$s < \begin{cases} \frac{3p}{3-p} & \text{if } p < 3 \\ \infty & \text{if } p \geq 3. \end{cases} \tag{5.119}$$

> Rellich-Kondrachov の定理：Let $(u_j) \subset \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ with $u_j \to u$ in $\mathrm{W}^{1,p}$.
>
> (i) If $p < d$, then $u_j \to u$ in $\mathrm{L}^q(\Omega)$ for any $q < p^* = dp/(d-p)$.
>
> (ii) If $p = d$, then $u_j \to u$ in $\mathrm{L}^q(\Omega)$ for any $q < \infty$.
>
> (iii) If $p > d$, then $u_j \to u$ uniformly (i.e., in the supremum norm).

$p \geq 2$ ならば，(5.116) と (5.119) を同時に満たすような $s > 1$ が存在する．結論として，

$$\varphi_j \rightharpoonup \varphi \quad \text{in } W^{1,p} \qquad \text{ならば} \qquad \langle \operatorname{Cof}\nabla\varphi_j, \psi\rangle \to \langle \operatorname{Cof}\nabla\varphi, \psi\rangle \quad \forall\psi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3}). \tag{5.120}$$

とくに，Lemma の仮定より，$\psi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})$ に対して，

$$\langle \operatorname{Cof}\nabla u_j, \psi\rangle = \langle \operatorname{cof}\nabla u_j, \psi\rangle \to \langle H, \psi\rangle \tag{5.121}$$

と同時に (5.120) より

$$\langle \operatorname{Cof}\nabla u_j, \psi\rangle \to \langle \operatorname{Cof}\nabla u, \psi\rangle = \int_\Omega (\operatorname{cof}\nabla u)\psi \,\mathrm{d}x. \tag{5.122}$$

したがって，

$$\int_\Omega (\operatorname{cof}\nabla u - H)\psi \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\psi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3}). \tag{5.123}$$

変分法の基本補題より，

$$\operatorname{cof}\nabla u = H \in L^q\left(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3}\right). \tag{5.124}$$

行列式の場合は同様に進めるので，概要だけ述べる：

- $\varphi \in C^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ に対して，

$$\int_\Omega (\det\nabla\varphi)\psi \,\mathrm{d}x = \sum_{l=1}^3 \int_\Omega \partial_l\varphi^1 (\operatorname{cof}\nabla\varphi)_l^1 \psi \,\mathrm{d}x = -\sum_{l=1}^3 \int_\Omega \left(\varphi^1 (\operatorname{cof}\nabla\varphi)_l^1\right)\partial_l\psi \,\mathrm{d}x =: \langle \operatorname{Det}\nabla\varphi, \psi\rangle. \tag{5.125}$$

最後の積分が定義され，有界であるには次が成り立てばよい：

$$\varphi \in W^{1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right) \quad \text{かつ} \quad \operatorname{cof}\nabla\varphi \in L^q\left(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3}\right), \quad \text{ただし，} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1. \tag{5.126}$$

- (5.125) は上の条件を満たすような φ に対しても成立する（稠密性を用いる）.
- 埋蔵定理を用いて，p, q が Lemma の仮定を満たせば，次が成り立つ：

$$\begin{cases} \varphi_j \rightharpoonup \varphi & W^{1,p} \text{ で弱収束} \\ \operatorname{cof} \nabla\varphi_j \rightharpoonup \operatorname{cof} \nabla\varphi & L^q \text{ で弱収束} \end{cases} \quad \text{ならば} \quad \langle \operatorname{Det} \nabla\varphi_j, \psi \rangle \to \langle \operatorname{Det} \nabla\varphi, \psi \rangle$$

- Lemma の仮定と変分法の基本補題で完結する.

□

余因子行列や行列式のそれぞれの項では同じようなことが言えないが，項がうまく組み合わさることにより，非線性にもかかわらず弱収束を通すことができるのがポイントである.

6　汎関数の緩和

この章では，汎関数が（準）凸でない場合に何ができるかについて考える．例えば，次の汎関数を

$$\mathscr{F}[u] = \int_0^1 \left(\left(|u'(x)|^2 - 1 \right)^2 + |u(x)|^2 \right) \mathrm{d}x, \qquad u \in \mathrm{W}_0^{1,4}(0,1).$$

両端でゼロになる $W^{1,4}$-関数（連続）の中で最小化する（double-well）問題を考える．最初の項は微分が ± 1 に近いことを要求し，二つ目の項は minimizer の値が小さいことを要求する．よって，最小化列は必然的に細かく振動する関数になり，minimizer は存在しない（最小化列の極限として得られる関数は minimizer ではない）．

このような問題では知りたいことによって二通りの解決法がある：

- 汎関数の下限のみ知りたい場合，$\mathscr{F}$ より小さい汎関数のなかで最大の準凸な汎関数を求めればよい（これを $\mathscr{F}$ の緩和とよぶ）．ある条件が満たされれば，緩和はまた積分型汎関数で，その被積分関数は $\mathscr{F}$ の被積分関数の準凸包であることが言える．しかし，準凸包をとることによってもとの汎関数の最小化列に関する情報が失われることが多い．
- 最小化列に含まれる minimizer に関する情報が知りたい場合，もとの最小化問題をより広い空間に広げて，minimizer が必ず存在するような問題に拡張すればよい．この空間として勾配 Young 測度をとるのが自然である．

6.1　準凸包による緩和

前に見たように，汎関数の弱下半連続性と被積分関数の準凸性はほぼ同値な関係にある．よって，準凸でない被積分関数に対して，準凸包を考えるのが自然である．

Definition 6.1. 局所有界なボレル関数 $h : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ に対して，準凸包 $Qh : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ を次で定義する：

$$Qh(A) = \inf \left\{ \fint_{B(0,1)} h(A + \nabla\psi(z)) \, \mathrm{d}z : \psi \in W_0^{1,\infty}\left(B(0,1);\mathbb{R}^m\right) \right\}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times d}. \tag{6.1}$$

- $\psi \equiv 0$ とすれば，$Qh \le h$ がわかる．
- 準凸性の定義と同様に被覆を使って，単位球 $B(0,1)$ を任意の有界リプシッツ領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ で置き換えてもよいことが示せる．
- さらに，h が p-増加ならば，稠密性を用いて，空間 $W_0^{1,\infty}\left(B(0,1);\mathbb{R}^m\right)$ を $W_0^{1,p}\left(B(0,1);\mathbb{R}^m\right)$ で置き換えてもよいことが示せる．
- また，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\|\psi\|_{L^\infty} \le \varepsilon$ なる ψ に制限してもかまわない．

Lemma 6.2. $h : \mathbb{R}^{m\times d} \to [0,\infty)$ が p-増加する連続関数（$p \in [1,\infty)$）ならば，Qh は準凸であり，次が成り立つ：

$$Qh(A) = \sup\{g(A) : g \ \text{準凸，かつ} \ g \le h\}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times d}. \tag{6.2}$$

Proof. 任意の $\psi \in W_0^{1,\infty}\left(B(0,1);\mathbb{R}^m\right)$ と任意の $F \in \mathbb{R}^{m\times d}$ に対して次を示せばよい：

$$\fint_{B(0,1)} Qh(F + \nabla\psi(z)) \, \mathrm{d}z \ge Qh(F). \tag{6.3}$$

- $0 \le Qh(A) \le h(A) \le M\,(1+|A|^p)$ が成り立つので，Qh は p-増加であり，$\psi \mapsto \int_{B(0,1)} Qh(F+\nabla\psi(z))\,\mathrm{d}z$ は $W^{1,\infty}(B(0,1))$ で（強）連続である（Pratt の定理）.
- $W_0^{1,p}\,(B(0,1);\mathbb{R}^m)$ のなかの区分的にアフィンな関数は $W_0^{1,\infty}\,(B(0,1);\mathbb{R}^m)$ において $W^{1,p}$-ノルムで稠密ある（有限要素法と関係がある）.

という事実を考慮すると，(6.3) を区分的アフィンな $\psi \in W_0^{1,\infty}\,(B(0,1);\mathbb{R}^m)$ に対して示せばよいことがわかる.

よって，互いに素なリプシッツ領域 $D_k \subset B(0,1), k \in \mathbb{N}$, $|B(0,1)\setminus\bigcup_k D_k| = 0$ をとって，$x \in D_k$ に対して $\psi(x) = v_k + A_k x$（$v_k \in \mathbb{R}^m, A_k \in \mathbb{R}^{m\times d}$）とおく.

準凸包の定義より，$\varepsilon > 0$ を固定すれば，各 k に対して，$\phi_k \in W_0^{1,\infty}\,(D_k;\mathbb{R}^m)$ が存在して，

$$Qh\,(F+A_k) \ge \fint_{D_k} h\,(F+A_k+\nabla\phi_k(z))\;\mathrm{d}z - \varepsilon \tag{6.4}$$

が成り立つ．$\phi \in W_0^{1,\infty}\,(B(0,1);\mathbb{R}^m)$ を

$$\phi(x) = v_k + A_k x + \phi_k(x), \qquad x \in D_k \tag{6.5}$$

で定義すると，

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,1)} Qh(F+\nabla\psi(z))\;\mathrm{d}z &= \sum_{k=1}^{\infty} |D_k|\,Qh\,(F+A_k) \\
&\ge \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{D_k} h\,(F+A_k+\nabla\phi_k(z))\;\mathrm{d}z - \varepsilon\,|D_k| \right) \\
&= \int_{B(0,1)} h(F+\nabla\phi(z))\;\mathrm{d}z - \varepsilon|B(0,1)| \\
&\ge |B(0,1)|(Qh(F)-\varepsilon)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

最後のステップは Qh の定義による．あとは，$\varepsilon \downarrow 0$ とすればよい.

次に，(6.2) の右辺を Q^*h とする．上で示したことより，$Qh \le Q^*h$．一方，g が準凸かつ $g \le h$ ならば，任意の $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ に対して，

$$\begin{aligned}
g(A) &\le \inf\left\{ \fint_D g(A+\nabla\psi(z))\;\mathrm{d}z : \psi \in W_0^{1,\infty}\,(D;\mathbb{R}^m) \right\} \\
&\le \inf\left\{ \fint_D h(A+\nabla\psi(z))\;\mathrm{d}z : \psi \in W_0^{1,\infty}\,(D;\mathbb{R}^m) \right\} \\
&= Qh(A).
\end{aligned} \tag{6.7}$$

よって，同時に $Q^*h \le Qh$ も成り立つ. □

これまで被積分関数の準凸包についてのみ述べてきたが，次に汎関数の緩和との関係について考える．まずは，抽象的な設定として，X を回帰的なバナッハ空間とし，汎関数 $\mathscr{F} : X \to \mathbb{R}$ の緩和 $\mathscr{F}_* : X \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ を次で定義する：

$$\mathscr{F}_*[u] = \sup\{\mathscr{H}[u] : \mathscr{H} \le \mathscr{F} \ \text{ かつ } \ \mathscr{H} \ \text{ は弱下半連続である } \}, \qquad u \in X. \tag{6.8}$$

Theorem 6.3. $\mathscr{F} : X \to \mathbb{R}$ が弱強圧ならば，つまり，任意の $\Lambda > 0$ に対して集合 $\{u \in X : \mathscr{F}[u] \le \Lambda\}$ が弱点列プレコンパクトならば，緩和 $\mathscr{F}_*$ は弱下半連続であり，次が成り立つ：

$$\min_X \mathscr{F}_* = \inf_X \mathscr{F}. \tag{6.9}$$

Proof. まず，$\mathscr{F}_*$ の弱下半連続性を見る．$u_j \rightharpoonup u$ in X ならば，$\mathscr{H} \le \mathscr{F}$ なる弱下半連続な $\mathscr{H} : X \to \mathbb{R}$ に対して

$$\mathscr{H}[u] \le \liminf_{j\to\infty} \mathscr{H}[u_j] \le \liminf_{j\to\infty} \mathscr{F}_*[u_j] \tag{6.10}$$

このような $\mathscr{H}$ について上限をとれば，$\mathscr{F}_*[u] \le \liminf_{j\to\infty} \mathscr{F}_*[u_j]$ が従う．

直接法により，$\mathscr{F}_*$ の最小値が達成される．さらに，

$$\inf_X \mathscr{F} \le \mathscr{F}_* \le \mathscr{F}, \tag{6.11}$$

より，$\mathscr{F}_*$ の X における最小値は $\mathscr{F}$ の下限と一致しなければならない． □

積分型汎関数という具体的な設定における結果を述べる．

Theorem 6.4. 有界リプシッツ領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$，$p \in (1,\infty)$ とカラテオドリ関数 $f : \Omega \times \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ に対して積分型汎関数

$$\mathscr{F}[u] = \int_\Omega f(x, \nabla u(x))\ \mathrm{d}x, \qquad u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \tag{6.12}$$

を考える．f が次の *2* 条件

(1) p-増加と強圧性：$\mu, M > 0$ が存在し，次が成り立つ：

$$\mu|A|^p \le f(x,A) \le M\left(1+|A|^p\right), \qquad (x,A) \in \Omega \times \mathbb{R}^{m\times d}, \tag{6.13}$$

(2) modulus of continuity ω（$\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ 連続な増加関数で，$\omega(0) = 0$）が存在し，次が成り立つ：

$$|f(x,A) - f(y,A)| \le \omega(|x-y|)\left(1+|A|^p\right), \quad x,y \in \Omega, A \in \mathbb{R}^{m\times d}. \tag{6.14}$$

このとき，$\mathscr{F}$ の緩和 $\mathscr{F}_*$ は

$$\mathscr{F}_*[u] = \int_\Omega Qf(x, \nabla u(x))\ \mathrm{d}x, \qquad u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m), \tag{6.15}$$

で与えられる．境界条件が与えられた場合にも同様のことが成り立つ．

証明の概要：Morrey の定理より，(6.15) の右辺は弱下半連続であり，かつ，$\mathscr{F}$ 以下である．よって，(6.15) において $\ge$ が成り立つことはすぐに言える．逆の不等式は，$Qf(x,A)$ が連続であることに注意して，区分的にアフィンな関数に対して成り立つことから従う．

6.2 Young 測度による緩和

準凸包による緩和では最小化列に含まれる情報が失われるため，別の戦略を考える．つまり，最小化問題 $\inf_X \mathscr{F}$ における距離空間 X をより広い完備な距離空間 $\overline{X}$ に拡張し，最小化問題 $\inf_{\overline{X}} \overline{\mathscr{F}}$ が解を持ち，元の問題と十分に結びつくように拡張した汎関数 $\overline{\mathscr{F}}$ を構成する．

$$\mathscr{F}[u] = \int_\Omega f(x, \nabla u(x))\ \mathrm{d}x, \qquad X = W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \text{（の部分集合）}$$

の場合，$\overline{X} = \mathbf{GY}^p\left(\Omega;\mathbb{R}^{m\times d}\right)$ として，拡張緩和 $\overline{\mathscr{F}} : \mathbf{GY}^p\left(\Omega;\mathbb{R}^{m\times d}\right) \to \mathbb{R}$ を次で定義する：

$$\overline{\mathscr{F}}[\nu] = \langle\langle f, \nu\rangle\rangle = \int_\Omega \int f(x,A)\ \mathrm{d}\nu_x(A)\ \mathrm{d}x.$$

Theorem 6.5. 有界リプシッツ領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$，$p \in (1,\infty)$ とカラテオドリ関数 $f : \Omega \times \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ が p-増加と強圧性の条件

$$\exists \mu, M > 0 \qquad \mu|A|^p \le f(x,A) \le M\left(1+|A|^p\right), \qquad (x,A) \in \Omega \times \mathbb{R}^{m\times d}, \tag{6.16}$$

を満たすならば，次が成り立つ：

(i) 拡張である：任意の $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ に対して， *Young* 測度 $\delta[\nabla u] = \left\{\delta_{\nabla u(x)}\right\}_x \in \mathbf{GY}^p\left(\Omega;\mathbb{R}^{m\times d}\right)$ は次を満たす：

$$\mathscr{F}[u] = \overline{\mathscr{F}}[\delta[\nabla u]].$$

(ii) 回復列が存在する：任意の $\nu \in \mathbf{GY}^p\left(\Omega;\mathbb{R}^{m\times d}\right)$ に対して，列 $\{u_j\} \subset W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ が存在して，$\nabla u_j \overset{\mathrm{Y}}{\to} \nu$，そして次が成り立つ：

$$\lim_{j\to\infty} \mathscr{F}[u_j] = \overline{\mathscr{F}}[\nu].$$

(iii) 広義最小値が存在する：$\{u_j\} \subset W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ が弱プレコンパクトならば，部分列と *Young* 測度 $\nu \in \mathbf{GY}^p\left(\Omega;\mathbb{R}^{m\times d}\right)$ があり，$\nabla u_j \overset{\mathrm{Y}}{\to} \nu$ かつ $[\nu] = \nabla u$ そして次が成り立つ：

$$\overline{\mathscr{F}}[\nu] \le \liminf_{j\to\infty} \mathscr{F}[u_j]$$

(iv) 最小値が達成される：$\overline{\mathscr{F}}$ は最小値を達成し，次が成り立つ：

$$\min_{\mathbf{GY}^p(\Omega;\mathbb{R}^{m\times d})} \overline{\mathscr{F}} = \inf_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)} \mathscr{F}.$$

境界条件が指定されている場合も成り立つ．

Proof.

(i) $\overline{\mathscr{F}}$ の定義より従う．

(ii) $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ を $[\nu] = \nabla u$ を満たす関数とする．Lemma 4.18 より，次を満たす列 $\{u_j\} \subset W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ を作ることができる：(a) $u_j|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$; (b) $\{\nabla u_j\}_j$ は L^p-equiintegrable; (c) $\nabla u_j \overset{\mathrm{Y}}{\to} \nu$. この列に Young 測度の基本定理を適用できて（f は p-増加で $\{\nabla u_j\}$ は L^p-equiintegrable だから，$\{f(x,\nabla u_j(x))\}$ は L^1-equiintegrable），次を得る：

$$\mathscr{F}[u_j] \to \langle\langle f,\nu\rangle\rangle = \overline{\mathscr{F}}[\nu].$$

これで元の問題と拡張した問題が結びついていることがわかる．実際，それぞれの下限は一致する．

(iii) ν の存在は Young 測度の基本定理 4.1 より従う．不等式は Young 測度の下半連続性（Proposition 4.9）より従う．
$\{u_j\}$ が $\mathscr{F}$ の最小化列ならば，この ν が広義の minimizer と解釈できる．

(iv) 強圧性の仮定より最小化列は弱プレコンパクトで (iii) が適用できる．下限が一致するので，このように得られた ν は $\overline{\mathscr{F}}$ の最小値である．

□

参考文献

[1] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free-Discontinuity Problems*, Oxford University Press, 2000.

[2] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity. Vol.1: Three Dimensional Elasticity*, North-Holland, 1988.

[3] B. Dacorogna, P. Marcellini, *Implicit Partial Differential Equations*, Springer Science + Business Media, 1999.

[4] I. Fonseca, G. Leoni, *Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p Spaces*, Springer, 2007.

[5] M. Kružík, T. Roubíček, *Mathematical Methods in Continuum Mechanics of Solids*, Springer, 2019.