解析学特論２・ 講義ノート

最終版（更新：1 月 29 日）

Karel Švadlenka・京都大学
2017 年 後期

Contents

1　はじめに

2　C^1-関数における理論

2.1　オイラー・ラグランジュ方程式

数学的な結果を導くために，問題を限定する．極値を求める汎関数として

$$I(u) = \int_a^b f\left(x, u(x), u'(x)\right)\, dx \tag{2.1}$$

という形のものを考える．関数 f が滑らかであれば（C^2 と仮定する），右辺の量に意味を持たせるためには，$u \in C^1([a,b])$ を要求すればよい．また，フェルマーの原理の例での出発点と終点に対応する境界条件を課す必要があるので，ここでは例えば，$u(a) = \alpha, u(b) = \beta$ という条件を採用する．したがって，次のような変分問題を得る．

変分問題

$f(x,u,\xi) \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ に対して汎関数 I を (2.1) で定義する．

$$\inf_{u \in X} I(u) \tag{2.2}$$

を求めよ．ただし，$X = \left\{u \in C^1([a,b]);\ u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta\right\}$.

inf がどの集合に対しても定義されるから，(2.2) における下限は必ず存在する．よって，この問題の要点は下限を求めるよりも，下限を達成する関数 u が存在するか（つまり，inf が min であるか）を調べることである．以下では，そのような関数 u が存在すれば，$\overline{u}$ という記号で表し，**最小化関数**，または **minimizer**（ミニマイザー）とよぶ．誤解の恐れがなければ，以降では最小化関数の代わりに最小値と言うこともある．

一意性を議論する際，凸関数の概念が出てくるため，それを定義しておく．

凸関数

定義 2.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合であるとする．

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad \forall x, y \in \Omega,\ \forall \lambda \in [0,1]$$

を満たす関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ を凸関数と言う．さらに，

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad \forall x, y \in \Omega,\ x \neq y,\ \forall \lambda \in (0,1)$$

が成り立つならば，狭義凸関数であると言う．

注 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ が凸関数であることと次の条件が同値である：

$$f(x) \geq f(y) + \nabla f(y) \cdot (x-y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

ただし，$\cdot$ は n-次元ベクトルの内積を意味する．

有限次元の最小化問題でもそうであるが，最小値と極小値を区別する．

(1) 汎関数 I の X における最小値が $I(\overline{u})$ で達成されるとは，

$$I(\overline{u}) \leq I(u) \qquad \forall u \in X \tag{2.3}$$

という意味である．

(2) 一方で，極小値の場合は，$\overline{u}$ のある近傍に限定すれば (2.3) が成り立つ．有限次元ではすべてのノルムが同値であるため，近傍を指定するときにどのノルムを用いても構わない．しかし，ここで考える最小化は無限次元である関数空間のなかで行うため，ノルムの取り方によって答えが変わる可能性がある．以下では，次の二つのノルムを使う：

$$\|u\|_{C^0([a,b])} = \max_{x\in[a,b]} |u(x)|, \qquad \|u\|_{C^1([a,b])} = \max_{x\in[a,b]} |u(x)| + \max_{x\in[a,b]} |u'(x)|.$$

(2a) 弱い極小値 $\overline{u} \in X$ は次で定義される：

$$\exists \delta > 0 \ \text{ satisfying } \qquad I(\overline{u}) \leq I(u) \quad \forall u \in X \ \text{ such that } \ \|\overline{u} - u\|_{C^1([a,b])} < \delta. \tag{2.4}$$

(2b) 強い極小値 $\overline{u} \in X$ は次で定義される：

$$\exists \delta > 0 \ \text{ satisfying } \qquad I(\overline{u}) \leq I(u) \quad \forall u \in X \ \text{ such that } \ \|\overline{u} - u\|_{C^0([a,b])} < \delta. \tag{2.5}$$

弱い極小値の場合，u の値と微分と両方が $\overline{u}$ のものに近い関数 u だけが比較の対象となるが，強い極小値の場合，u の値のみが $\overline{u}$ の値に近い関数 u がすべて比較の対象となるので，

条件がより厳しくなる．そのため，弱い極小値が強い極小値になるとは限らない．

この設定で，以下の定理を証明する．

オイラー・ラグランジュ方程式

定理 2.2 *(1)* 問題 *(2.2)* において弱い極小値 $\overline{u} \in X \cap C^2([a,b])$ が存在すれば，この $\overline{u}$ は次の **オイラー・ラグランジュ方程式** という微分方程式を満たす：

$$\frac{d}{dx}\left[f_\xi\left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\right)\right] = f_u\left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\right), \qquad x \in (a,b). \tag{2.6}$$

ただし，$f_\xi := \frac{\partial f}{\partial \xi}$, $f_u := \frac{\partial f}{\partial u}$ である．

(2) 逆に，$\overline{u}$ が *(2.6)* を満たし，$(u,\xi) \to f(x,u,\xi)$ がすべての $x \in [a,b]$ について凸関数ならば，$\overline{u}$ は変分問題 *(2.2)* の最小値である．

(3) さらに，$(u,\xi) \to f(x,u,\xi)$ がすべての $x \in [a,b]$ について狭義凸で，変分問題 *(2.2)* の最小値が存在するならば，その最小値は一意である．

注 この定理は，弱い極小値 $\overline{u}$ が存在するとしたときに，その $\overline{u}$ とオイラー・ラグランジュ方程式の解の間の関係を述べているだけで，極小値や最小値の存在そのものについて何も言っていないことに注意されたい．最小値の存在を言うには C^k 級と異なる適切な空間の設定が必要となる．

Proof.

(1) $\overline{u}$ が X における弱い極小値だから，任意の $\varphi \in C^1([a,b])$ with $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ に対して δ_0 があって

$$I(\overline{u}) \le I(\overline{u} + \delta\varphi) \qquad \forall\delta \in \mathbb{R},\ \ |\delta| < \delta_0.$$

すなわち，$i(\delta) := I(\overline{u} + \delta\varphi)$ とおくと，

$$i(0) \le i(\delta) \qquad \forall\delta \in \mathbb{R},\ \ |\delta| < \delta_0$$

を得る．したがって，

$$i'(0) = \frac{d}{d\delta} I(\overline{u} + \delta\varphi)\Big|_{\delta=0} = 0.$$

この微分を具体的に計算すると，

$$\int_a^b \left[f_\xi\left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\right)\varphi'(x) + f_u\left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\right)\varphi(x)\right] dx = 0$$

というオイラー・ラグランジュ方程式の弱形式を得る．

第 1 項で部分積分を行うことで，

$$\int_a^b \left[-\frac{d}{dx} \left(f_\xi \left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x) \right) \right) + f_u \left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x) \right) \right] \varphi(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C^1([a,b])$$

with $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ がわかる．φ の任意性より，(2.6) が従う（証明が必要）．

(2) $\overline{u}$ が (2.6) の解であり，$\overline{u}(a) = \alpha, \overline{u}(b) = \beta$ を満たすとする．$(u, \xi) \to f(x, u, \xi)$ が凸関数であるから，凸関数の定義の下の Remark より，

$$f(x, u, u') \geq f(x, \overline{u}, \overline{u}') + f_u(x, \overline{u}, \overline{u}')(u - \overline{u}) + f_\xi(x, \overline{u}, \overline{u}')(u' - \overline{u}')$$

がすべての $u \in X$ について正しい．この式を積分して，

$$I(u) \geq I(\overline{u}) + \int_a^b \left[f_u(x, \overline{u}, \overline{u}')(u - \overline{u}) + f_\xi(x, \overline{u}, \overline{u}')(u' - \overline{u}') \right] dx,$$

第 2 項に部分積分を適用すると，

$$I(u) \geq I(\overline{u}) + \int_a^b \left[f_u(x, \overline{u}, \overline{u}') - \frac{d}{dx} \left(f_\xi(x, \overline{u}, \overline{u}') \right) \right] (u - \overline{u})\, dx$$

（$u(a) - \overline{u}(a) = u(b) - \overline{u}(b) = 0$ のため境界項が消える）．

$\overline{u}$ が (2.6) の解であるという事実を用いると，

$$I(u) \geq I(\overline{u}) \qquad \forall u \in X$$

にたどり着く．すなわち，$\overline{u}$ は最小値を与える．

(3) u と v を I の二つの最小値とし，必ず $u = v$ であることを示そう．

$$w := \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$$

とすれば，$w \in X$ である．$(u, \xi) \to f(x, u, \xi)$ が凸関数であるから，定義より（$\lambda = \frac{1}{2}$ とする）

$$\frac{1}{2}f(x, u, u') + \frac{1}{2}f(x, v, v') \geq f\left(x, \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v, \frac{1}{2}u' + \frac{1}{2}v' \right) = f(x, w, w').$$

I の最小値を m とおくと，

$$m = \frac{1}{2}I(u) + \frac{1}{2}I(v) \geq I(w) \geq m$$

を得るが，ここで $\geq$ がすべて等式であることになる．よって，

$$\int_a^b \left[\frac{1}{2}f(x, u, u') + \frac{1}{2}f(x, v, v') - f\left(x, \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v, \frac{1}{2}u' + \frac{1}{2}v' \right) \right] dx = 0.$$

f の凸性より，被積分関数は非負である．一方，f の狭義凸性より，$u(x_0) \neq v(x_0)$ となる点 $x_0 \in [a,b]$ があれば，ある開区間で $u \neq v$ となり，その開区間で被積分関数が真に正となる．これが上の等式に矛盾しているから，$[a,b]$ において $u = v$ が成り立つ．

□

2.2　定理についてのコメント

f の特別な場合のオイラー・ラグランジュ方程式を見てみよう．

(A) $\underline{f(x,u,\xi) = f(\xi)\text{ のとき}}$
オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dx}\left[f_\xi(u'(x))\right] = 0$$

となり，$f_\xi(u'(x)) = const$ が従うから，

$$\overline{u}(x) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x - a) + \alpha$$

が解である（境界条件を込めて）．この関数は I の停留点ではあるが，極小値であるとは限らない．

(B) $\underline{f(x,u,\xi) = f(x,\xi)\text{ のとき}}$
オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dx}\left[f_\xi(x,u'(x))\right] = 0$$

となり，$f_\xi(x,u'(x)) = const$ が従うが，これは一般的に解くことができない．

(C) $\underline{f(x,u,\xi) = f(u,\xi)\text{ のとき}}$
オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dx}\left[f_\xi(u(x),u'(x))\right] = f_u(u(x),u'(x))$$

となり，この第一積分を求めることができる（定理2.3を参照）：

$$f(u(x),u'(x)) - u'(x)f_\xi(u(x),u'(x)) = const.$$

次に，定理の主張に関する様々な反例を紹介する．

(D) <u>最小値が存在するとは限らない</u>
定理は minimizer の存在を保証していない．

例 2.1　例えば，(A) の場合に該当する $f(\xi) = e^{-\xi^2}$, $X = \{u \in C^1([0,1]);\ u(0) = u(1) = 0\}$

をとって，次の変分問題を考える：

$$\inf_{u\in X} I(u), \qquad I(u)=\int_0^1 e^{-[u'(x)]^2}\,dx, \qquad X=\left\{u\in C^1([0,1]);\ u(0)=u(1)=0\right\} \tag{2.7}$$

(1) 関数 $\overline{u}\equiv 0$ が対応するオイラー・ラグランジュ方程式の解であり，I の最大値を与えることを示す．ここで，$I(u)=\int_0^1 f(u'(x))\,dx$, $f(\xi)=e^{-\xi^2}$ であるから，オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dx}[f_\xi(u')]=\frac{d}{dx}\left[-2u'(x)e^{-(u'(x))^2}\right]=-2u''(x)\left(1-2(u'(x))^2\right)e^{-(u'(x))^2}=0$$

となる．よって，境界条件を考慮すると，この方程式の唯一の解は $\overline{u}'\equiv 0$ である．この解が最大値を与えることを見るために，$e^{-\xi^2}\le e^0=1\ \forall\xi$ より $I(u)\le\int_0^1 1\,dx=1\ \forall u$ に注意する．一方で，$I(\overline{u})=1$ だから，$\overline{u}$ はやはり最大値を与える．

(2) 変分問題の下限は 0 であることを示す．関数列 $\{u_n\}$ を

$$u_n(x)=n\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{n}{4}.$$

で定義し，u_n が X に属することに注意する．また，

$$I(u_n)=\int_0^1 e^{-4n^2(x-\frac{1}{2})^2}\,dx=\frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} e^{-y^2}\,dy$$

より，$n\to\infty$ のとき $I(u_n)\to 0$. したがって，I の非負性より下限は 0 である．

(3) 最後に，最小値が存在しないことを示す．下限 0 を達成するような u，つまり $I(u)=0$ を満たす u，が存在しないことを示せばよい．しかし，$e^{-\xi^2}>0\ \forall\xi$ を考慮すると，$\int_0^1 e^{-(u'(x))^2}\,dx=0$ を満たす関数 u が存在しないことが明らかである．

例 2.2 他に，Weierstrass の例というものがある．(B) の場合に，$f(x,\xi)=x\xi^2$ とおいて，境界条件を $u(0)=1, u(1)=0$ とすると，許容関数空間を広げても最小値が存在しないことが示される．

(E) <u>極小値が C^1 級であるとは限らない</u>

極小値が C^2 級ならば，オイラー・ラグランジュ方程式を満たすことを定理が言っているが，C^2 級でない極小値があることを否定していない．

例 2.3 例えば，(A) の場合に該当する $f(\xi)=(\xi^2-1)^2$ をとり，境界条件を $u(0)=u(1)=0$ とすれば，対応する最小化問題は区分的 C^1 級関数のなかで最小値を持つが，C^1 級関数では最小値が存在しない．

すなわち，変分問題

$$\inf_{u\in X} I(u), \qquad I(u)=\int_0^1 f(u'(x))\,dx, \qquad f(\xi)=(\xi^2-1)^2 \tag{2.8}$$

を次の二つの許容関数空間において考える：

$$\begin{aligned} X &= \{u \in C^1([0,1]);\ u(0)=u(1)=0\} \\ X_p &= \{u \in C_p^1([0,1]);\ u(0)=u(1)=0\} \end{aligned}$$

ただし，$C_p^1([0,1])$ は $[0,1]$ 上で連続で，かつ区分的に C^1 級であるような関数の空間である．

(1)
$$\overline{u}_p(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1/2] \\ 1-x, & x \in (1/2,1] \end{cases}$$

とおけば，$\overline{u}_p \in X$ で，$I(\overline{u}_p)=0$ だから，$\overline{u}_p$ は X_p における最小値である．

(2) X における下限も 0 であることを示す．そのため，上記の $\overline{u}_p$ に収束する C^1 級関数の列を構成すればよい．例えば，

$$u_n(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{2}-\frac{1}{n}] \\ -2n^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 - 4n\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - x + 1, & x \in (\frac{1}{2}-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \\ 1-x, & x \in (1/2,1] \end{cases}$$

とすれば，

$$I(u_n) = \int_0^1 f(u_n'(x))\,dx = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} f(u_n'(x))\,dx \le \frac{4}{n} \to 0.$$

したがって，X における下限は 0 である．

(3) X における最小値が存在しないことを示す．最小値 $u \in X$ が存在するならば，$I(u)=0$ でなければならない．よって，$[0,1]$ のほとんどいたる点で $|u'|=1$ でなければならない．しかし，$u \in X$ の微分が連続だから，$u' \equiv 1$ in $[0,1]$ または $u' \equiv -1$ in $[0,1]$ のどちらか成り立つが，どの場合でも境界条件を満たすことができない．

(4) 対応するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dx}\left[u'\left((u')^2-1\right)\right]=0$$

で，その解が $\overline{u} \equiv 0$ である．しかし，$I(\overline{u})=1$ だから，対応するオイラー・ラグランジュ方程式の解は最小値ではない．

(F) <u>凸性がないと，(2.6) の解が必ずしも最小値になるとは言えない</u>

$\xi \to f(x,u,\xi)$ が凸であっても，$(u,\xi) \to f(x,u,\xi)$ が凸でなければ，オイラー・ラグランジュ方程式の解は I の最小値になるとは限らない．停留値だけであって，極小値を与えたり，最大値を与えたりする場合がある．

例 2.4 例えば，$f(\xi)=e^{-\xi^2}$, $X=\{u \in C^1([0,1]);\ u(0)=u(1)=0\}$ をとれば，$\overline{u}=0$ がオイラー・ラグランジュ方程式の解で，I の最大値を与える．

(G) <u>狭義凸性がないと一意性が言えない</u>

汎関数を定義する関数 f が凸であっても，最小値が一意に決まるとは限らない．一意性に

は狭義凸性が必要である．

例 2.5 例えば，$f = f(\xi) \in C(\mathbb{R})$ が凸関数の場合の変分問題

$$\inf_{u\in X} I(u), \qquad I(u) = \int_a^b f\left(u'(x)\right)\,dx, \qquad X = \left\{u \in C^1([a,b]);\ u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta\right\} \tag{2.9}$$

について，関数

$$\overline{u}(x) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}(x-a)+\alpha \tag{2.10}$$

が最小値であることが示せる．

実際，$u \in X$ を任意にとると，Jensen の不等式

Jensen の不等式

v が $C([a,b])$-関数，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が凸関数ならば，

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b v(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(v(x))\,dx. \tag{2.11}$$

より，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u'(x))\,dx &\geq f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u'(x)\,dx\right) = f\left(\frac{u(b)-u(a)}{b-a}\right)\\
&= f\left(\frac{\beta-\alpha}{b-a}\right) = f(\overline{u}'(x))\\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\overline{u}'(x))\,dx
\end{aligned}$$

これは $I(u) \geq I(\overline{u})\ \forall u \in X$, という意味で，$\overline{u}$ が最小値である．
注：f を凸関数としているから，上の事実はオイラー・ラグランジュ方程式の定理より得られるが，その証明では $f \in C^2$ と仮定していたのに対し，ここでは $f \in C^0$ のみである．

一方で，二つ以上の異なる最小化関数が存在するような凸関数 f がある．例えば，$f(\xi) = |\xi|$ とすると，上の考察より，変分問題

$$\inf_{u\in X} I(u), \qquad I(u) = \int_0^1 f\left(u'(x)\right)\,dx, \qquad X = \left\{u \in C^1([0,1]);\ u(0) = 0,\ u(1) = 1\right\} \tag{2.12}$$

は $\overline{u}(x) = x$ という最小化関数を持つ．このとき，$I(\overline{u}) = 1$. しかし，$u(0) = 0, u(1) = 1$ を満たすようなどの C^1 級の非減少関数 u についても

$$I(u) = \int_0^1 |u'(x)|\,dx = \int_0^1 u'(x)\,dx = u(1) - u(0) = 1$$

となるので，そのような関数 u もすべて最小値を与える．

2.3　オイラー・ラグランジュ方程式の別バージョン

オイラー・ラグランジュ方程式にはもう一つの形がある．有用になる場合があり，その証明が参考になる部分があるので，ここで紹介する．

オイラー・ラグランジュ方程式 2

定理 2.3 定理2.2と同じ設定において，弱い極小値 $\overline{u} \in X \cap C^2([a,b])$ が存在するならば，$\overline{u}$ は次の微分方程式を満たす：

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)\right)-\overline{u}'(x)f_\xi\left(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)\right)\right]=f_x\left(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)\right), \qquad x\in(a,b). \tag{2.13}$$

Proof. 式 (2.13) の左辺の微分を計算すると，

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(x,\overline{u},\overline{u}'\right)-\overline{u}'f_\xi\left(x,\overline{u},\overline{u}'\right)\right]=f_x\left(x,\overline{u},\overline{u}'\right)+\overline{u}'\left\{f_u\left(x,\overline{u},\overline{u}'\right)-\frac{d}{dx}\left[f_\xi\left(x,\overline{u},\overline{u}'\right)\right]\right\}$$

が得られるので，オイラー・ラグランジュ方程式の元の形 (2.6) を適用すれば．結果が従う．

ここで，別の証明を記す．関数 $\overline{u}$ に $\overline{u}(x)+\delta\varphi(x)$ のように摂動を加えるのではなく，独立変数 x の"分布"を変えることで $\overline{u}(\psi(x,\delta))$ のように摂動を加えたときの変分を計算してみる．

具体的には，任意の $\varphi\in C_0^\infty(a,b)$ をとり，$\lambda=(2\max_{x\in[a,b]}|\varphi'(x)|)^{-1}$ に対して

$$\psi(x,\delta)=x+\delta\lambda\varphi(x)=y$$

とおく．すると，$|\delta|\le 1$ に対して $\psi(\cdot,\delta):[a,b]\to[a,b]$ は滑らかな同型写像であり，$\psi(a,\delta)=a$, $\psi(b,\delta)=b, \psi_x(x,\delta)>0$ を満たす．固定した $\delta\in[-1,1]$ に対して，上の同型写像の逆関数を $\eta(\cdot,\delta)$ とする，すなわち，

$$\psi(\eta(y,\delta),\delta)=y.$$

η の微分を求めておく．上式を y と δ それぞれで微分すると，

$$\begin{aligned}\psi_x(\eta(y,\delta),\delta)\eta_y(y,\delta) &= 1\\ \psi_x(\eta(y,\delta),\delta)\eta_\delta(y,\delta)+\psi_\delta(\eta(y,\delta),\delta) &= 0\end{aligned}$$

つまり，

$$\begin{aligned}\left(1+\delta\lambda\varphi'(\eta(y,\delta)\right)\eta_y(y,\delta) &= 1\\ \left(1+\delta\lambda\varphi'(\eta(y,\delta)\right)\eta_\delta(y,\delta)+\lambda\varphi(\eta(y,\delta)) &= 0\end{aligned}$$

を得るので，

$$\begin{aligned}\eta_y(y,\delta) &= 1-\delta\lambda\varphi'(y)+O(\delta^2)\\ \eta_\delta(y,\delta) &= -\lambda\varphi(y)+O(\delta)\end{aligned}$$

のように近似的に書くことができる．以降では，簡単のために，$\overline{u}$ の代わりに u と書く．

そこで，u の摂動を

$$u^\delta(x) := u(\psi(x,\delta)) \in X$$

とする．汎関数 I の u^δ における値は

$$\begin{aligned}I(u^\delta) &= \int_a^b f\left(x, u^\delta(x), (u^\delta)'(x)\right)\,dx\\ &= \int_a^b f\left(x, u(\psi(x,\delta)), u'(\psi(x,\delta))\psi_x(x,\delta)\right)\,dx\\ &= \int_a^b f\left(\eta(y,\delta), u(y), u'(y)\frac{1}{\eta_y(y,\delta)}\right)\eta_y(y,\delta)\,dy\end{aligned}$$

$\delta_0<1$ があってすべての $\delta\in[-\delta_0,\delta_0]$ について $I(u^\delta)\geq I(u)$ であるから，$I(u^\delta)$ の δ による微分が $\delta=0$ において消える．被積分関数の δ による微分を計算しておくと，

$$f\eta_{y\delta}+\left[f_x\eta_\delta+f_\xi\frac{-u'\eta_{y\delta}}{\eta_y^2}\right]\eta_y$$

となり，$\delta=0$ を代入すると

$$f(-\lambda\varphi'(y))+f_x(-\lambda\varphi(y))+f_\xi u'\lambda\varphi'(y)=\lambda\left[-f_x\varphi+(u'f_\xi-f)\varphi'\right]$$

となるので，

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\delta}I(u^\delta)\Big|_{\delta=0} &= \lambda\int_a^b\Big\{-f_x\left(x,u(x),u'(x)\right)\varphi(x)\\ &\qquad +\left[u'(x)f_\xi\left(x,u(x),u'(x)\right)-f\left(x,u(x),u'(x)\right)\right]\varphi'(x)\Big\}\,dx\\ &= \lambda\int_a^b\Big\{-f_x\left(x,u(x),u'(x)\right)\\ &\qquad -\frac{d}{dx}\left[u'(x)f_\xi\left(x,u(x),u'(x)\right)-f\left(x,u(x),u'(x)\right)\right]\Big\}\varphi(x)\,dx\end{aligned}$$

のように (2.13) が示された．□

二つのオイラー・ラグランジュ方程式 (2.6) と (2.13) の解が一致するとは限らない．例えば，オイラー・ラグランジュ方程式に関する定理において，

$$f(x,u,\xi)=f(u,\xi)=\frac{1}{2}\xi^2-u$$

とすれば，もとのオイラー・ラグランジュ方程式 (2.6) は

$$u''(x) = -1$$

であり，別バージョンの方程式は

$$0 = \frac{d}{dx}\left[f(u(x), u'(x)) - u'(x) f_\xi(u(x), u'(x))\right] = \frac{d}{dx}\left[-u(x) - \frac{1}{2}(u'(x))^2\right] = -u'(x)\left[u''(x) + 1\right]$$

である．よって，$u \equiv 1$ がオイラー・ラグランジュ方程式の別バージョンの解であるが，元のオイラー・ラグランジュ方程式の解ではない．

2.4　条件つきの最小化問題

2.4.1　積分型の条件

$f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}), g \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ として，変分問題

$$\inf_{u \in X} I(u), \qquad I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx \tag{2.14}$$

$$X = \left\{ u \in C^1([a,b]);\ u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta,\ \int_a^b g(x, u(x), u'(x))\, dx = 0 \right\}$$

の弱い極小値が満たすオイラー・ラグランジュ方程式を導く．
制約条件を満たす関数のなかで極小値を求めるため，変分を制約条件を満たす範囲で計算しなければならず，摂動として任意の φ について単純に $u + \delta\varphi$ をとることができない．そこで，制約条件を満たすようにこの摂動を修正するために，固定した関数 w に対してもう一つの自由度 ε を導入し，$u + \delta\varphi + \varepsilon w$ が X の元となるように陰関数定理により ε を δ の関数として決める．

u を弱い極小値とする．

$$\frac{d}{dx}\left[g_\xi(x, u(x), u'(x))\right] \neq g_u(x, u(x), u'(x))$$

を満たす $x \in (a, b)$ が存在すると仮定すると，

$$\int_a^b \left[g_\xi(x, u(x), u'(x)) w'(x) + g_u(x, u(x), u'(x)) w(x)\right]\, dx \neq 0$$

を満たす w がとれる．また，w を定数倍すれば，

$$\int_a^b \left[g_\xi(x, u(x), u'(x)) w'(x) + g_u(x, u(x), u'(x)) w(x)\right]\, dx = 1$$

とできる．

$\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ を任意にとり，上の w と $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\begin{aligned} F(\delta,\varepsilon) &= I(u+\delta\varphi+\varepsilon w) = \int_a^b f\left(x, u+\delta\varphi+\varepsilon w, u'+\delta\varphi'+\varepsilon w'\right)\,dx \\ G(\delta,\varepsilon) &= \int_a^b g\left(x, u+\delta\varphi+\varepsilon w, u'+\delta\varphi'+\varepsilon w'\right)\,dx \end{aligned}$$

とおく．このとき，次が成り立つ：

$$G(0,0)=0, \qquad G_\varepsilon(0,0)=1.$$

陰関数定理を適用して，$\delta_0>0$ と $v_\varphi(0)=0$ を満たす関数 $v_\varphi \in C^1([-\delta_0,\delta_0])$ があり，

$$G(\delta, v_\varphi(\delta)) = 0 \qquad \forall\delta \in [-\delta_0,\delta_0]$$

が成り立つ．つまり，$u+\delta\varphi+v_\varphi(\delta)w \in X$. 上式を δ で微分すると，

$$G_\delta(\delta, v_\varphi(\delta)) + G_\varepsilon(\delta, v_\varphi(\delta))v_\varphi'(\delta) = 0 \qquad \forall\delta \in [-\delta_0,\delta_0]$$

を得るので，

$$v_\varphi'(0) = -G_\delta(0,0).$$

$\delta_1<\delta_0$ があって，$F(0,0) \le F(\delta, v_\varphi(\delta))\ \ \forall\delta \in [-\delta_1,\delta_1]$ が成り立つことより，

$$F_\delta(0,0) + F_\varepsilon(0,0)v_\varphi'(0) = 0.$$

$F_\delta(0,0)$ は φ に依存するが，$F_\varepsilon(0,0)$ は φ に依存しないから，$\lambda = F_\varepsilon(0,0)$ とおけば，

$$F_\delta(0,0) - \lambda G_\delta(0,0) = 0,$$

すなわち，

$$\int_a^b \left(\left[f_\xi(x,u,u')\varphi' + f_u(x,u,u')\varphi\right] - \lambda\left[g_\xi(x,u,u')\varphi' + g_u(x,u,u')\varphi\right]\right)\,dx = 0.$$

部分積分と φ の任意性より

$$\frac{d}{dx}\left[f_\xi(x,u,u')\right] - f_u(x,u,u') = \lambda\left(\frac{d}{dx}\left[g_\xi(x,u,u')\right] - g_u(x,u,u')\right).$$

よく見ると，これは汎関数

$$\int_a^b \left[f(x,u(x),u'(x)) - \lambda g(x,u(x),u'(x))\right]\,dx \tag{2.15}$$

の制約条件なしの最小化に対応するオイラー・ラグランジュ方程式であることがわかる．つまり，条件つき最小化問題 (2.14) の弱い極小値 $\overline{u}$ が存在すれば，$\lambda \in \mathbb{R}$ があって，$\overline{u}$ が汎関数 (2.15) に対するオイラー・ラグランジュ方程式の解である（言い換えれば，この汎関数の停留値を与える）．この λ をラグランジュ未定乗数と言う．ラグランジュ未定乗数 λ は，極小値が制約条件を満たすという条件より決まる．

例 2.6 xy-平面の 2 点 $[-a,0]$ と $[a,0]$（ただし，$a>0$）を結ぶ長さ ℓ のグラフのうち，x-軸とグラフのに囲われる面積が最小となるものを求める．式で書くと，汎関数

$$J[u] = \int_{-a}^{a} u(x)\,dx$$

を条件

$$u(-a)=0, \qquad u(a)=0, \qquad \int_{-a}^{a} \sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx = \ell$$

のもとで最小にする C^1-関数 $u(x)$ を求める．

弱い極小値 $\overline{u}$ が存在するなら，$\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して，$\overline{u}$ は

$$\int_{-a}^{a} \left[u(x) - \lambda \sqrt{1+(u'(x))^2} \right] dx$$

に対するオイラー・ラグランジュ方程式の解である．

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$1 + \lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}} \right) = 0$$

であるが，これを積分して，

$$\lambda \frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}} = -(x - C_1), \qquad C_1 \in \mathbb{R},$$

u' について解くと，

$$u'(x) = \pm \frac{x - C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x-C_1)^2}}$$

となるので，もう一度，積分することで，

$$u(x) = \pm \sqrt{\lambda^2 - (x-C_1)^2} + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

がわかる．すなわち，グラフは円

$$(x-C_1)^2 + (u(x)-C_2)^2 = \lambda^2$$

の一部である．

境界条件 $u(-a)=u(a)=0$ と長さが指定されている条件より C_1, C_2, λ を求める．円の式で $x=\pm a$ とすれば，$(a-C_1)^2=\lambda^2-C_2^2=(-a-C_1)^2$ が従うので，$C_1=0$ を得る．また，λ が円の半径，a/λ がグラフが表す円弧の半角の sin であるから，$2a\le\ell$ であれば，C_2 と λ も一意に決まる．

2.4.2　横断条件

$f\in C^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}), \gamma\in C^1(\mathbb{R})\times C^1(\mathbb{R})$ として，変分問題

$$\inf_{b\in\mathbb{R},u\in X} I(u), \qquad I(u)=\int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx \tag{2.16}$$
$$X=\left\{u\in C^1([a,b]);\ u(a)=\alpha,\ \exists s_0:\ (b,u(b))=\gamma(s_0)\right\}$$

の弱い極小値が満たす方程式を導く．つまり，右端 b が固定されず，グラフの右端の点 $(b,u(b))$ が曲線 γ 上にある関数 u のなかで極小値を探す問題である．

最小化問題はグラフに限定されているが，$(x,u(x))$ より一般的な媒介変数による表示 $(x(t),y(t)), y(t)=u(x(t))$ を用いる．ただし，$x(t_a)=a, y(t_a)=u(a), x(t_b)=b, y(t_b)=u(b)$ とする．

$$I(u)=\int_{t_a}^{t_b} f\left(x(t),y(t),\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)x'(t)\,dt$$

と変数変換できるので，

$$F(x,y,x',y'):=f\left(x,y,\frac{y'}{x'}\right)x' \tag{2.17}$$

とおいて，汎関数

$$J(x,y)=\int_{t_a}^{t_b} F(x,y,x',y')\,dt$$

を考える．F は x', y' について斉 1-次関数であることが確かめられる．以降では，正斉 1-次関数でるというより一般的な仮定をする．すなわち，

$$F(x,y,kx',ky')=kF(x,y,x',y') \qquad \forall k>0.$$

対応するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \tag{2.18}$$

という連立微分方程式である．これらの方程式は独立ではなく，計算を省略するが，次の Weierstrass 方程式に集約できる：

$$F_{xy'}-F_{x'y}-\frac{F_{x'y'}}{x'y'}(x'y''-y'x'')=0.$$

今，$(\overline{x},\overline{y})$ が minimizer であるとして，摂動 $(x(t),y(t))=(\overline{x}(t),\overline{y}(t))+\varepsilon(\xi(t),\eta(t))$ についての変分条件

$$\frac{d}{d\varepsilon}J\left(\overline{x}(t)+\varepsilon\xi(t),\overline{y}(t))+\varepsilon\eta(t)\right)\big|_{\varepsilon=0}=0$$

を計算する．ここで，F が正斉 1-次関数であるから，媒介変数を変えても汎関数の値が変わらず，媒介変数を $t\in[t_a,t_b]$ に固定してもかまわない．$t=t_a$ における境界条件を満たすために $\xi(t_a)=\eta(t_a)=0$ とする．また，$t=t_b$ において，摂動 $(x(t_b),y(t_b))=(\overline{x}(t_b),\overline{y}(t_b))+\varepsilon(\xi(t_b),\eta(t_b))$ が曲線 γ 上の点でないといけないので，$s(\varepsilon)$ が存在して，$(\overline{x}(t_b),\overline{y}(t_b))+\varepsilon(\xi(t_b),\eta(t_b))=\big(\gamma_1(s(\varepsilon)),\gamma_2(s(\varepsilon))\big)$．この両辺から $(\overline{x}(t_b),\overline{y}(t_b))=(\gamma_1(s_0),\gamma_2(s_0))$ を引いて，ε で割って，$\varepsilon\to 0$ とすると，

$$(\xi(t_b),\eta(t_b))=s'(0)\big(\gamma_1'(s_0),\gamma_2'(s_0)\big).$$

さて，上の変分を計算して，さらに部分積分を施すと，

$$\begin{aligned}0&=\int_{t_a}^{t_b}\left(F_x\xi+F_{x'}\xi'+F_y\eta+F_{y'}\eta'\right)\,dt\\&=\int_{t_a}^{t_b}\left\{\left(F_x-\frac{d}{dt}(F_{x'})\right)\xi+\left(F_y-\frac{d}{dt}(F_{y'})\right)\eta\right\}\,dt+\left(F_{x'}\xi+F_{y'}\eta\right)\Big|_{t=t_b}\end{aligned}$$

となる．この関係は $\xi(t_b)=\eta(t_b)=0$ を満たす摂動についても成り立つので，積分項より (2.18) のオイラー・ラグランジュ方程式が従い，境界項より次の条件を得る：

$$F_{x'}\Big(x(t_b),y(t_b),x'(t_b),y'(t_b)\Big)\gamma_1'(s_0)+F_{y'}\Big(x(t_b),y(t_b),x'(t_b),y'(t_b)\Big)\gamma_2'(s_0)=0.$$

この式をもとの汎関数 (2.16) に対応した形に直すには，(2.17) と F の正斉次性（$F(x,y,x',y')=x'F(x,y,1,y'/x')$）を思い出して，

$$\begin{aligned}F_{x'}&=F\left(x,y,1,\frac{y'}{x'}\right)-\frac{x'y'}{(x')^2}F_{y'}\left(x,y,1,\frac{y'}{x'}\right)=f(x,y,u(x)')-u(x)'f_{u'}(x,y,u(x)')\\F_{y'}&=F_{y'}\left(x,y,1,\frac{y'}{x'}\right)=f_{u'}(x,y,u(x)')\end{aligned}$$

と F の微分が計算できるので，

$$\left[\left(f-u'f_\xi\right)\gamma_1'(s_0)+f_\xi\gamma_2'(s_0)\right]\big|_{t=t_b}=0$$

を得る．曲線 γ が式 $y=g(x)$ により与えられるとき，この条件は

$$\gamma_1'(s_0)\big[\left(f-u'f_\xi\right)+g'f_\xi\big]\big|_{x=b}=0$$

と変形できる．

例 2.7 汎関数

$$I[u]=\int_0^b (1+(u'(x))^2)\,dx$$

の極値を与える $\overline{u}$ を求める．ただし，$\overline{u}(0)=0$ で $\overline{u}$ のグラフの右端が曲線 $y=\frac{1}{x}$ 上にあるという制限がある．

オイラー・ラグランジュ方程式 $u''(x)=0$ の解で，$\overline{u}(0)=0$ を満たすものは $\overline{u}(x)=kx, k\in\mathbb{R}$ のみである．横断条件は

$$\left[(1-(\overline{u}'(x))^2)-\frac{1}{x^2}2\overline{u}'(x)\right]\Big|_{x=b}=0$$

となるので，点 $[b,\overline{u}(b)]$ が曲線上にあるという $kb=1/b$ の条件と横断条件

$$1-k^2-\frac{1}{b^2}2k=0$$

より $k=1/\sqrt{3}$.

横断条件の応用として，minimizer に角（すなわち，minimizer が連続であるが，微分が不連続であるような点）を許したとき，角の点で成り立つ条件を導く．いつもの変分問題

$$\inf_{u\in X} I(u),\qquad I(u)=\int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx,\qquad X=\left\{u\in C^1([a,b]);\ u(a)=\alpha, u(b)=\beta\right\} \tag{2.19}$$

の極小値が点 $x=c\in(a,b)$ で角をもつとする（c は未知である）．

汎関数を二つの部分

$$I(u)=I_1(u)+I_2(u)=\int_a^c f(x,u(x),u'(x))\,dx+\int_c^b f(x,u(x),u'(x))\,dx$$

に分けて，第一変分がゼロであるという極小値 $\overline{u}$ に対する条件を考える．区間 (a,c) と (c,b) に限定しても弱い極小値であるから，これらの区間の内部でオイラー・ラグランジュ方程式が成り立ち，変分への貢献がゼロであり，残るのは点 c における横断条件に対応する項のみである．よって，

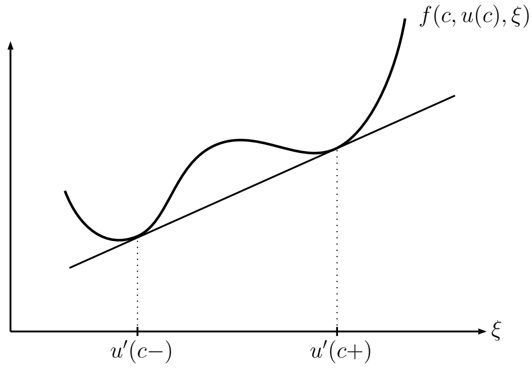
$$0=\left[\left(f-\overline{u}'f_\xi\right)\gamma_1'(s_0)+f_\xi\gamma_2'(s_0)\right]\Big|_{x=c-}-\left[\left(f-\overline{u}'f_\xi\right)\gamma_1'(s_0)+f_\xi\gamma_2'(s_0)\right]\Big|_{x=c+}$$

が成り立つ．ここで，点 c と値 $\overline{u}(c)$ が自由なため，$\gamma(s)$ は任意の滑らかな曲線である（$\gamma(s_0)=(c,\overline{u}(c))$）．これより，次の Weierstrass-Erdmann 条件を得る：

$$f_\xi\big|_{x=c-}=f_\xi\big|_{x=c+},\qquad \left(f-\overline{u}'f_\xi\right)\big|_{x=c-}=\left(f-\overline{u}'f_\xi\right)\big|_{x=c+}. \tag{2.20}$$

この条件は $f(c,u(c),\cdot)$ のグラフを用いて，次のように解釈できる．(2.20) の最初の条件は ξ の関

数としての f のグラフへの $u'(c-)$ と $u'(c+)$ における接線の傾斜が等しいことを言っている．それを考慮した二つ目の条件より，この平行な 2 本の接線が実は同一の接線であることが従う．すなわち，点 $[c, u(c)]$ において角が発生できるのは $f(c, u(c), \cdot)$ のグラフに異なる 2 点で接する接線がひけるときのみである．



2.5　第 2 変分と最小値の必要・十分条件

2.5.1　ルジャンドルとヤコビの条件

$f \in C^3([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ として，変分問題

$$\inf_{u \in X} I(u), \qquad I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx, \qquad X = \left\{u \in C^1([a, b]);\ u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta\right\} \tag{2.21}$$

の弱い極小値 $\overline{u} \in X \cap C^2([a, b])$ が存在するとする．

$v \in C^1(a, b)$,$v(a) = v(b) = 0$, に対し，$i(\delta) = I(\overline{u} + \delta v)$ とおくと，$i(\delta) \geq i(0)\ \forall \delta \in [-\delta_0, \delta_0]$ より，

$$i'(0) = 0, \qquad i''(0) \geq 0.$$

最後の不等式より

$$\int_a^b \left[f_{uu}(x, \overline{u}, \overline{u}')v^2 + 2f_{u\xi}(x, \overline{u}, \overline{u}')vv' + f_{\xi\xi}(x, \overline{u}, \overline{u}')(v')^2\right]\, dx \geq 0 \tag{2.22}$$

を得る．

$P(x) = f_{uu}(x, \overline{u}, \overline{u}'),\ Q(x) = f_{u\xi}(x, \overline{u}, \overline{u}'),\ R(x) = f_{\xi\xi}(x, \overline{u}, \overline{u}')$ とおいて，

$$\int_a^b \frac{d}{dx}[w(x)v^2(x)]\, dx = 0 \qquad \forall w \in C^1([a, b])$$

に注意すると，(2.22) の左辺を

$$\int_a^b \left[(P + w')v^2 + 2(Q + w)vv' + R(v')^2\right]\, dx$$

と書くことができる．これは

$$\int_a^b \left[R\left(v' + \frac{Q+w}{R}v\right)^2 + \left((P+w') - \frac{(Q+w)^2}{R}\right)v^2 \right] dx$$

のように変形できるので，関数 w を微分方程式

$$w' = -P + \frac{(Q+w)^2}{R} \tag{2.23}$$

を満たすようにとれば，上の積分の符号が R の符号に支配されることが見込まれる．実際，以下で示すように，$R \geq 0$ in $[a,b]$ は $\overline{u}$ が弱い極小値であるための必要条件である．しかし，$R \geq 0$ を $R > 0$ に変えても，十分条件ではない．その理由は，方程式 (2.23) の解が区間 $[a,b]$ 全体で存在するとは限らないからである．

ルジャンドルの必要条件

汎関数 $I[u]$ が $\overline{u}$ において弱い極小値を達成するための必要条件は

$$R(x) = f_{\xi\xi}(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)) \geq 0 \qquad \forall x \in [a,b].$$

Proof. $c \in (a,b)$ が存在して，$R(c) < 0$ であると仮定する．R の連続性と微分方程式の解の局所存在より，$\delta > 0$ が存在して，$x \in [c-\delta, c+\delta]$ において $R(x) < 0$ で，微分方程式

$$w' = -P + \frac{(Q+w)^2}{R}$$

の連続微分可能な解をもつ．

関数 $v \in C^1([a,b])$ を条件

$$v(x) = 0,\ \ x \notin [c-\delta, c+\delta], \qquad v(x) \neq 0,\ \ x \in [c-\delta, c+\delta]$$

を満たすように選ぶと，上で定義した第 2 変分は

$$i''(0) = \int_{c-\delta}^{c+\delta} \left[Pv^2 + 2Qvv' + R(v')^2\right] dx = \int_{c-\delta}^{c+\delta} R\left(v' + \frac{Q+w}{R}v\right)^2 dx \leq 0$$

となる．区間 $(c-\delta, c+\delta)$ において $v' + \frac{Q+w}{R}v = 0$ を境界条件 $v(c-\delta) = 0$ のもとで満たす関数 v が $v(x) \equiv 0$ しかないから，この v に対して $i''(0) < 0$ となり，局所的な最小化の性質と矛盾する． □

微分方程式 (2.23) が区間 $[a,b]$ で解をもてば，十分条件も得られる．(2.23) はリッカチの方程式

(Riccati equation) で一般には解けないから，変換

$$w(x) = -Q - R\frac{\nu'(x)}{\nu(x)} \tag{2.24}$$

を $\nu(x) \neq 0\ \forall x \in [a,b]$ の仮定のもとで行い，線形な 2 階微分方程式（ヤコビ方程式）

$$\frac{d}{dx}(R\nu') + (Q' - P)\nu = 0 \qquad \text{または} \qquad \nu''(x) + \frac{R'}{R}\nu' + \frac{Q' - P}{R}\nu = 0 \tag{2.25}$$

に直す．

十分条件

次の 2 つの条件

(a) $R(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$

(b) $\nu(x) \neq 0\ \forall x \in [a,b]$ を満たすヤコビ方程式 (2.25) の解 ν が存在する

が満たされれば，第 2 変分 $i''(0)$ が，恒等的に零でないすべての v について正となる．

Proof. $\nu(x) \neq 0\ \forall x \in [a,b]$ を満たすヤコビ方程式 (2.25) の解 ν があれば，それを用いて変換 (2.24) を行うことができ，そのように得た w が微分方程式 (2.23) を $[a,b]$ において満たすので，第 2 変分は

$$i''(0) = \int_a^b R\left(v' + \frac{Q+w}{R}v\right)^2 dx = \int_a^b R\left(v' + \frac{\nu'}{\nu}v\right)^2 dx$$

となる．$R(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$ で，$v' + \frac{\nu'}{\nu}v = 0$ を $[a,b]$ で成り立たせる関数 v は $v \equiv 0$ しかない（境界条件 $v(a) = v(b) = 0$ のため）から，$i''(0) > 0$ が従う． □

実は，オイラー・ラグランジュ方程式との関係に気づけば（ヤコビによる），ヤコビ方程式の解を見つけることができる．積分定数 c_1, c_2 を含むオイラー・ラグランジュ方程式の一般解を $\overline{u}(x, c_1, c_2)$ として，オイラー・ラグランジュ方程式

$$f_u(x, \overline{u}(x, c_1, c_2), \overline{u}'(x, c_1, c_2)) - \frac{d}{dx}\left[f_\xi(x, \overline{u}(x, c_1, c_2), \overline{u}'(x, c_1, c_2))\right] = 0$$

を c_1 について微分すれば，

$$f_{uu}\frac{\partial \overline{u}}{\partial c_1} + f_{u\xi}\frac{\partial \overline{u}'}{\partial c_1} - \frac{d}{dx}\left[f_{u\xi}\frac{\partial \overline{u}}{\partial c_1} + f_{\xi\xi}\frac{\partial \overline{u}'}{\partial c_1}\right] = 0$$

を得る．整理して，P, R, Q を用いて書くと，

$$(P - Q')\frac{\partial \overline{u}}{\partial c_1} - \frac{d}{dx}\left(R\frac{\partial \overline{u}'}{\partial c_1}\right) = 0$$

になる．しかし，これはヤコビ方程式において ν を $\frac{\partial \overline{u}}{\partial c_1}$ に変えたものである．よって，

$$\nu_1 = \frac{\partial \overline{u}}{\partial c_1}, \qquad \nu_2 = \frac{\partial \overline{u}}{\partial c_2}$$

というヤコビ方程式の二つの特殊解を得た．

そこで，ヤコビは

$$\Delta(x,a) = \nu_2(a)\nu_1(x) - \nu_1(a)\nu_2(x)$$

という解に着目した．$\Delta(x,a)$ は $x=a$ でゼロになるが，その右にある $\Delta(\cdot,a)$ の最初の零点 $\overline{a}$ を a の**共役点**と呼ぶ．

注 $\Delta'(a,a)=0$ ならば，解の一意性より，$\Delta\equiv 0$ となるから，以下では $\Delta'(a,a)\neq 0$ と仮定する．$x=a$ でゼロとなる他の non-trivial な解 $\tilde{\Delta}(x,a)$ に対して，

$$D(x) = k\Delta(x,a), \qquad k = \frac{\tilde{\Delta}'(a,a)}{\Delta'(a,a)},$$

と定義すれば，$D(a)=0=\tilde{\Delta}(a,a)$, $D'(a)=\tilde{\Delta}'(a,a)$ が成り立つから，解の一意性より $D\equiv\tilde{\Delta}$ を得て，$\tilde{\Delta}$ は Δ の定数倍（k 倍）である．したがって，$\nu(a)=0$ を満たす解の零点がすべて一致し，上で定義した Δ の零点を調べればよい．
また，上で導いた二つの特殊解 ν_1,ν_2 が独立だということを証明していないが，万が一独立でなかった場合は他の解がなんらかの方法で見つかり，恒等的に 0 でない $\Delta(x,a)$ があると仮定して，話を進める．

もし，$\overline{a}>b$ なら，変数を少しシフトすることで $[a,b]$ でゼロにならないようなヤコビ方程式の解が作れる（詳しい証明は省略）から，十分条件より $\overline{u}$ が minimizer であることが保証される．一方で，$\overline{a}=b$ のとき，第 3 変分以上を考える必要になり，詳細を省略する．また，$\overline{a}<b$ のとき，$\overline{u}$ が minimizer にはならないことが証明されている（詳しくは，[7] の 78 ページを参照）．まとめると，次の条件を得た．

ヤコビの必要条件

$\overline{u}$ が minimizer であるための必要条件は

$$\Delta(x,a)\neq 0 \qquad \forall x\in(a,b).$$

この条件には幾何学的な解釈がある．オイラー・ラグランジュ方程式の解で条件 $\overline{u}(a)=\alpha$ を満たすものを一つのパラメータ c を用いて，$\overline{u}(x,c)$ と表す．二つの近い解

$$\overline{u}(x,c), \qquad \overline{u}(x,c+\delta)\approx\overline{u}(x,c)+\delta\frac{\partial\overline{u}}{\partial c}(x,c)$$

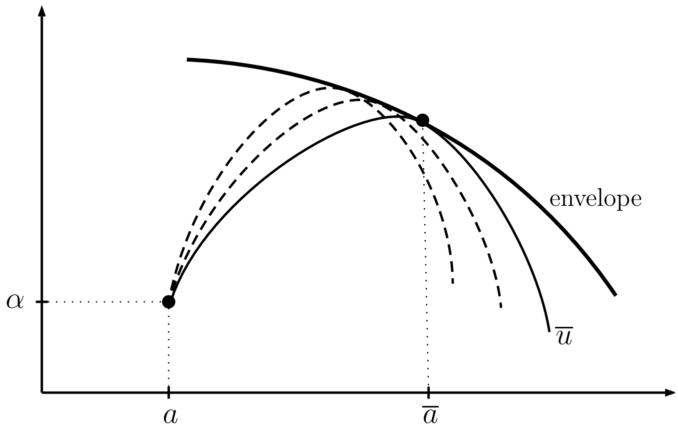
の交点 $[x_0,y_0]$ は（小さい誤差を許せば）$\frac{\partial\overline{u}}{\partial c}(x_0,c)=0$ を満たすので，共役点に近いと予想できる（$\nu(x)=\frac{\partial\overline{u}}{\partial c}(x,c)$ はヤコビ方程式の解で，$\nu(a)=0$ を満たすので，一意性より $0=\frac{1}{\delta}[\overline{u}(x_0,c+$

$\delta) - \overline{u}(x_0, c)] \approx \frac{\partial \overline{u}}{\partial c}(x_0, c) = \nu(x_0)$ を満たす x_0 は（近似的に）共役点でなければならない）．一方で，

$$y = \overline{u}(x, c), \qquad \frac{\partial \overline{u}}{\partial c}(x, c) = 0$$

を満たす (x, y) は曲線族 $\{\overline{u}(x, c)\}_{c\in\mathbb{R}}$ の包絡線を形成する．これを簡単に理解するには，包絡線が $y = g(x)$ のグラフで表されると仮定する．すると，任意の x に対して c が存在し（これを $c(x)$ とする），$g(x) = \overline{u}(x, c(x))$ が成り立つ．さらに包絡線の条件として，この点 x において g と $\overline{u}$ のグラフは共通の接線をもつ，すなわち，$g'(x) = \overline{u}_x(x, c(x))$．今，すべての x について成り立つ $g(x) = \overline{u}(x, c(x))$ の両辺を x について微分すると，$g'(x) = \overline{u}_x(x, c(x)) + \overline{u}_c(x, c(x))c'(x)$ を得るが，$g'(x) = \overline{u}_x(x, c(x))$ より $\overline{u}_c c' = 0$，つまり $\overline{u}_c = 0$ が示される．

すなわち，点 $[a, \alpha]$ から始まるオイラー・ラグランジュ方程式の解の族に包絡線があれば，ある解 $\overline{u}$ の共役点 $\overline{a}$ は $\overline{u}$ のグラフが包絡線と接する点に対応する．



例 2.8

$$I(u) = \int_0^5 (u' + 1)^2 (u')^2 \, dx$$

の minimizer を境界条件

$$y(0) = 2, \qquad y(5) = k = 1$$

のもとで求める．

$f(x, u, \xi) = (\xi + 1)^2 \xi^2$ が ξ にしか依らないので，オイラー・ラグランジュ方程式は $f_\xi = const$，つまり，

$$4(u')^3 + 6(u')^2 + 2u' = const$$

となり，一般解は

$$\overline{u}(x) = c_1 x + c_2,$$

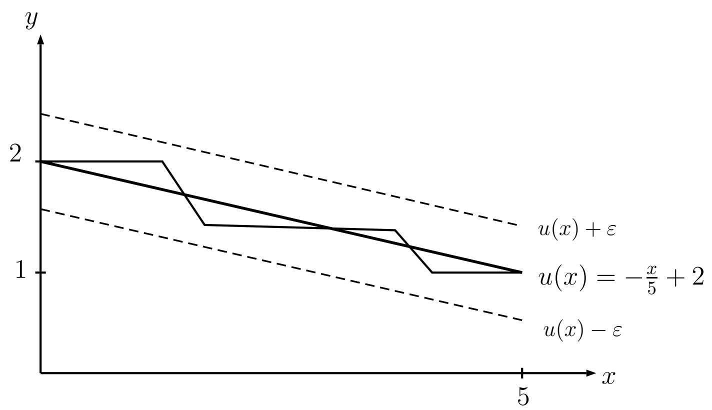
境界条件を満たす解は

$$\overline{u}(x) = \frac{k-2}{5}x + 2 = -\frac{1}{5}x + 2.$$

- ルジャンドルの条件：
$$R = f_{\xi\xi} = 2(6(\overline{u}')^2 + 6\overline{u}' + 1) = \frac{2}{25} > 0$$
より満たされる．

- ヤコビの条件：
$$\nu_1(x) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial c_1} = x, \qquad \nu_2(x) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial c_2} = 1$$
より $\Delta(x, a) = x - a$ で，この関数は $x = a$ 以外の零点をもたないため，ヤコビ条件も満たされる．

十分条件が満たされるにもかかわらず，$\overline{u}(x) = -\frac{1}{5}x + 2$ の近傍に $I(u)$ をより小さくする関数 u が存在する．実際，下図のように，u が傾斜 0 と -1 を持つ線分からなら折れ線だと，$I(u) = 0$ となる（このとき，Weierstrass-Erdmann 条件が満たされることが確認できる）．傾斜が変わる頻度を大きくすれば，この u が上の $\overline{u}$ に限りなく近づけることができる．このように得た関数 u は滑らかではないが，角を軟化することによって，いくらでも滑らかにすることができ，滑らかな関数で汎関数の値を限りなくゼロに近づけることができる．
境界条件を変更しても，解が $c_1 \in (-1, 0)$ を満たす傾斜 c_1 の線形関数であれば，同じような状況になる（角をもつ極小値を構成する余裕ができる）．



この現象はこれまで考えてきたことと矛盾しない理由は，折れ線の関数が弱い極小値に対して要求している「C^1-ノルムで近い」という条件を満たしていないことである．実際，この折れ線の微分は 0 か -1 で $\overline{u}(x) = -\frac{1}{5}x + 2$ の微分 $\frac{1}{5}$ に近くないから，弱い極小値のみ考える限り，比較の対象外となる．

2.5.2　強い極小値について

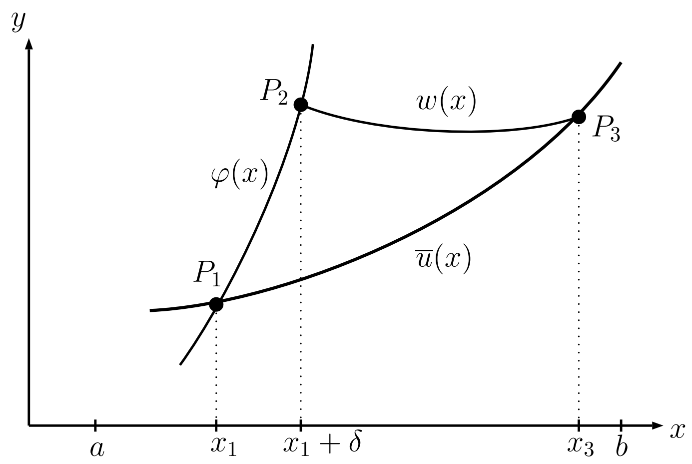
これまで導いた弱い極小値のための必要条件は強い摂動の場合もそのまま成り立つが，ある意味，不十分である．それを補うのは次のように導かれる Weierstrass の条件である．

$\overline{u}$ が強い極小値であるとする．下図のように，任意の点 $x_1 \in (a, b)$ をとり，点 $P_1 = [x_1, \overline{u}(x_1)]$

を通る任意の滑らかな関数 φ を考える．$\delta > 0$ に対して，$x_2 = x_1 + \delta < b, P_2 = [x_2, \varphi(x_2)]$ とおく．さらに，点 $x_3 \in (x_2, b)$ に対して，$P_3 = [x_3, \overline{u}(x_3)]$ として，2 点 P_2, P_3 を境界とする汎関数 I の強い極小値を w とする．そこで，$\overline{u}$ の摂動を次のように定義する：

$$u^\delta(x) = \begin{cases} \overline{u}(x), & x \in [a, x_1] \cup [x_3, b] \\ \varphi(x), & x \in [x_1, x_1 + \delta] \\ w(x), & x \in [x_1 + \delta, x_3] \end{cases}$$

この摂動の点 x_1 における傾斜は，δ を小さくしても $\overline{u}$ の x_1 における傾斜と異なることに注意する．



今，

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{\delta \to 0+} \frac{1}{\delta} \Big(I[u^\delta] - I[u] \Big) \\ &= \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \left(\int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi(x), \varphi'(x))\, dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x, w(x), w'(x))\, dx - \int_{x_1}^{x_3} f(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x))\, dx \right) \end{aligned}$$

$\overline{u}(x)$ と $w(x)$ の左端は $\varphi(x)$ のグラフ上にあるので，横断条件より

$$\begin{aligned} &\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \left(\int_{x_2}^{x_3} f(x, w(x), w'(x))\, dx - \int_{x_1}^{x_3} f(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x))\, dx \right) \\ &= - \big[(f(x_1, \overline{u}(x_1), \overline{u}'(x_1)) - \overline{u}'(x_1) f_\xi(x_1, \overline{u}(x_1), \overline{u}'(x_1)) + \varphi'(x_1) f_\xi(x_1, \overline{u}(x_1), \overline{u}'(x_1)) \big]. \end{aligned}$$

また，明らかに

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \int_{x_1}^{x_1 + \delta} f(x, \varphi(x), \varphi'(x))\, dx = f(x_1, \overline{u}(x_1), \varphi'(x_1)).$$

これを合わせると，

$$f(x_1, \overline{u}(x_1), \varphi'(x_1)) - f(x_1, \overline{u}(x_1), \overline{u}'(x_1)) - f_\xi(x_1, \overline{u}(x_1), \overline{u}'(x_1)) \big(\varphi'(x_1) - \overline{u}'(x_1) \big) \geq 0$$

となる．すなわち，Weierstrass の E-function を

$$E(x,u,p,q)=f(x,u,q)-f(x,u,p)-f_\xi(x,u,p)(q-p)$$

で定義すると，次の必要条件を得た．

Weierstrass の必要条件

汎関数 $I[u]$ が $u=\overline{u}$ において強い極小値をもつための必要条件は

$$E(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x),q)\geq 0 \qquad \forall x\in(a,b),\ \ \forall q\in\mathbb{R}.$$

すべての $x\in(a,b)$ に対し，関数 $\xi\to f(x,\overline{u}(x),\xi)$ のグラフは $\xi=\overline{u}'(x)$ におけるこのグラフへの接線より上になければならない，つまり局所凸である，という幾何学的な解釈ができる．

上の例2.8において，境界条件を考慮しないオイラー・ラグランジュ方程式の一般解は $u(x)=c_1x+c_2$ だったが，これに対応する Weierstrass の E-function を計算すると，

$$E(x,u,u',q)=(q-c_1)^2\big[q^2+2(c_1+1)q+(3c_1^2+4c_1+1)\big]$$

となる．$[\cdot]$ 括弧の中身は $q=-c_1-1$ において最小値があり，この q を代入すると，$E(x,u,u',-c_1-1)$ の値は $(2c_1+1)^2c_1(c_1+1)$ に等しいから，強い極小値に対する Weierstrass の条件が $c_1>0$ と $c_1<-1$ で満たされ，$c_1\in(-1,0)$ で満たされないことがわかる．

2.5.3　強い極小値のための必要条件

まずは，領域 Ω を覆う**停留曲線場**（extremal field）$\varphi(x,c)$ の概念を導入する：

(1) $\varphi(x,c)$ は汎関数の停留値を与える関数（extremal，すなわち，オイラー・ラグランジュ方程式の解）である．

(2) パラメータ $c\in\mathbb{R}$ がある範囲を動けば，$\varphi(x,c)$ の曲線が領域 Ω を覆う（埋め尽くす）．

(3) Ω の各点 (x,y) に対して，その点を通る曲線 $\varphi(x,c)$ がただ一つ存在する．

停留曲線場を構成する曲線がすべて Ω の境界上にある同一の点を通るとき，**中心方向場**（central field）という．詳しくは，例えば [12], p.123 を参照．

与えられた領域または与えられた停留曲線の近傍を中心方向場で覆う単純な方法は，ある点 $[a,\alpha]$ を通るオイラー・ラグランジュ方程式の解をとることである．これらの解が $x=a$ 以外で交わらない条件はヤコビの条件に関係がある．つまり，与えられた停留曲線が $x=a$ の次に近くの停留曲線と交わる点はこれらの解（停留曲線）の包絡線上にあり，考える領域においてヤコビ条件が満たされれば，そのような交点が存在しないと言える．
例えば，例2.8で，$u(0)=2$ を満たすオイラー・ラグランジュ方程式の解は $u(x)=kx+2,\ k\in\mathbb{R}$

で，これらの解は点 $[0,2]$ 以外では交わらないから，$(0,\infty)\times\mathbb{R}$ の中心方向場を与える．

停留曲線場の各点 $[x,y]$ における傾斜 $p(x,y)=\varphi_x(x,c)$ が満たす方程式を確認する．傾斜 p の微分

$$p_x=\varphi_{xx}+\varphi_{xc}c_x,\qquad p_y=\varphi_{xc}c_y$$

と $y=\varphi(x,c)$ より計算されるパラメータ c の微分

$$c_x=-\frac{\varphi_x}{\varphi_c},\qquad c_y=\frac{1}{\varphi_c}$$

を合わせると，

$$p_x+pp_y=\varphi_{xx}$$

が成り立つことがわかる．

一方で，$\varphi(x,c)$ がオイラー・ラグランジュ方程式の解であるから，

$$f_{\xi\xi}\varphi_{xx}+f_{\xi u}\varphi_x+f_{\xi x}-f_u\Big|_{(x,\varphi(x,c),\varphi_x(x,c))}=0.$$

よって，傾斜 p は次の 1 階微分方程式を満たす：

$$(p_x+pp_y)f_{\xi\xi}+pf_{\xi u}+f_{\xi x}-f_u=0. \tag{2.26}$$

今，$\overline{u}$ がが境界条件を満たすオイラー・ラグランジュ方程式の解で，その近傍が停留曲線場に覆われているとする．すなわち，$\overline{u}$ はヤコビの条件 $\Delta(x,a)>0$ in $(a,b]$ を満たす．十分条件を導くために，境界条件を満たし，停留曲線場に覆われた領域に含まれる u に対して変分 $\Delta I=I(u)-I(\overline{u})$ を見る．ただし，強い極小値を考えているので，$u=\overline{u}+\delta\varphi$ という形の摂動に限定できない．

ヒルベルトのアイデアに従って，$I(\overline{u})$ の積分を経路に依存しない積分

$$\int_a^b\Phi(x,u(x),u'(x))\,dx,\qquad \Phi(x,u,u')=f(x,u,p)+(u'-p)f_\xi(x,u,p),\qquad p=p(x,y)$$

で置き換える．つまり，$p(x,y)$ をうまく選んで，この積分が停留曲線場に覆われる領域内にある経路 u をどのようにとっても，上の積分が $I(\overline{u})$ になるようにする．$\Phi(x,u,u')=M(x,u)+N(x,u)u'$ と書くと，

$$M(x,u)=f(x,u,p)-pf_\xi(x,u,p),\qquad N(x,u)=f_\xi(x,u,p)$$

であるが，

$$\frac{\partial M}{\partial u}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.27}$$

を満たすように選べば，上の積分は経路に依存しない．実際，$S(x,u)$ があって，$M(x,u) = \frac{\partial S}{\partial x}(x,u), N(x,u) = \frac{\partial S}{\partial u}(x,u)$ が成り立てば，

$$\int_a^b \Phi(x,u,u')\,dx = \int_a^b \left[M(x,u) + N(x,u)u'\right]\,dx = \int_a^b \frac{d}{dx}S(x,u(x))\,dx = S(a,u(a)) - S(b,u(b))$$

のように，すべての u について $S(a,u(a)) - S(b,u(b))$ に等しく，経路に依存しない．$p = p(x,u)$ に注意して，式 (2.27) を書き下すと，

$$(p_x + pp_y)f_{\xi\xi} + pf_{\xi u} + f_{\xi x} - f_u = 0$$

を得るが，これは (2.26) と同じ微分方程式である．よって，$p(x,y)$ を停留曲線場の傾斜とすれば，

$$\int_a^b \Phi(x,u(x),u'(x))\,dx, = \int_a^b \left[f(x,u,p) + (u'-p)f_\xi(x,u,p)\right]\,dx$$

は経路に依存しない．しかも，$u = \overline{u}, u' = \overline{u}'$ とすれば，$y = u(x)$ に沿って $p(x,y) = \overline{u}'(x)$ だから，上の積分が $I(\overline{u})$ に等しい．

このようにして，

$$\Delta I = I(u) - I(\overline{u}) = \int_a^b \left[f(x,u,u') - f(x,u,p) + (u'-p)f_\xi(x,u,p)\right]\,dx$$

と書けることがわかったが，Weierstrass の E-function を思い出すと，

$$\Delta I = \int_a^b E(x,u,p,u')\,dx$$

を得る．ただし，$p = p(x,u(x))$ は点 $[x,u(x)]$ における停留曲線場の傾斜である．

極小値の十分条件として，$E(x,u,p,u') \geq 0$ を要求すればよい．強い極小値の場合，C^0-ノルムで測った $\overline{u}$ の近傍にあるすべての u に対して $E \geq 0$ を要求するが，弱い極小値の場合は，C^1-ノルムで測った $\overline{u}$ の近傍にあるすべての u に対して $E \geq 0$ を要求するだけで十分である（つまり，微分も近い u に限定してもよい）．

強い極小値のための十分条件

汎関数 $I[u]$ が $u = \overline{u}$ において強い極小値をもつための十分条件は

(1) $\overline{u}$ は境界条件を満たすオイラー・ラグランジュ方程式の解である

(2) $\overline{u}$ を停留曲線場で覆うことが可能である（または，ヤコビ条件 $\Delta(x,a) > 0$ in $(a,b]$ が満たされる）．

(3) $\delta > 0$ が存在し，$\|u - \overline{u}\|_{C^0} < \delta$ を満たす全ての u に対して $E(x,u(x),p(x,u(x)),u'(x)) \geq 0$ が成り立つ．ここで，p は (2) の停留曲線場の傾斜である．

上の (3) の条件でノルムを C^1-ノルムに変えれば，弱い極小値のための十分条件を得る．

例2.8を改めて見ると，$\varphi(x,c)=cx+2$ は $(0,5)\times\mathbb{R}$ の中心方向場を与え，その傾斜は $p(x,y)=c=\frac{y-2}{x}$ である．E-function は

$$E(x,u,p,u')=(u'-p)^2\big[(u')^2+2(p+1)u'+(3p^2+4p+1)\big]$$

となり，$[\cdot]$ の最小値は $u'=-p-1$ のときで，$p(p+1)$ に等しい．しかし，この値が常に非負になるとは限らない．例えば，$k=12$ で $\overline{u}(x)=2x+2$ としても，$\|u-\overline{u}\|_{C^0}<\delta$ より $|p-2|<\frac{\delta}{x}$ しか言えず，x を小さくとって $p\in(-1,0)$ となるようにできる．よって，十分条件は満たされない．一方で，例えば $k=12$ のとき，停留曲線場を $\varphi(x,c)=2x+c$ とすれば，傾斜は常に $p=2$ となる．この場合，$E(x,u,p,u')=(u'-2)^2\big[(u')^2+6u'+21\big]\geq 0$ が全ての u' について成り立つ．$k\notin[-3,2]$ の場合も同様に十分条件を満たすことができるので，$\overline{u}(x)=\frac{k-2}{5}x+2$ が強い極小値であることが示される．

この例でわかるように，上記の十分条件を確認するのが難しい場合がある．そのため，条件を強めてしまうことになるが，より確認しやすい条件も提案された．例えば，

強い極小値のための十分条件 2

汎関数 $I[u]$ が $u=\overline{u}$ において強い極小値をもつための十分条件は

(1) $\overline{u}$ は境界条件を満たすオイラー・ラグランジュ方程式の解である

(2) 考える区間 $[a,b]$ で $\overline{u}$ は共役点を持たない．

(3) $\delta>0$ が存在し，$\|u-\overline{u}\|_{C^0}<\delta$ を満たす全ての u に対して　$f_{\xi\xi}(x,u(x),u'(x))>0.$

2.6　いくつかの拡張

この節では，オイラー・ラグランジュ方程式の様々な拡張を紹介する．

問題 2.1　（他の境界条件に対するオイラー・ラグランジュ方程式を導く）

オイラー・ラグランジュ方程式に関する定理を次の場合に書き換える．

(1) $X=\{u\in C^1([a,b]);\ u(a)=\alpha\}$（右端が自由）

(2) $X=C^1([a,b])$（両端が自由）

---

(1) 定理がそのまま成り立つが，オイラー・ラグランジュ方程式の境界条件は，$\overline{u}(b)=\beta$ のと

ころを

$$f_\xi\left(b, \overline{u}(b), \overline{u}'(b)\right) = 0$$

という境界条件に変更する必要がある．

(1-1) $\overline{u}$ が X における弱い極小値だから，

$$I(\overline{u}) \le I(\overline{u} + \delta\varphi) \qquad \forall\delta \in [-\delta_0, \delta_0],\ \forall\varphi \in C^1([a,b]) \text{ with } \varphi(a) = 0.$$

すなわち，$i(\delta) := I(\overline{u} + \delta\varphi)$ とおくと，

$$i(0) \le i(\delta) \qquad \forall\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$$

を得る．したがって，

$$i'(0) = \frac{d}{d\delta} I(\overline{u} + \delta\varphi)\Big|_{\delta=0} = 0.$$

この微分を具体的に計算すると，

$$\int_a^b \left[f_\xi\left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\right)\varphi'(x) + f_u\left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\right)\varphi(x)\right]\, dx = 0$$

というオイラー・ラグランジュ方程式の弱形式を得る．

第 1 項で部分積分を行うことで，

$$\int_a^b \left[-\frac{d}{dx}\left(f_\xi\left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\right)\right) + f_u\left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\right)\right]\varphi(x)\, dx + f_\xi\left(b, \overline{u}(b), \overline{u}'(b)\right)\varphi(b) = 0$$

$\forall\varphi \in C^1([a,b])$ with $\varphi(a) = 0$ がわかる．$\varphi(b) = 0$ を満たす任意の φ を考えることにより，元の定理と同じオイラー・ラグランジュ方程式が得られる．しかし，境界条件は異なる：$u(a) = \alpha$ に加えて，

$$f_\xi\left(b, \overline{u}(b), \overline{u}'(b)\right) = 0$$

という条件が必要となる（これを $\varphi(b) = 1$ を満たす φ をとることによって導く）．

(1-2) $\overline{u}$ がオイラー・ラグランジュ方程式の解であり，$\overline{u}(a) = \alpha,\ f_\xi\left(b, \overline{u}(b), \overline{u}'(b)\right) = 0$ を満たすとする．$(u, \xi) \to f(x, u, \xi)$ が凸関数であるから，凸関数の定義の下の Remark より，

$$f(x, u, u') \ge f(x, \overline{u}, \overline{u}') + f_u(x, \overline{u}, \overline{u}')(u - \overline{u}) + f_\xi(x, \overline{u}, \overline{u}')(u' - \overline{u}')$$

がすべての $u \in X$ について正しい．この式を積分して，

$$I(u) \ge I(\overline{u}) + \int_a^b \left[f_u(x, \overline{u}, \overline{u}')(u - \overline{u}) + f_\xi(x, \overline{u}, \overline{u}')(u' - \overline{u}')\right]\, dx,$$

第 2 項に部分積分を適用すると，

$$I(u) \geq I(\overline{u}) + \int_a^b \left[f_u(x, \overline{u}, \overline{u}') - \frac{d}{dx} \big(f_\xi(x, \overline{u}, \overline{u}') \big) \right] (u - \overline{u}) \, dx$$

（$u(a) - \overline{u}(a) = 0,\ f_\xi \left(b, \overline{u}(b), \overline{u}'(b)\right) = 0$ のため境界項が消える）.

$\overline{u}$ がオイラー・ラグランジュ方程式の解であるという事実を用いると，

$$I(u) \geq I(\overline{u}) \qquad \forall u \in X$$

にたどり着く．すなわち，$\overline{u}$ は最小値である.

(1-3) u と v を変分問題の二つの解とし，必ず $u = v$ であることを示そう.

$$w := \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$$

とすれば，$w \in X$ である．$(u, \xi) \to f(x, u, \xi)$ が凸関数であるから，定義より（$\lambda = \frac{1}{2}$ とする）

$$\frac{1}{2}f(x, u, u') + \frac{1}{2}f(x, v, v') \geq f\left(x, \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v, \frac{1}{2}u' + \frac{1}{2}v'\right) = f(x, w, w').$$

I の最小値を m とおくと，

$$m = \frac{1}{2}I(u) + \frac{1}{2}I(v) \geq I(w) \geq m$$

を得るが，ここで $\geq$ がすべて等式であることになる．よって，

$$\int_a^b \left[\frac{1}{2}f(x, u, u') + \frac{1}{2}f(x, v, v') - f\left(x, \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v, \frac{1}{2}u' + \frac{1}{2}v'\right) \right] dx = 0.$$

しかし，f の狭義凸性より，$u = v, u' = v'$ でない限り，被積分関数が常に正である．したがって，$u = v$ が成り立つ.

(2) 同様の考察で，境界条件を

$$f_\xi \big(a, \overline{u}(a), \overline{u}'(a)\big) = 0, \quad f_\xi \big(b, \overline{u}(b), \overline{u}'(b)\big) = 0$$

に変えれば，定理が成り立つことがわかる.

問題 2.2　（オイラー・ラグランジュ方程式の様々な拡張）

オイラー・ラグランジュ方程式に関する定理を次の場合に拡張する.

(1) $u : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ （$N > 1$）がベクトル値関数である.

(2) $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n > 1$) が多変数関数である. ($\Omega = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ としてもよい)

(3) $f = f(x, u, u', u'', \ldots, u^{(k)})$ ($k > 1$)

---

(1) $u : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ ($N > 1$) がベクトル値関数である.

オイラー・ラグランジュ方程式 3

$f(x, u, \xi) \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^{2N})$ に対して

$$\inf_{(u_1,\ldots,u_N)\in X} I(u_1, \ldots, u_N),$$
$$I(u_1, \ldots, u_N) = \int_a^b f\left(x, u_1(x), \ldots, u_N(x), u_1'(x), \ldots, u_N'(x)\right)\, dx,$$
$$X = \left\{(u_1, \ldots, u_N);\ u_i \in C^1([a, b]),\ u_i(a) = \alpha_i,\ u_i(b) = \beta_i,\ \ i = 1, \ldots, N\right\}$$

という変分問題を考える.

(1) 弱い極小値 $(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_N) \in X \cap (C^2([a, b]))^N$ が存在すれば，次の連立方程式を満たす：

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left[f_{\xi_i}\left(x, \overline{u}_1(x), \ldots, \overline{u}_N(x), \overline{u}_1'(x), \ldots, \overline{u}_N'(x)\right)\right] \\ &\quad = f_{u_i}\left(x, \overline{u}_1(x), \ldots, \overline{u}_N(x), \overline{u}_1'(x), \ldots, \overline{u}_N'(x)\right), \quad x \in (a, b),\ i = 1, \ldots, N.\end{aligned} \tag{2.28}$$

(2) 逆に，$(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_N)$ が (2.28) を満たし，$(u_1, \ldots, u_N, \xi_1, \ldots, \xi_N) \to f(x, u_1, \ldots, u_N, \xi_1, \ldots, \xi_N)$ がすべての $x \in [a, b]$ について凸関数ならば，$(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_N)$ は変分問題の最小値である.

(3) さらに，$(u_1, \ldots, u_N, \xi_1, \ldots, \xi_N) \to f(x, u_1, \ldots, u_N, \xi_1, \ldots, \xi_N)$ がすべての $x \in [a, b]$ について狭義凸で，変分問題の最小値が存在するならば，その最小値は一意である.

(2) $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n > 1$) が多変数関数である.

オイラー・ラグランジュ方程式 4

滑らかな開集合 Ω，$f(x,u,\xi) \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ に対して

$$\inf_{u \in X} I(u), \qquad I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u)\, dx,$$
$$X = \left\{ u \in C^1(\overline{\Omega}),\ u(x) = g(x)\ \forall x \in \partial\Omega \right\}$$

という変分問題を考える．

(1) 弱い極小値 $\overline{u} \in X \cap C^2(\overline{\Omega})$ が存在すれば，この $\overline{u}$ は次の偏微分方程式を満たす：

$$\mathrm{div}_x \left[\nabla_\xi f(x, \overline{u}(x), \nabla \overline{u}(x)) \right] = f_u(x, \overline{u}(x), \nabla \overline{u}(x)), \qquad x \in \Omega. \tag{2.29}$$

(2) 逆に，$\overline{u}$ が (2.29) を満たし，$(u,\xi) \to f(x,u,\xi)$ がすべての $x \in \Omega$ について凸関数ならば，$\overline{u}$ は変分問題の最小値である．

(3) さらに，$(u,\xi) \to f(x,u,\xi)$ がすべての $x \in \Omega$ について狭義凸で，変分問題の最小値が存在するならば，その最小値は一意である．

(3) $f = f(x, u, u', u'', \ldots, u^{(k)})$ $(k > 1)$

オイラー・ラグランジュ方程式 5

$f(x, u, \xi_1, \ldots, \xi_k) \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k)$ に対して

$$\inf_{u \in X} I(u), \qquad I(u) = \int_a^b f\left(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(k)}\right) dx,$$
$$X = \left\{ u \in C^k([a,b]),\ u(a) = \alpha_0, \ldots, u^{(k)}(a) = \alpha_k, u(b) = \beta_0, \ldots, u^{(k)}(b) = \beta_k \right\}$$

という変分問題を考える．

(1) 弱い極小値 $\overline{u} \in X \cap C^{k+2}([a,b])$ が存在すれば，この $\overline{u}$ は次の微分方程式を満たす：

$$\left[f_u - \frac{d}{dx} f_{\xi_1} + \frac{d^2}{dx^2} f_{\xi_2} + \cdots + (-1)^k \frac{d}{dx} f_{\xi_k} \right] \Big|_{(x, \overline{u}(x), \ldots, \overline{u}^{(k)}(x))} = 0, \quad x \in (a,b). \tag{2.30}$$

ただし，$f_\xi := \frac{\partial f}{\partial \xi}, f_u := \frac{\partial f}{\partial u}$ である．

(2) 逆に，$\overline{u}$ が (2.30) を満たし，$(u, \xi_1, \ldots, \xi_k) \to f(x, u, \xi_1, \ldots, \xi_k)$ がすべての $x \in [a,b]$ について凸関数ならば，$\overline{u}$ は変分問題の最小値である．

(3) さらに，$(u, \xi_1, \ldots, \xi_k) \to f(x, u, \xi_1, \ldots, \xi_k)$ がすべての $x \in [a,b]$ について狭義凸で，変分問題の最小値が存在するならば，その最小値は一意である．

それぞれの証明はもとの定理の証明と同様である．

2.7 いくつかの例題

この節では，nontrivial な変分問題の例を紹介する．

例 2.9 多変数のオイラー・ラグランジュ方程式の具体例として，よく使われるポアソン方程式を挙げる．十分なめらかな領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ に対して，$f \in C(\overline{\Omega})$ とする．

$$\mathcal{A} = \{w \in C^2(\overline{\Omega});\ \ w = 0 \text{ on } \partial\Omega\} \tag{2.31}$$

$$E(u) = \int_\Omega \left[\tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 - uf\right] dx \tag{2.32}$$

のとき，次の二つの主張が同値である：

$$\left(u \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ は } (*) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \text{の解である}\right) \Leftrightarrow \left(u \in \mathcal{A} \text{ は } E(u) = \min_{w\in\mathcal{A}} E(w) \text{ を満たす}\right)$$

ただし，$|\nabla u|$ は勾配ベクトル $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$ の大きさで，$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ は u のラプラシアンである．
ここで，$f(x, u, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) - uf(x)$ であるから，$(u, \boldsymbol{\xi}) \to f(x, u, \boldsymbol{\xi})$ はすべての $x \in \Omega$ について凸であるが，狭義凸ではない．しかし，上の最小化問題はポアソン方程式に対する境界値問題と同値であるから，最小値の存在と一意性が従う．

Proof.

- $\Rightarrow$ を示す．つまり，$w \in \mathcal{A}$ を任意に選んで，$E(u) \le E(w)$ を示す．

  $(*)$ より
  $$0 = \int_\Omega (-\Delta u - f)(u - w)\, dx$$
  部分積分の一般化であるグリーンの公式を用いると，
  $$0 = \int_\Omega \left[\nabla u \cdot \nabla(u - w) - f(u - w)\right] dx$$
  (Ω の境界では $u - w = 0$ なので，境界の積分は出てこない)．

  そこで，$|\nabla u \cdot \nabla w| \le |\nabla u|\,|\nabla w| \le \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla w|^2$ という不等式（前半はコーシー・シュワルツの不等式である）を用いて，
  $$\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - uf\right]\, dx = \int_\Omega \left[\nabla u \cdot \nabla w - wf\right]\, dx \le \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2\, dx + \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf\right]\, dx$$
  を得るが，これは $E(u) \le E(w)$ そのものである．

- $\Leftarrow$ を示す：

  $u \in \mathcal{A}$ が $E(u) = \min_{w\in\mathcal{A}} E(w)$ を満たすとする．$u \in \mathcal{A}$ だから，$(*)$ の境界条件は満たされ

ている．後は，$-\Delta u = f$ を示せばよい．任意の $v \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し，

$$e(\tau) = E(u+\tau v), \qquad \tau \in \mathbb{R}$$

とおく．全ての $\tau \in \mathbb{R}$ に対し，$u+\tau v$ が $\mathcal{A}$ に入るから，関数 $e(\tau)$ は $\tau = 0$ において最小値を持つ．よって，$e'(0) = 0$．e を書き下すと，次のようになる．

$$\begin{aligned} e(\tau) &= \int_\Omega \Big[\frac{1}{2}|\nabla u + \tau \nabla v|^2 - (u+\tau v) f\Big]\, dx \\ &= \int_\Omega \Big[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \tau \nabla u \cdot \nabla v + \frac{\tau^2}{2}|\nabla v|^2 - (u+\tau v) f\Big]\, dx. \end{aligned}$$

従って，
$$0 = e'(0) = \int_\Omega \big[\nabla u \cdot \nabla v - v f\big]\, dx = \int_\Omega (-\Delta u - f) v\, dx.$$

この等式は全ての $v \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して成り立つので，Ω において $-\Delta u = f$ を得る．

□

問題 2.3　（連続でない汎関数の最小化問題：自由境界問題）

$\gamma > 0$ を固定する．$0 < \alpha < \gamma$ を満たす $\alpha, \beta \geq 0$ をパラメータとした最小化問題

$$\min_{v \in K} J(v), \qquad \text{ただし，} \quad \begin{cases} J(v) := \int_0^1 \Big(\big(v'(x)\big)^2 + \gamma^2 \chi_{v>0}\Big)\, dx \\ X := \big\{v \in C_p^2([0,1]);\ v(0) = \alpha,\ v(1) = \beta\big\} \end{cases} \tag{2.33}$$

の極小値 $u \in K$ は存在すると仮定して，その性質を調べる．ただし，C_p^2 は区分的に C^2 級の連続な関数で，

$$\chi_{v>0}(x) = \begin{cases} 1, & v(x) > 0 \\ 0, & v(x) \leq 0. \end{cases} \tag{2.34}$$

は v の特性関数である．

物理現象として，石鹸膜などの界面がエネルギーの異なる二つの部分に分かれている状況をイメージできる．例えば，シャボン玉が水面や固体面にのっているとき，浮いている部分と下の表面にくっついている部分の表面張力が異なる．ここで，汎関数の第 1 項は浮いている部分の長さエネルギー（の近似 $\sqrt{1+(u')^2} \approx 1 + \frac{1}{2}(u')^2$）を表しており，第 2 項は水面と石鹸膜がくっついている部分の長さエネルギーと裸の水面のエネルギーを表現している．

まずは，$\beta = 0$ の場合を考える．

(1) 極小値が区分的に線形な関数であることを示す．$u \in K$ を極小値とする．$\{u < 0\}$（開集合）と u が C^2 級である区間との共通部分に台がコンパクトに含まれるように試験関数 φ をとると，汎関数の第 2 項が影響しないため，変分より $u'' \equiv 0$ を得る．$\{u > 0\}$（開集合）の場合も同様である．よって，u が区分的に C^2 関数であることを考慮すれば，区分的線形という

ことが従う．

(2) 極小値が非負関数であることを示す．$u(x) < 0$ となる $x \in (0,1)$ があれば，$\{u < 0\}$ の測度が正となり，$\{u < 0\} \cap \{|u'| > 0\}$ の測度も正となる（証明は背理法を用いる）．よって，$\tilde{u} = u\chi_{u>0}$ という関数に対して，$J(\tilde{u}) < J(u)$ が成り立ち，矛盾を得る．

(3) $x_0 \in (0,1)$ が存在し，極小値が $[0, x_0)$ の範囲で正で，$[x_0, 1]$ の範囲で恒等的にゼロであることを示す．$u(x) = 0$ となる最小の x を x_0 とする（$\beta = 0$ より $x_0 \le 1$）．もし $(x_0, 1)$ で u が正の値をとる点があれば，u を $[x_0, 1]$ で恒等的に 0 となる関数に置き換えると，J の値が減るので矛盾になる．よって，u が一度 0 になれば，その点より先はずっと 0 である．

あとは，$[0, x_0]$ において，極小値が線形関数である（点 $[0, \alpha]$ と点 $[x_0, 0]$ を結ぶ直線である）ことを示せばよい．u が区分的線形なので，傾斜が異なる隣同士の区間が二つあると仮定して，矛盾が得られる（傾斜が等しい）ことを示す．二つの区間を $(0, a)$ と (a, X) とする．正の領域では汎関数の値が上下の移動に依存しないことを考慮して，定数倍しても状況が変わらないことから，$u(0) = 1, u(a) = b, u(X) = 0$ としてもかまわない．このとき，

$$\int_0^X (u'(x))^2\,dx = \frac{(b-1)^2}{a} + \frac{b^2}{X-a}.$$

X, a が固定されているとして，この量を最小にする b を求める．微分が 0 となる b を計算すると，

$$b = 1 - \frac{a}{X}$$

を得るが，これは点 $[0,1]$ と点 $[X, 0]$ を結ぶ直線 $y = 1 - x/X$ の a での値であるので，二つの区間における傾斜が等しいことになる．

(4) 自由境界（つまり，u が恒等的にゼロである部分と正である部分の境目となる点 x_0）における極小値の正の領域からの微分を次の二通りの方法で求める：

- (1)-(3) の情報を用いて極小値の形を x_0 をパラメータとして定め，x_0 という 1 変数について J を最小化する．

  (1)-(3) の情報を用いると，minimizer が

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{a}{x_0}x + a, & x \in [0, x_0] \\ 0, & x \in [x_0, 0] \end{cases}$$

  という形であることがわかるので，あとは x_0 を求めればよい．

$$J(u) = \frac{a^2}{x_0} + \gamma^2 x_0$$

  より，x_0 についての最小値を計算すると，

$$x_0 = \frac{a}{\gamma},$$

  したがって $u'_-(x_0) = -\gamma$.

- オイラー・ラグランジュ方程式の別のバージョンを示すときの変分のとり方を用いて，x_0 で成り立つ条件を直接に求める．

任意の $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$ をとり，$\lambda = (2\max_{x\in[0,1]}|\varphi'(x)|)^{-1}$ に対して

$$\psi(x,\delta) = x + \delta\lambda\varphi(x) = y$$

とおく．すると，$|\delta| \le 1$ に対して $\psi(\cdot,\delta) : [0,1] \to [0,1]$ は滑らかな同型写像であり，$\psi(0,\delta) = 0, \psi(1,\delta) = 1, \psi_x(x,\delta) > 0$ を満たす．固定した $\delta \in [-1,1]$ に対して，上の同型写像の逆関数を $\eta(\cdot,\delta)$ とする，すなわち，

$$\psi(\eta(y,\delta),\delta) = y.$$

η の微分を定理の証明のように計算すると，

$$\begin{aligned}\eta_y(y,\delta) &= 1 - \delta\lambda\varphi'(y) + O(\delta^2)\\ \eta_\delta(y,\delta) &= -\lambda\varphi(y) + O(\delta)\end{aligned}$$

のような近似を得る．そこで，u の摂動を

$$u^\delta(x) := u(\psi(x,\delta)) \in K$$

とする．汎関数 I の u^δ における値は

$$\begin{aligned}I(u^\delta) &= \int_0^1 \left[\big(u'(\psi(x,\delta))\psi_x(x,\delta)\big)^2 + \gamma^2\chi_{u>0}(\psi(x,\delta))\right] dx\\ &= \int_0^1 \left[\left(u'(y)\frac{1}{\eta_y(y,\delta)}\right)^2 + \gamma^2\chi_{u>0}(y)\right]\eta_y(y,\delta)\,dy\end{aligned}$$

ここで，$y = \psi(x,\delta)$ という変数変換と $\psi_x(x,\delta) = 1/\eta_y(y,\delta)$ であるという事実を用いた．

すべての $\delta \in [-1,1]$ について $I(u^\delta) \ge I(u)$ であるから，$I(u^\delta)$ の δ による微分が $\delta = 0$ において消える．

$$\begin{aligned}\frac{J(u^\delta) - J(u)}{\delta} &= \frac{1}{\delta}\int_0^1 \left[\big(u'(y)\big)^2\frac{1-\eta_y(y,\delta)}{\eta_y(y,\delta)} + \gamma^2\chi_{u>0}(y)(\eta_y(y,\delta) - 1)\right] dy\\ &= \int_0^1 \left[\big(u'(y)\big)^2\frac{\lambda\varphi'(y) + O(\delta)}{1 + O(\delta)} + \gamma^2\chi_{u>0}(y)(-\lambda\varphi'(y) + O(\delta))\right] dy\end{aligned}$$

$\delta \to 0$ とすれば，

$$\lambda\int_0^1 \left[\big(u'(y)\big)^2 - \gamma^2\chi_{u>0}(y)\right]\varphi'(y)\,dy = 0.$$

今，$\varphi \in C_0^\infty(0,1)$ が任意なので，$[\cdot]$ の中身は定数関数でなければならない．自由境界をまたぐ区間を考えると，その右端では $u = u' = 0$ なので，その定数は 0 である．よっ

て，微分が存在するところでは

$$\begin{aligned} |u'(x)| &= \gamma \qquad \forall x \in [0,1] \text{ such that } u(x) > 0 \\ u'(x) &= 0 \qquad \forall x \in [0,1] \text{ such that } u(x) \le 0 \end{aligned}$$

これより，自由境界 x_0 での微分が $-\gamma$ であることが明らかである．

次に，$\beta \ge 0$ の一般の場合を考える．

(5) β が十分小さければ，J の極小値が 2 つ存在し，その片方のみ最小値であることを示す．

β が正のとき，極小値 u が一度，恒等的にゼロになってから傾斜 γ の線形関数で β の値に上がる形になる可能性がある．このとき，ゼロ区間の右端が $x_1 = 1-\beta/\gamma$ となるので，$x_0 \le x_1$ より

$$\alpha + \beta \le \gamma$$

という条件を得る．b がこれを満たせば，ゼロ区間をもつような関数 u_0 に対応する停留値が存在する．

一方で，$[0,\alpha]$ と $[1,\beta]$ の 2 点を結ぶ線形関数 u_1 もオイラー・ラグランジュ方程式の解である．このとき汎関数の第 2 項が影響せず，凸な関数となるので，極小値を与える．それぞれの値を比べると，

$$J(u_0) = 2\gamma(\alpha+\beta), \qquad J(u_1) = (\beta-\alpha)^2 + \gamma^2.$$

この大小関係によって，最小値が決まる．条件 $\alpha+\beta \le \gamma$ を満たすパラメータ α, β, γ のなかに，u_0 が最小値になるような組も，u_1 が最小値になるような組もある．

問題 2.4　（シャボン玉の形状を求める）

次の 2 次元のシャボン玉の簡単なモデルを考える：シャボン玉を作る石鹸膜が厚さゼロの界面で，そのエネルギーは

$$\text{長さエネルギー} = \text{表面張力（定数）} \times \text{界面の長さ}$$

のみである．界面は滑らかな閉曲線で，曲線が囲う面積（内側の空気の量）が定まっている．

(1) まず，1 個のシャボン玉の定常な形状を求める．この形状は長さエネルギーの最小値を与えるものである．ただし，面積が指定された値 A_0 であるという条件がある．

最小化問題（シャボン玉１個）

ジョルダン曲線 $\gamma : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$ で，面積条件

$$A(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^\ell (\gamma_1(s)\gamma_2'(s) - \gamma_2(s)\gamma_1'(s))\,ds = A_0$$

を満たす曲線のうち，長さ

$$L(\gamma) = \int_0^\ell |\gamma'(s)|\,ds$$

を最小にするものを見つける．

ラグランジュ未定乗数法を適用すると，実数 λ が存在して，求める曲線 γ が汎関数

$$F(\gamma) = \int_0^\ell |\gamma'(s)|\,ds - \frac{\lambda}{2}\int_0^\ell (\gamma_1(s)\gamma_2'(s) - \gamma_2(s)\gamma_1'(s))\,ds$$

に対するオイラー・ラグランジュ方程式を満たすことが言える．そこで，滑らかな試験関数 $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ をとり，摂動 $\gamma(s) + \varepsilon\psi(\gamma(s))$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して変分が消えるという条件

$$\frac{d}{d\varepsilon}F(\gamma(s) + \varepsilon\psi(\gamma(s)))\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

を調べればよい．以下の計算を見やすくするために，$\phi(s) = \psi(\gamma(s))$ とおいて，s の引数を省略する．

$$F(\gamma + \varepsilon\phi) = \int_0^\ell \left\{ |\gamma' + \varepsilon\phi'| - \frac{\lambda}{2}\Big((\gamma_1 + \varepsilon\phi_1)(\gamma_2' + \varepsilon\phi_2') - (\gamma_2 + \varepsilon\phi_2)(\gamma_1' + \varepsilon\phi_1')\Big) \right\} ds$$

だから，

$$\frac{d}{d\varepsilon}F(\gamma+\varepsilon\phi) = \int_0^\ell \left\{ \frac{\gamma' \cdot \phi' + \frac{\varepsilon}{2}|\phi'|^2}{|\gamma' + \varepsilon\phi'|} - \frac{\lambda}{2}\Big(\gamma_1\phi_2' + \gamma_2'\phi_1 + 2\varepsilon\phi_1\phi_2' - \gamma_2\phi_1' - \gamma_1'\phi_2 - 2\varepsilon\phi_1'\phi_2\Big) \right\} ds.$$

$\varepsilon = 0$ を代入すると，

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}F(\gamma + \varepsilon\phi)\Big|_{\varepsilon=0} &= \int_0^\ell \left\{ \frac{\gamma' \cdot \phi'}{|\gamma'|} - \frac{\lambda}{2}\Big(\gamma_1\phi_2' + \gamma_2'\phi_1 - \gamma_2\phi_1' - \gamma_1'\phi_2\Big) \right\} ds \\ &= -\int_0^\ell \left\{ \left(\frac{\gamma'}{|\gamma'|}\right)' \cdot \phi - \lambda(-\gamma_2', \gamma_1') \cdot (\phi_1, \phi_2) \right\} ds \end{aligned}$$

を得る．ただし，最後の等式で部分積分を施し，ϕ にかかっている微分をそれ以外の項に移した．この量がゼロであることと曲率 κ と法線ベクトル ν の定義を合わせて使うと，

$$\int_0^\ell (\kappa - \lambda)(\phi \cdot \nu)|\gamma'|\,ds = 0$$

となるが，$\phi(s) = \psi(\gamma(s))$ であり，$|\gamma'(s)|ds$ が曲線の微小長さであり，κ, λ, ν がパラメータの取り方に依らない幾何学的な量であるから，上式は $(\kappa - \lambda)(\psi \cdot \nu)$ を弧長パラメータで積

分すると，どんな ψ に対してもゼロとなるという式である．つまり，

$$\kappa = \lambda = \text{定数},$$

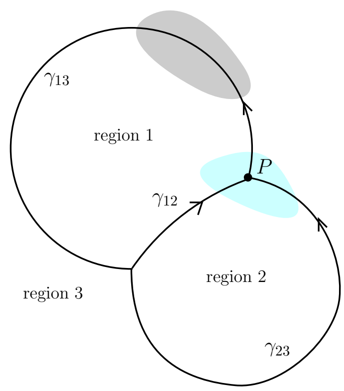
言い換えれば,「曲率がすべての点で同じ値になるような曲線」という結果になる.

この性質を満たすジョルダン曲線は半径 λ の円しかない．それを確認するためには，接触円の中心

$$c(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\nu(s)$$

を s について微分すればよい．また，半径 λ は今の時点で未知であるが，指定された面積 A_0 よりすぐに計算できる.

(2) 次に，図のようにくっついている 2 個のシャボン玉（それぞれの面積は A_1, A_2）の定常な形状と接合点における角度を求める.



図の記号の通り泡が区切る領域に 1，2，3 と番号をふると，それぞれの領域を隔てる「界面」なる曲線を隣り合う領域の番号で表す．そのとき，泡 1 は $\gamma_1 = \gamma_{13} \cup \gamma_{12}$，泡 2 は $\gamma_2 = \gamma_{23} \cup (-\gamma_{12})$ の曲線で表される.

ラグランジュ未定乗数法により，汎関数

$$F(\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}) = L(\gamma_{12}) + L(\gamma_{13}) + L(\gamma_{23}) + \lambda_1 A(\gamma_1) + \lambda_2 A(\gamma_2)$$

の停留値を求めればよい．前節と同じように変分を計算するが，今回は試験関数として 2 種類のものを考える．一つは台（関数がゼロでない領域の閉包）がすべてのジャンクション（接合点）から離れているような試験関数（図では灰色），もう一つは台がひとつだけの接合点にかかっているような試験関数（図では水色）である.

図の灰色の台を持つような試験関数をとると，汎関数において影響する項は

$$L(\gamma_{13}) + \lambda_1 A(\gamma_{13})$$

のみである（ここで，試験関数による摂動は γ_{12} を変えないので，面積項で γ_{13} からの貢献だけ考えればよいという意味で A の引数を γ_{13} とした）．しかし，これは前節と全く同じ状況になっており，接合点から離れたところの曲線はすべて円の一部であることがわかる.

よって，あとは接合点で成り立つ条件を求めればよい．図の水色の領域に台がある試験関数 $\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を考えて，三つの曲線を反時計回りにパラメータ表示する：$\gamma_{12}(s), s\in[0,\ell_{12}]$, $\gamma_{13}(s), s\in[0,\ell_{13}]$, $\gamma_{23}(s), s\in[0,\ell_{23}]$．ここで，$\gamma_{12}(\ell_{12})=\gamma_{13}(0)=\gamma_{23}(\ell_{23})=P$ が接合点となることに注意する．また，k_{12},k_{13},k_{23} の値を次が成り立つように決める：

$$\psi(\gamma_{12}(s))=0\ \forall s\in[0,k_{12}{+}\delta],\ \ \psi(\gamma_{13}(s))=0\ \forall s\in[k_{13}{-}\delta,\ell_{13}],\ \ \psi(\gamma_{23}(s))=0\ \forall s\in[0,k_{23}{+}\delta].$$

ψ の台の取り方より，このような k_{12},k_{13},k_{23} は存在する．ただし，δ は十分小さい正数である．$\phi_{12}(s)=\psi(\gamma_{12}(s)),\phi_{13}(s)=\psi(\gamma_{13}(s)),\phi_{23}(s)=\psi(\gamma_{23}(s))$ とおいて，前節と同様の計算をすると，次の式を得る：

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}F(\gamma+\varepsilon\phi)\Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{k_{12}}^{\ell_{12}}\frac{\gamma_{12}'\cdot\phi_{12}'}{|\gamma_{12}'|}\,ds+\int_0^{k_{13}}\frac{\gamma_{13}'\cdot\phi_{13}'}{|\gamma_{13}'|}\,ds+\int_{k_{23}}^{\ell_{23}}\frac{\gamma_{23}'\cdot\phi_{23}'}{|\gamma_{23}'|}\,ds\\ &\quad+\frac{\lambda_1}{2}\int_0^{k_{13}}\big((\gamma_{13})_1(\phi_{13})_2'+(\gamma_{13})_2'(\phi_{13})_1-(\gamma_{13})_2(\phi_{13})_1'-(\gamma_{13})_1'(\phi_{13})_2\big)\,ds\\ &\quad+\dots\end{aligned}$$

面積項の変分が長いため，代表として γ_1 が囲う面積への γ_{13} による貢献のみ記した．部分積分を行う前の式を書いたのは，前節の計算と違って，部分積分において境界項が現れるからである．実際，

$$\begin{aligned}\int_0^{k_{13}}\frac{\gamma_{13}'\cdot\phi_{13}'}{|\gamma_{13}'|}\,ds &= -\int_0^{k_{13}}\left(\frac{\gamma_{13}'}{|\gamma_{13}'|}\right)'\cdot\phi_{13}\,ds-\frac{\gamma_{13}'}{|\gamma_{13}'|}(0)\cdot\phi_{13}(0)\\ \int_0^{k_{13}}\big((\gamma_{13})_1(\phi_{13})_2'-(\gamma_{13})_2(\phi_{13})_1'\big)\,ds &= \int_0^{k_{13}}\big(-(\gamma_{13})_1'(\phi_{13})_2+(\gamma_{13})_2'(\phi_{13})_1\big)\,ds\\ &\quad-(\gamma_{13})_1(0)(\phi_{13})_2(0)+(\gamma_{13})_2(0)(\phi_{13})_1(0)\end{aligned}$$

$s=k_{13}$ での値が現れないのは，$\phi_{13}(k_{13})=0$ だからである．

変分がゼロという条件は次のように書ける：

$$\begin{aligned}&-\int_{k_{12}}^{\ell_{12}}\left(\frac{\gamma_{12}'}{|\gamma_{12}'|}\right)'\cdot\phi_{12}\,ds-\int_0^{k_{13}}\left(\frac{\gamma_{13}'}{|\gamma_{13}'|}\right)'\cdot\phi_{13}\,ds-\int_{k_{23}}^{\ell_{23}}\left(\frac{\gamma_{23}'}{|\gamma_{23}'|}\right)'\cdot\phi_{23}\,ds\\ &-\lambda_1\int_{k_{12}}^{\ell_{12}}\nu_{12}\cdot\phi_{12}|\gamma_{12}'|\,ds-\lambda_1\int_0^{k_{13}}\nu_{13}\cdot\phi_{13}|\gamma_{13}'|\,ds\\ &-\lambda_2\int_{k_{23}}^{\ell_{23}}\nu_{23}\cdot\phi_{23}|\gamma_{23}'|\,ds+\lambda_2\int_{k_{12}}^{\ell_{12}}\nu_{12}\cdot\phi_{12}|\gamma_{12}'|\,ds\\ =\ &-\tau_{12}(\ell_{12})\cdot\phi_{12}(\ell_{12})+\tau_{12}(0)\cdot\phi_{13}(0)-\tau_{23}(\ell_{23})\cdot\phi_{23}(\ell_{23})\\ &+\frac{\lambda_1}{2}\gamma_{12}^\perp(\ell_{12})\cdot\phi_{12}(\ell_{12})-\frac{\lambda_1}{2}\gamma_{13}^\perp(0)\cdot\phi_{13}(0)-\frac{\lambda_2}{2}\gamma_{12}^\perp(\ell_{12})\cdot\phi_{12}(\ell_{12})+\frac{\lambda_2}{2}\gamma_{23}^\perp(\ell_{23})\cdot\phi_{23}(\ell_{23})\end{aligned}$$

ただし，ν_{ij} は領域 i に向く界面 γ_{ij} への単位法線ベクトル，τ_{ij} は γ_{ij} への単位接戦ベクトル，$\gamma_{ij}^\perp=(-(\gamma_{ij})_2,(\gamma_{ij})_1)$ である．

$\phi_{12}(\ell_{12})=\phi_{13}(0)=\phi_{23}(\ell_{23})=\psi(P)$，そして，$\gamma_{12}(\ell_{12})=\gamma_{13}(0)=\gamma_{23}(\ell_{23})=P$ という事

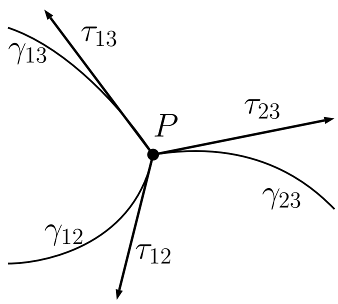
実に気づくと，上式の最後の行が消えることがわかる．それ以外の項を整理すれば，

$$
\begin{aligned}
&-\int_{k_{12}}^{\ell_{12}} (\kappa_{12} - \lambda_1 + \lambda_2)(\phi_{12} \cdot \nu_{12})|\gamma_{12}'|\, ds - \int_0^{k_{13}} (\kappa_{13} - \lambda_1)(\phi_{13} \cdot \nu_{13})|\gamma_{13}'|\, ds \\
&+ \int_{k_{23}}^{\ell_{23}} (\kappa_{23} - \lambda_2)(\phi_{23} \cdot \nu_{23})|\gamma_{23}'|\, ds = \Big(- \tau_{12}(\ell_{12}) + \tau_{13}(0) - \tau_{23}(\ell_{23}) \Big) \cdot \psi(P)
\end{aligned}
$$

を得る．試験関数 ψ の任意性より，以下の 4 つの条件式が成立しなければならない：

$$
\kappa_{12} = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \kappa_{13} = \lambda_1, \quad \kappa_{23} = \lambda_2, \quad (\tau_{12} - \tau_{13} + \tau_{23})(P) = 0.
$$

最初の 3 式はそれぞれの曲線が円の一部であるという既にわかっていることを言っているが，それぞれの円の半径の関係も見えてきている．例えば，二つの泡の面積が等しいとき，$\kappa_{12} = \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ となるので，泡の間の界面は直線になる．また，符号の関係で，γ_{12} の曲線は大きい方の泡に食い込む形になることもわかる．



接合点における接線ベクトルの再定義

一方で，最後の式は接合点の角度に対する条件である．パラメータの取り方によって接線ベクトル τ の符号が変わるためわかりにくいが，$\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ を上図のように定義しなおせば，4 つ目の式は

$$
\tau_{12} + \tau_{13} + \tau_{23} = 0 \qquad \text{at } P
$$

となる．τ_{ij} はすべて単位ベクトルだから，これは接合点の角度が $120° - 120° - 120°$ であることを意味する．(これを Herring の条件と言う.)

以上でわかったことを整理する．シャボン玉が複数個くっついているときは，それぞれの石鹸膜は円の一部の形をしている．それぞれの円の半径は指定された面積で決まる．また，3 本の界面が接合点で交わるとき，必ず対称な $120° - 120° - 120°$ の接合点となる．この結果はシャボン玉や接合点の数に依らず成り立つ．

(3) それぞれの界面の表面張力が異なるという一般化を考える．すなわち，与えられた面積のもとで長さ汎関数

$$
aL(\gamma_{12}) + bL(\gamma_{13}) + cL(\gamma_{23})
$$

を最小化する．ここで，$L(\gamma)$ は曲線 γ の長さである．
$a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，接合点が安定する角度を求める．

変分の計算は同様で，それぞれの界面が円の一部であることがわかる．また，接合点における条件は

$$a\tau_{12} + b\tau_{13} + c\tau_{23} = 0 \qquad \text{at } P$$

となり，問題の a, b, c に対する角度は $150°, 90°, 120°$ である．

3　1 変数の存在理論：絶対連続関数

次の章で考えるソボレフ空間の設定における最小化理論を動機づけるために，そして歴史的にどのように理論が展開していったかを見るために，1 変数関数に対する変分問題がどのように数学的に議論されたかを簡単に紹介する．

3.1　Lipschitz 連続な関数の変分法

「角」をもつ極小値も考慮する目的で，許容関数空間は滑らかな関数から区分的に滑らかな関数へ拡張した．そしてそのような極値のための必要条件と十分条件を導いた．実は，この理論をより広いリプシッツ関数の空間に拡張できる．

$$\inf_{u\in X} J[u], \qquad J[u]=\int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx, \qquad X=\{u\in \mathrm{Lip}([a,b]);\ u(a)=\alpha, u(b)=\beta\} \tag{3.1}$$

ここで，f, f_u, f_ξ が $[a,b]$ で連続だと仮定すれば，$J[u]$ が $u\in X$ に対して意味をもつ．

$C^2([a,b])$ における極小値が存在すれば，$\mathrm{Lip}([a,b])$ における極小値でもあることが示せるので，古典理論のリプシッツ関数への拡張は自然なものである．

今，$\overline{u}$ が極小値ならば，$f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))$ が一般には微分できないため，古典理論で導いたオイラー・ラグランジュ方程式が成り立つことが期待できないが，つぎの結果がある．

du Bois-Raymond (1879)

定理 3.1 $\overline{u}\in X$ が問題 *(3.1)* の極小値ならば，$c\in\mathbb{R}$ が存在し，つぎの積分オイラー・ラグランジュ方程式を満たす：

$$f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)) = c+\int_a^x f_u(y,\overline{u}(y),\overline{u}'(y))\,dy, \qquad a.e.\ x\in[a,b]. \tag{3.2}$$

Proof. $\varphi\in \mathrm{Lip}_0([a,b])$（0 は $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ という意味である）に対して j を $j(\varepsilon)=J[\overline{u}+\varepsilon\varphi]$ で定義する

$$j'(0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b \frac{1}{\varepsilon}\Big(f(x,\overline{u}+\varepsilon\varphi,\overline{u}'+\varepsilon\varphi')-f(x,\overline{u},\overline{u}')\Big)\,dx$$

が存在する．実際，仮定より f は有界集合において u,ξ についてリプシッツ連続で，引数として現れる関数がすべて有界であるから，被積分関数は $C(|\varphi(x)|+|\varphi'(x)|)$ で抑えられ，ルベーグの優収束定理より

$$0=j'(0)=\int_a^b \Big(f_u(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))\varphi(x)+f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))\varphi'(x)\Big)\,dx.$$

ここで，第 1 項で部分積分を行うと，

$$\int_a^b \left(f_\xi(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)) - \int_a^x f_u(y, \overline{u}(y), \overline{u}'(y))\, dy \right) \varphi'(x)\, dx = 0$$

を得るので，レポート問題 1.2 より主張が示された． □

$\overline{u} \in C^2([a,b])$ ならば，積分型オイラー・ラグランジュ方程式を x について微分すれば，古典的なオイラー・ラグランジュ方程式が得られる．

リプシッツ関数のなかでの解について正則性の結果がある．例えば，

- $\overline{u} \in X$ が積分型オイラー・ラグランジュ方程式 (3.2) の解で，$\xi \mapsto f(x, \overline{u}(x), \xi)$ という写像がほとんどすべての $x \in [a,b]$ について狭義凸ならば，$\overline{u} \in C^1([a,b])$ である．
- （Hilbert-Weierstrass, 1875）$\overline{u} \in X$ が積分型オイラー・ラグランジュ方程式 (3.2) の解で，$f \in C^m$ $(m \geq 2)$ がすべての $x \in [a,b]$ と $\xi \in \mathbb{R}$ について $f_{\xi\xi}(x, \overline{u}(x), \xi) > 0$ を満たすならば，$\overline{u} \in C^m([a,b])$ である．

また，「f が u, ξ について凸ならば極小値が最小値である」ということ，「強い極小値は Weierstrass の必要条件を満たす」など，以前に示した主張がこの設定でも証明できる．

3.2　絶対連続な関数の変分法

リプシッツ関数の設定では存在定理が得られないため，許容関数空間を絶対連続な関数 AC($[a,b]$) に広げることを考える．実際，絶対連続な関数では（汎関数がある条件を満たせば）最小値の存在が証明できるようになる．古典理論では，ヤコビの定理などの十分条件もあるが，最小値ではなく，極小値の存在しか保証されない．

よって，以下では，つぎの変分問題を考える：

$$\inf_{u \in X} J[u], \qquad J[u] = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx, \qquad X = \{u \in \mathrm{AC}([a,b]);\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta\} \tag{3.3}$$

ここで，$u \in X$ の微分が有界とは限らないので，$J[u]$ が定義されるよう f に対して適切な条件を課す必要がある．例えば，以下の Tonelli の定理では，f を下から有界な連続関数としている．このとき，$x \mapsto f(x, u(x), u'(x))$ という写像が下から有界な可測関数だから，$J[u]$ の積分はルベーグ積分の意味で意味をもつ（当然，$+\infty$ になる可能性がある）．

AC における理論が成功した背景にルベーグ積分の理論があったことがあることに注意しよう．実際，絶対連続な関数 u の定義はつぎの二つの定義と同値であることが重要となる：

(D1) u の微分 u' がほとんどいたるところで存在し，可積であり，

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(y)\,dy \qquad \forall x \in [a,b]$$

(D2) 区間 $[a,b]$ で可積な関数 w が存在し，

$$u(x) = u(a) + \int_a^x w(y)\,dy \qquad \forall x \in [a,b]$$

また，

$$\mathrm{Lip}([a,b]) \quad \subset \quad \mathrm{AC}([a,b]) \quad \subset \quad \mathrm{BV}([a,b]) \quad \subset \quad \text{a.e. 微分可能な関数}$$

という関係が成り立つことを思い出そう．ここで，BV は有界変動という意味である．

以下の Tonelli による定理は変分問題の存在理論で画期的な結果である．

Tonelli, 1915

定理 3.2 f が連続で，ξ について凸な関数で，

$$\exists r > 1, C_1 > 0, C_2 \in \mathbb{R} \quad \textit{such that} \quad f(x,u,\xi) \geq C_1|\xi|^r + C_2 \quad \forall (x,u,\xi) \in [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

という強圧性条件を満たすならば，変分問題 *(3.3)* の最小値が存在する．

Proof. 汎関数の値 $J[u]$ が有界であるような $u \in X$ が存在する（例えば，境界条件を満たす線形関数）ので，最小化列 $\{u_n\} \subset$ がとれる：

$$\lim_{n\to\infty} J[u_n] = \inf_{u\in X} J[u].$$

十分大きな n に対して，

$$\int_a^b \left(C_1|u_n'|^r + C_2\right)\,dx \leq J[u_n] \leq \inf_{u\in X} J[u] + 1$$

が成り立つから，列 $\{u_n'\}$ は $L^r(a,b)$ で有界である．L^r が回帰的空間だから，有界集合が weakly compact のため，ある $w \in L^r(a,b)$ に弱収束する部分列（$\{u_n\}$ と記す）がとれる．AC$([a,b])$ の元 $\overline{u}$ を

$$\overline{u}(x) = \alpha + \int_a^x w(y)\,dy, \qquad x \in [a,b]$$

で定義する．弱収束より任意の $x \in [a,b]$ について

$$\int_a^x u_n'(y)\,dy = \int_a^b u_n'(y)\chi_{(a,x)}(y)\,dy \to \int_a^b w(y)\chi_{(a,x)}(y)\,dy = \int_a^x w(y)\,dy.$$

ただし，$\chi_{(a,x)}$ は区間 (a,x) の特性関数である．したがって，u_n は $\overline{u}$ に各点収束する（一様収束

であることも示せる）．また，$\overline{u}(b)=\beta$ もわかる．

f の連続性と ξ についての凸性を利用すると，

$$J[\overline{u}] \le \lim_{n\to\infty} J[u_n] = \inf_{u\in X} J[u]$$

が証明できる（詳細を割愛する）．よって，$\overline{u}$ は最小値を与える． □

この定理が切り開いたいわゆる直接法は次の構成要素を含む：

- 最小化列の存在とその部分列の適切な収束（通常は u_n' は弱収束，u_n は各点または一様収束）
- 汎関数の下半連続性（$J[\overline{u}] \le \liminf J[u_n]$）
- 境界条件など制約条件が極限で維持される性質（一様収束で保存される条件，微分の弱収束で保存される条件：弱収束の場合は凸性が必要となる場合が多い）

許容関数を絶対連続な関数に広げたことで，必要条件であるオイラー・ラグランジュ方程式が満たされるということが証明できなくなる．実際，リプシッツ関数における証明では，優収束定理を用いて $j'(0)$ の存在を示したが，AC では微分が発散する可能性があるため，この議論が適用できない．しかも，技術的な問題ではなく，Tonelli の定理の仮定を満たす滑らかな汎関数でもオイラー・ラグランジュ方程式が成り立たない反例が作れる．

また，Tonelli の定理の仮定を満たす滑らかな汎関数でも，AC における inf が Lip における inf より真に小さいという Lavrentiev phenomenon が起こり得る．これは数値計算の観点から絶望的である．しかし，ある仮定をおけば，Lavrentiev phenomenon を排除し，存在と必要条件と両方が成立する状況を再現できる．以下では，その仮定の例を二つ挙げる：

- (Tonelli-Morrey) f, f_u, f_ξ が x, u, ξ について連続で，任意の有界集合 $S\subset\mathbb{R}$ に対して定数 C と可積関数 $d(x)$ が存在し，

  $$|f_u(x,u,\xi)| + |f_\xi(x,u,\xi)| \le C\left(|\xi| + |f(x,u,\xi)|\right) + d(x) \qquad \forall (x,u,\xi)\in[a,b]\times S\times\mathbb{R}$$

  が成り立てば，任意の弱い極小値 $\overline{u}$ は積分型のオイラー・ラグランジュ方程式を満たす．この仮定に加えて，f が ξ について凸で，$\overline{u}$ に沿って Nagumo growth があれば，つまり，$\lim_{x\to\infty}\theta(x)/x = +\infty$ を満たす関数 $\theta:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ が存在し，

  $$f(x,\overline{u}(x),\xi) \ge \theta(|\xi|) \qquad \forall x\in[a,b],\ \xi\in\mathbb{R}$$

  が成り立てば，$\overline{u}$ がリプシッツ連続であることが示せる．Lavrentiev phenomenon が起こらず，オイラー・ラグランジュ方程式が成り立つことが言えるから好都合である．

- (Clarke-Vinter) $\overline{u}\in \mathrm{AC}([a,b])$ が強い極小値で，f が x に陽に依存しない連続関数で，ξ について凸，$\overline{u}$ に沿って Nagumo growth をもつならば，$\overline{u}$ はリプシッツ連続である．

4　ソボレフ空間における理論：直接法

この章では，多変数関数についての変分問題を扱う．1 変数の場合と同じように，古典的な C^2-級における理論がある．Dirichlet の原理（例2.9）はその一例である．

また，1 変数と同様にリプシッツ関数における議論がある．Rademacher の定理によりリプシッツ関数はほとんどいたるところで微分があり，通常の意味での微分として扱うことができる．境界条件も各点の意味で定義される．例えば，Dirichlet 原理は Lip の設定でも成り立つ．

しかし，リプシッツ関数においては一般の存在の結果が得られないので，1 変数と同様に許容関数空間を広げる必要がある．1 変数の絶対連続関数に多変数で対応しているのはソボレフ空間である．これは次の補題より裏付けられる．

Lemma

つぎの主張は同値である：

(1) $u \in W^{1,1}(a,b)$

(2) 関数 $f \in \mathrm{AC}([a,b])$ が存在し，$u(x) = f(x)$ a.e. $x \in (a,b)$（このとき $u' = f'$）

許容関数をソボレフ空間に広げると,（ある条件が満たされれば）最小値の存在が比較的に容易に示せる．しかし，その分，最小値に関する情報の量が微分可能な設定より減ってしまう．つまり，最小値がソボレフ空間に属するということしかわからず，その微分可能性などの正則性を示そうと思えば，追加で仕事をしないといけない．ソボレフ空間の関数は連続だとは限らないなどのこともあり，解析が難しくなる．

4.1　基本の具体例

最初に，以下の具体的な最小化問題を扱う．その後，一般的な汎関数について述べる．

Dirichlet 積分の最小化問題

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ をリプシッツ境界をもつ有界領域として，$u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ とする．

$$\inf_{u\in X} I[u], \qquad I[u] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx, \qquad X = \{u \in W^{1,2}(\Omega);\ u = u_0 \text{ on } \partial\Omega\} \tag{4.1}$$

ここで，$|\nabla u|$ は u の勾配のユークリッド・ノルムで，$W^{1,2}(\Omega)$ はソボレフ空間

$$W^{1,2}(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\ \forall i = 1,\dots,n\right\}$$

を意味している．ただし，$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$ は u の x_i についての弱微分である．u の x_i についての弱微

分は次の条件を満たす関数 $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ である：

$$\int_\Omega v(x)\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,dx \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

また，$W^{1,2}(\Omega)$ のノルムを次で定義する：

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} = \left(\int_\Omega \left\{(u(x))^2 + \sum_{i=1}^n (u_{x_i}(x))^2\right\} dx\right)^{1/2}.$$

ソボレフ空間に属する関数は一般には測度ゼロの集合を除いてしか定義されないため，上記の境界条件 $u = u_0$ on Ω をトレースの意味で読む必要がある．

Dirichlet 積分の最小値の存在

定理 4.1 最小化問題 *(5.5)* はただ一つの最小値 $\overline{u} \in X$ が存在する．この最小値は弱い *Laplace* 方程式

$$\int_\Omega \nabla\overline{u}(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{4.2}$$

を満たす．

逆に，*(4.2)* を満たす関数 $\overline{u} \in X$ は *(5.5)* の最小値である．

ただし，$W_0^{1,2}(\Omega)$ は，$\partial\Omega$ 上のトレースがゼロである $W^{1,2}(\Omega)$-関数の空間を意味する．

Proof.

存在 は次の三つのステップで示す．

(a) （コンパクト性）$\{u_k\}$ を (5.5) の最小化列とする．すなわち，

$$I[u_k] \searrow \inf_{u\in X} I[u] =: m \geq 0 \qquad \text{as } k \to \infty.$$

次のポアンカレ不等式

$$\exists C_P(\Omega,p) \text{ such that } \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_P\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ p\in[1,\infty]$$

より

$$\begin{aligned}
\|u_k\|_{W^{1,2}} &\leq \|u_k\|_{L^2} + \|\nabla u_k\|_{L^2} \\
&\leq \|u_k - u_0\|_{L^2} + \|\nabla u_k\|_{L^2} \\
&\leq C_P\|\nabla u_k - \nabla u_0\|_{L^2} + \|\nabla u_k\|_{L^2} \\
&\leq (C_P+1)\|\nabla u_k\|_{L^2} + C_P\|u_0\|_{W^{1,2}} \\
&\leq (C_P+1)\sqrt{2I[u_0]} + C_P\|u_0\|_{W^{1,2}}.
\end{aligned}$$

最後の不等式は汎関数 I の形および $\{u_k\}$ が最小化列であることより従う．これは，関数列 $\{u_k\}$ が $W^{1,2}(\Omega)$ において有界であることなので，$L^p(\Omega), p \in (1,\infty)$ の弱コンパクト性より，$\overline{u} \in X$ と部分列 $\{u_{k_i}\}$ があって，

$$u_{k_i} \rightharpoonup \overline{u} \qquad \text{weakly in } W^{1,2}(\Omega) \quad \text{as } i \to \infty$$

が言える（トレースも保存されることに注意）．

(b) （下半連続性）汎関数 I が弱下半連続であること，すなわち

$$u_k \rightharpoonup \overline{u} \ \text{ weakly in } W^{1,2} \quad \Rightarrow \quad \liminf_{k\to\infty} I[u_k] \geq I[\overline{u}]$$

を満たすことを示す（ここで $\{u_k\}$ が一般の列で，最小化列でなくてもよい）．

$$\begin{aligned} 2I[u_k] = \int_\Omega |\nabla u_k|^2\,dx &= \int_\Omega \left\{ |\nabla \overline{u}|^2 + 2\nabla\overline{u}\cdot\nabla(u_k-\overline{u}) + |\nabla u_k - \nabla\overline{u}|^2 \right\}\,dx \\ &\geq \int_\Omega \left\{ |\nabla \overline{u}|^2 + 2\nabla\overline{u}\cdot\nabla(u_k-\overline{u}) \right\}\,dx \end{aligned}$$

に注意すると，

$$I[u_k] \geq I[\overline{u}] + \int_\Omega \nabla\overline{u}\cdot\nabla(u_k-\overline{u})\,dx$$

が従い，弱収束より右辺の最後の積分が $k\to\infty$ の極限で消える．

(c) （結論）(a) と (b) を合わせると，最小化列 $\{u_k\}$ の部分列に対して，

$$\inf_{u\in X} I[u] = \liminf_{i\to\infty} I[u_{k_i}] \geq I[\overline{u}]$$

が得られたので，$\overline{u}$ は最小値である．

一意性 は汎関数の凸性を用いる．

$$I[u] = I[v] = m$$

を満たす $u, v \in X$ が存在するとして，$u = v$ でなければならないことを示す．関数 $\xi \mapsto |\xi|^2$ が凸だから，$w := \frac{1}{2}(u+v)$ とすると，

$$m \leq I[w] \leq \frac{1}{2}I[u] + \frac{1}{2}I[v] = m$$

より w も minimizer である．つまり，

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v|^2 - \left|\frac{\nabla u + \nabla v}{2}\right|^2 \right]\,dx = 0.$$

$\xi \mapsto |\xi|^2$ が凸より，被積分関数はほとんど至るところでゼロでなければならない．さらに，$\xi \mapsto |\xi|^2$ の狭義凸性より $\nabla u = \nabla v$ a.e. in Ω を得る．u と v の $\partial\Omega$ 上のトレースが一致するので，ポアンカレ不等式より $u = v$ a.e. in Ω.

オイラー・ラグランジュ方程式 は $I[\overline{u}]$ と $I[\overline{u}+\varepsilon\varphi]$, $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ との比較より得られる（$\overline{u}+\varepsilon\varphi \in X$ であることに注意）．実際,

$$0 \leq I[\overline{u}+\varepsilon\varphi] - I[\overline{u}] = \varepsilon \int_\Omega \nabla\overline{u}\cdot\nabla\varphi\,dx + \varepsilon^2 I[\varphi]$$

が $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}$ について成り立つことからすぐに (4.2) が従う．
逆に，(4.2) が成り立つとして，$u \in X$ の任意の元に対して $\varphi = u - \overline{u}$ をとると，

$$I[u] = I[\overline{u}+\varphi] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\overline{u}+\nabla\varphi|^2\,dx = I[\overline{u}] + \int_\Omega \nabla\overline{u}\cdot\nabla\varphi\,dx + I[\varphi] \geq I[\overline{u}]$$

より $\overline{u}$ は最小値である． □

4.2　一般の存在定理

直接法の真髄を見るために，一般的な最小化問題

$$\inf_{x\in X} F(x), \qquad X \subset Y \ \ldots \text{ Banach 空間} \tag{4.3}$$

を考える．

一般の存在定理

次の仮定

(1) X は回帰的な Banach 空間 Y の凸な閉集合である

(2) $F : Y \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ は凸で下半連続である，また $\mathrm{dom}(F)\cap X \neq \emptyset$ を満たす

(3) すべての $M \in \mathbb{R}$ について $\{x \in X;\ F(x) \leq M\}$ は有界である

が満たされれば，問題 (4.3) は最小値が存在する．

定理に出てくる下半連続性（lower semicontinuity）は次の性質である：

$$x_n \to x \ \text{ in } X \qquad \Rightarrow \qquad F(x) \leq \liminf_{n\to\infty} F(x_n).$$

上の式で x_n の強い収束を弱収束で置き換えれば，弱下半連続性（weak lower semicontinuity）の定義になる（詳しくは [3]）．また，$\mathrm{dom}(F)$ とは $F(x) < \infty$ を満たす x の集合である．

Proof.

- $X \cap \mathrm{dom}(F) \neq \emptyset$ より，$F(x_0) < \infty$ を満たす $x_0 \in X$ が存在する．よって，$\inf_{x\in X} F$ は有限または $-\infty$ である．
- 最小化列 $\{x_n\}$ が存在する．すなわち，$f(x_n) \to \inf_X F$ が成り立つ．

- $F(x_n) \le F(x_0)+1\ \forall n \ge n_0$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在するから，仮定 (3) より $\{x_n\}$ は有界集合である．
- Y が回帰的空間だから，弱コンパクト性より部分列 $\{x_{n_i}\}$ があって，$x_{n_i} \rightharpoonup \overline{x} \in Y$ という弱収束が言える．
- 集合 X が閉で凸だから，弱い位相でも閉じている．したがって，$\overline{x} \in X$ がわかる．
  ここでは Mazur の定理（$S \subset Y$ が凸ならば，S が弱い位相で閉であることと強い位相で閉であることが同値である）を用いた．また，エピグラフを考えることでこの定理の系として，次が言える：$F : Y \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が凸関数ならば，F が下半連続であることと弱半連続であることが同値である．
- 上の項目で紹介した系と F の凸性を合わせると，F が弱下半連続であることが従う：

$$F(\overline{x}) \le \liminf_{i\to\infty} F(x_{n_i}) = \inf_{x\in X} F(x).$$

  よって，$\overline{x}$ は最小値を与える．

□

注 Growth condition (3) は以下のいずれの場合に満たされる：

- X 自体が有界である
- F は強圧（coercive）である，すなわち，$\lim_{\|x\|\to\infty} F(x) = \infty$

我々が考えているソボレフ空間における変分問題

$$\inf_{u\in X} I[u], \quad I[u] = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\,dx, \quad X = \{u \in W^{1,p}(\Omega);\ u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)\}$$

の場合，問題のデータがどのような条件を満たせば，この一般的な定理に持ち込むことができるだろうか．例えば，次の定理がある．

Sobolev 空間における存在定理

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ がリプシッツ連続な境界を持つ有界領域だとする．

(1) $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は Carathéodory 関数である，つまり，

- $x \mapsto f(x,u,\xi)$ はすべての (u,ξ) に対して可測である
- $(u,\xi) \mapsto f(x,u,\xi)$ はほとんどすべての $x \in \Omega$ に対して連続である

(2) $\xi \mapsto f(x,u,\xi)$ はすべての $(x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ について凸である

(3) $p > q \geq 1$ を満たす p, q，そして $C_1 > 0$ を満たす $C_1 \in \mathbb{R}$ と $C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ が存在し，次が成り立つ：

$$f(x,u,\xi) \geq C_1|\xi|^p + C_2|u|^q + C_3 \qquad \forall (x,u,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

という条件が満たされれば，最小値 $\overline{u} \in X$ が存在する．
さらに，$(u,\xi) \mapsto f(x,u,\xi)$ がすべての $x \in \overline{\Omega}$ について狭義凸ならば，最小値は一意である．

注

- 仮定 (1) では $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ としてもよいが，そうすると，右辺が L^2-関数であるポアソン方程式 $-\Delta u = h, h \in L^2(\Omega)$ のような基本的な問題が扱えない（この場合，$f(x,u,\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 - h(x)u$）．

- 関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ がベクトル値関数の場合も同様の定理が成り立つが，仮定 (2) を緩めることができる．つまり，f が $f(x,u,\xi) = F(x,u,\xi,\det\xi)$ と表され，$(\xi,\delta) \mapsto F(x,u,\xi,\delta)$ が全ての (x,u) に対して凸であれば十分である．例えば，$f(x,u,\xi) = |\xi|^4 + 16(\det\xi)^2$ は ξ について凸ではないが，$F(\xi,\delta) = |\xi|^4 + 16\delta^2$ は (ξ,δ) について凸である．

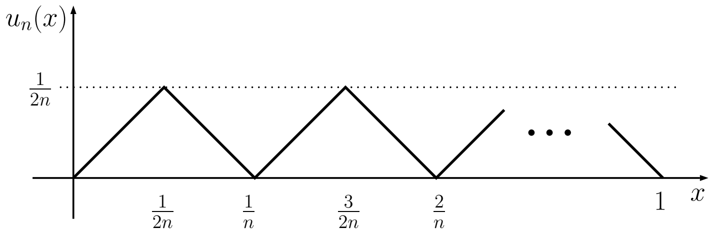
- 仮定 (3) においては，$p > 1$ が必要である．その反例は極小曲面の問題であるが，$n = 1$ のときの $f(x,u,\xi) = \sqrt{u^2+\xi^2}$ に対する $X = \{u \in W^{1,1}(0,1);\, u(0) = 0, u(1) = 1\}$ における最小化問題も解を持たないというより簡単な反例となる．このとき定理の全ての仮定が満たされるが，(3) の仮定は $p = 1$ でしか満たされない．

  $I[u] \geq \int_0^1 u'(x)\,dx = 1$ より，汎関数の下限は 1 以上であるが，$u_n = 0$ in $[0, 1-\frac{1}{n}]$，$u_n(x) = nx-(n-1)$ in $[1-\frac{1}{n}, 1]$ とすると，$I[u_n] = \frac{1}{n}\sqrt{1+n^2} \to 1$ $(n \to \infty)$ より $\inf_X I = 1$ が従う．しかし，$I[\overline{u}] = 1$ となる関数 $\overline{u} \in X$ があれば，$I[\overline{u}] = \int_0^1 \sqrt{\overline{u}^2 + (\overline{u}')^2}\,dx \geq \int_0^1 \overline{u}'(x)\,dx = 1$ よりほとんどいたるところで $\overline{u} = 0$ でなければならず，$\overline{u}(1) = 1$ と $\overline{u}$ の連続性と矛盾する．

- 仮定 (3) においては，$C_1 > 0$ が必要である．その反例は，$n = 1$ のときの $f(x,u,\xi) = x\xi^2$ に対する $X = \{u \in W^{1,2}(0,1);\, u(0) = 1, u(1) = 0\}$ での最小化問題である．このとき，$\inf_X I = 0$ であるが，$I[\overline{u}] = 0$ ならば，$\overline{u}' = 0$ a.e. より連続性と境界条件に矛盾する．

- 仮定 (3) においては，$p > q$ が必要である．その反例は，$n = 1, \lambda > \pi$ のときの $f(x,u,\xi) = \xi^2 - \lambda^2u^2$ に対する $X = W_0^{1,2}(0,1)$ での最小化問題である．このとき，$\inf_X I = -\infty$ である．（レポート問題 7 を参照）

- 仮定 (2) も必要である．その反例は，Bolza の例と呼ばれる問題である．$n=1$ のときの $f(x,u,\xi)=(\xi^2-1)^2+u^4$ に対する $X=W_0^{1,4}(0,1)$ での最小化問題である．このとき，図のような関数列をとれば，$\inf_X I=0$ が示せる．しかし，$I[\overline{u}]=0$ ならば，$\overline{u}=0$, $|\overline{u}'|=1$ a.e. でなければならず，$\overline{u}$ の連続性と矛盾する．



- f が凸性の条件 (2) を満たさなくても，f の convex envelope に対する最小化問題の minimizer の存在が言えるので，この minimizer をもとの問題の一般化した minimizer と考えることができる（[8] の 124 ページを参照）．

4.3 Euler-Lagrange 方程式

オイラー・ラグランジュ方程式に現れる関数 f の微分がある growth 条件を満たせば，最小値の存在を仮定した上で，極小値の満たす Euler-Lagrange 方程式を導く．

オイラー・ラグランジュ方程式

定理 4.2 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ をリプシッツな境界をもつ有界領域，$p\geq 1$ とする．さらに，$f(x,u,\xi)\in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ に対して C が存在し，

$$|f_u(x,u,\xi)|,|f_\xi(x,u,\xi)|\leq C\left(1+|u|^{p-1}+|\xi|^{p-1}\right)\qquad\forall(x,u,\xi)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

が成り立つとする．このとき，$u_0\in W^{1,p}(\Omega)$ に対して，$\overline{u}\in u_0+W_0^{1,p}(\Omega)$ が変分問題

$$\inf_{u\in X}I[u],\quad I[u]=\int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))\,dx,\quad X=u_0+W_0^{1,p}(\Omega)\tag{4.4}$$

の最小値を与えるならば，$\overline{u}$ は

$$\int_\Omega\left[f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u})\varphi+f_\xi(x,\overline{u},\nabla\overline{u})\cdot\nabla\varphi\right]dx=0\qquad\forall\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$$

というオイラー・ラグランジュ方程式の弱い形を満たす．
さらに，$f\in C^2(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ で，$\overline{u}\in C^2(\overline{\Omega})$ ならば，$\overline{u}$ は強いオイラー・ラグランジュ方程式

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_{\xi_i}(x,\overline{u},\nabla\overline{u})\right]=f_u(x,\overline{u},\nabla\overline{u})\qquad\forall x\in\overline{\Omega}$$

を満たす．
逆に，$(u,\xi)\mapsto f(x,u,\xi)$ がすべての $x\in\overline{\Omega}$ について凸で，$\overline{u}$ が上記のオイラー・ラグランジュ方程式のいずれかの解であれば，$\overline{u}$ は変分問題 *(4.4)* の最小値である．

証明は，$I[u+\varepsilon\varphi]$ の ε についての微分を計算するが，極限と積分の交換で f に対して課した仮定を駆使して Lebesgue の優収束定理を用いる．

定理の f_u,f_ξ に対する仮定はオイラー・ラグランジュ方程式に現れる $\int f_u\varphi,\int f_\xi\nabla\varphi$ の積分が意味をもつことを保証している．例えば，$p>1$ のとき $p'=\frac{p}{p-1}$ を思い出して，

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f_u\varphi\right|\leq\left(\int_\Omega|f_u|^{p'}\right)^{1/p'}\|\varphi\|_{L^p(\Omega)}&\leq C\left(\int_\Omega(1+|u|^{p-1}+|\nabla u|^{p-1})\right)^{p/(p-1)}\|\varphi\|_{L^p(\Omega)}\\&\leq C\int_\Omega(1+|u|^p+|\nabla u|^p)\|\varphi\|_{L^p(\Omega)}<\infty\end{aligned}$$

この仮定をソボレフの埋蔵定理を用いて少し弱めることができる．また，f は x の変数については可測性のみ仮定してもかまわない．

5　正則性理論

前の章では，最小化などの変分問題の解の存在を示すために，許容関数の空間を連続な（微分可能な）関数からソボレフ空間に拡張した．このより広い空間で minimizer を掴むことができたが，その代償として minimizer についてわかる情報が減ってしまった．実際，ソボレフ空間の関数は連続でさえない可能性がある．ここでは，minimizer の正則性を取り戻す方法について議論する．

この問題は 1 次元と一般次元の難しさが大きく異なることに注意しよう．例えば，$f(x,u,\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + g(x,u), g \in C^\infty([a,b]\times\mathbb{R})$ の場合（空間は $W^{1,2}(a,b)$），オイラー・ラグランジュ方程式は $-u''(x) = g_u(x,u(x))$ の弱い形である．ここで，$u \in W^{1,2}$ より u は連続だから，右辺 $g_u(x,u(x))$ は連続な関数である．従って，$u \in W^{2,2}$ がすぐに得られる．しかし，これは $u \in C^1$ を意味するので，方程式の右辺は C^1 であると言える．この議論を繰り返すことによって，$u \in C^\infty$ が示される．

一方で，次元が 2 以上のとき，オイラー・ラグランジュ方程式は $-\Delta u = g_u$ の弱い形になる．ところが，$u \in W^{1,2}$ より u の連続性が一般には従わず，g_u の連続性も言えない．さらに重要なことは，右辺 g_u が連続だったとしても，上の方程式は u のヘッセ行列のトレースの正則性しか教えてくれない．しかし，$u \in W^{2,2}$ が意味するのは，ヘッセ行列の対角線以外の成分も L^2 の元であることである．正則性理論は，対角成分の情報のみから，実は他の成分の情報も引き出せるのを示すことに成功した．

5.1　1 次元での正則性理論

変分問題

$$\inf_{u\in X} I[u], \quad I[u] = \int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx, \quad X = \{u \in W^{1,p}(a,b);\, u(a)=\alpha, u(b)=\beta\} \tag{5.1}$$

を考える．解 $\overline{u}$ が存在して，$f \in C^\infty$ ならば，$\overline{u} \in C^\infty$ であることを示す．

1 変数のときの正則性定理

定理 5.1 $f \in C^\infty([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ が次を満たすとする：

(1) $f_{\xi\xi}(x,u,\xi) > 0 \quad \forall(x,u,\xi)\in[a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

(2) $p>1, C_1>0$ が存在して，そして任意の $R>0$ に対して $C_3(R)$ が存在して，

$$f(x,u,\xi) \geq C_1|\xi|^p + C_3 \quad \forall(x,u,\xi)\in[a,b]\times[-R,R]\times\mathbb{R}$$

(3) 任意の $R>0$ に対して $C_4(R)$ が存在して，

$$|f_u(x,u,\xi)|, |f_\xi(x,u,\xi)| \leq C_4(1+|\xi|^p) \quad \forall(x,u,\xi)\in[a,b]\times[-R,R]\times\mathbb{R}$$

このとき，

$$\int_a^b \left[f_u(x,\overline{u},\overline{u}')\varphi + f_\xi(x,\overline{u},\overline{u}')\varphi'\right]\,dx = 0 \qquad \forall\varphi\in C_0^\infty(a,b) \tag{5.2}$$

を満たすすべての $\overline{u}\in W^{1,p}(a,b)$ は $\overline{u}\in C^\infty([a,b])$ で，強い方程式

$$\frac{d}{dx}\, f_\xi(x,\overline{u},\overline{u}')] = f_u(x,\overline{u},\overline{u}') \qquad \forall x\in(a,b).$$

を満たす．

証明のアイデアを理解するために，次の簡単な場合を見る（一般の設定での証明は [8], p.136 を参照）：

$$f(x,u,\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + g(x,u), \qquad g\in C^\infty([a,b]\times\mathbb{R}).$$

ここで，$\overline{u}\in W^{1,2}(a,b)$ が

$$\int_a^b \left[\overline{u}'\varphi' + g_u(x,\overline{u})\varphi\right]\,dx = 0 \qquad \forall\varphi\in C_0^\infty(a,b) \tag{5.3}$$

を満たすなら $\overline{u}\in C^\infty([a,b])$ を示す．

まず，$\overline{u}\in W^{2,2}(a,b)$ を示す．これは，弱微分の定義と (5.3) より従う．実際，$\overline{u}\in C([a,b])$ より，$g_u(x,\overline{u})\in L^2(a,b)$ で，方程式より，

$$\left|\int_a^b \overline{u}'\varphi'\,dx\right| \leq \|g_u(x,\overline{u})\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \qquad \forall\varphi\in C_0^\infty(a,b).$$

従って，$F(\varphi) = \int_a^b \overline{u}'\varphi'\,dx$ で定義される $C_0^\infty(a,b)$ 上の線形汎関数は連続である．$C_0^\infty(a,b)$ が $L^2(a,b)$ に稠密だから，Hahn-Banach の定理を用いて，$L^2(a,b)$ 上の連続な線形汎関数に拡張できる．Riesz の定理より，$v\in L^2(a,b)$ が存在して，$F(\varphi)=\int_a^b v\varphi\,dx\ \forall\varphi\in L^2(a,b)$. つまり，弱微分の意味で $\overline{u}'' = -v\in L^2(a,b)$.

次に，(5.3) で部分積分を施して，変分法の基本補題を適用すれば，

$$\overline{u}''(x) = g_u(x, \overline{u}(x)) \qquad \text{a.e. } x \in (a, b)$$

がわかる．$\overline{u} \in W^{2,2}(a,b) \subset C^1([a,b])$ より，$x \mapsto g(x, \overline{u}(x))$ は $C^1([a,b])$ である．これで，$\overline{u}'' \in C^1$，すなわち $\overline{u} \in C^3$ が言える．あとは，この議論を繰り返すだけである:$\overline{u} \in C^3$ より，$\overline{u}'' = g(x, \overline{u}(x)) \in C^3$...

注

- 定理に対応する変分問題 (5.1) の最小値の存在を保証するには，定理5.1の条件 (2) をより強い条件

  (2') $p > q \geq 1, C_1 > 0, C_, C_3$ が存在して，

  $$f(x,u,\xi) \geq C_1|\xi|^p + C_2|u|^q + C_3 \quad \forall (x,u,\xi) \in [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

  この仮定を追加すれば，最小値が存在し，方程式 (5.2) を満たす．

- 定理の証明をする過程で，$f \in C^k, k \geq 2 \Rightarrow \overline{u} \in C^{k+2}$ がわかる．

- 仮定 (1) はかなり強いが，

  $$f(x,u,p) = \frac{1}{p}|\xi|^p + g(x,u)$$

  の形に限定すれば，$p > 1$ でも，g が $g(x,u) \geq C_2|u|^q + C_3$ をある $p > q \geq 1$ に対して満たせば，最小値が存在し，$C^1([a,b])$ で，$p \in (1,2]$ なら $C^2([a,b])$ であることが言える．

5.2　多次元での正則性理論

次に，解析が難しくなる多変数の変分問題の最小値の正則性を調べる．領域に含まれるコンパクト集合における正則性と境界近傍の正則性を別々に示す．ここでは，Dirichlet 積分 $\int |\nabla u|^2$ の最小化という最も単純な場合にそのテクニックを紹介する．

まずは，内部正則性を扱う，平均値の公式を用いた方法を紹介する．

Weyl lemma

定理 5.2 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$（有界でなくてもよい）と $\overline{u} \in L^1_{loc}(\Omega)$ が

$$\int_\Omega \overline{u}(x)\Delta\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{5.4}$$

を満たすとき，$\overline{u} \in C^\infty(\Omega)$ であり，$\Delta\overline{u} = 0$ *in* Ω が成り立つ．

この設定では当然，$\overline{u}$ は測度ゼロの集合を除いてしか定まらないので，この主張を「$\overline{u}$ の値を測度ゼロの集合でうまく変えたら，$\overline{u} \in C^\infty$ となるようにできる」という意味で解釈する．

また，$\overline{u}$ が弱いオイラー・ラグランジュ方程式 (4.2) を満たせば，(5.4) も自動的に満たすので，(5.4) をラプラス方程式の very weak form と呼ぶことがある．

Proof.
証明の方針は，$\overline{u}$ が（測度ゼロの集合で調節すれば）平均値の公式

$$\overline{u}(x) = \frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B_r(x)} \overline{u}(y)\,dy, \qquad \forall x \in \Omega, \forall B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n;\ |y-x| < r\} \subset \Omega,\ \ \omega_n = |B_1(0)|$$

を満たすことを示すことである．これがわかれば，古典的な結果より主張が従う（例えば，[9] を参照）．

まずは，$\overline{u}$ の平滑化

$$u_\epsilon(x) = \varphi_\epsilon * \overline{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(x-y)\overline{u}(y)\,dy, \quad \varphi_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

が平均値の公式を満たすことを示す．ここで，$\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ は $\int \varphi = 1$ を満たす偶関数であるとする．$\overline{u} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ より，$u^\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon), \Omega_\epsilon = \{x \in \Omega;\ \overline{B_\epsilon(x)} \subset \Omega\}$ がわかる．

任意の $\psi \in C_0^\infty(\Omega_\epsilon)$ に対して，$\varphi_\epsilon * \Delta\psi = \Delta(\varphi_\epsilon * \psi)$ が成り立つことと Fubini の定理を用いると，

$$\int_\Omega \Delta(\varphi_\epsilon * \overline{u})\psi\,dx = \int_\Omega (\varphi_\epsilon * \overline{u})\Delta\psi\,dx = \int_\Omega \overline{u}(\varphi_\epsilon * \Delta\psi)\,dx = \int_\Omega \overline{u}\Delta(\varphi_\epsilon * \psi)\,dx$$

を得る．よって，(5.4) より

$$\int_\Omega \Delta u_\epsilon \psi\,dx = \int_\Omega \Delta(\varphi_\epsilon * \overline{u})\psi\,dx = 0 \qquad \psi \in C_0^\infty(\Omega_\epsilon).$$

変分法の基本補題より $\Delta u_\epsilon = 0$ in Ω_ϵ，すなわち，u_ϵ は調和関数で，平均値の公式を満たす：

$$u_\epsilon(x) = \frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B_r(x)} u_\epsilon(y)\,dy \qquad \forall x \in \Omega_\epsilon,\ \forall B_r(x) \subset \Omega_\epsilon.$$

次に，$\overline{u}$ 自身が平均値の公式を満たすことを示す．軟化の性質より，部分列をとれば，任意の有界開集合 $S \subset \overline{S} \subset \Omega$ に対して

$$u_\epsilon \to \overline{u} \quad \text{in } L^1(S), \qquad u_\epsilon \to \overline{u} \quad \text{a.e. in } S.$$

したがって，ほとんどいたる $x \in \Omega$ について

$$\overline{u}(x) = \lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon(x) = \frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B_r(x)} \overline{u}(y)\,dy, \qquad \forall x \in \Omega, \forall B_r(x) \subset \Omega$$

のように，$\overline{u}$ の平均値の公式が示さ，$\overline{u}$ の正則性は古典理論より従う． □

この証明は Dirichlet 積分にしか通用しないので，より一般的な方法を紹介する．アイデアを説明するために，簡単な Dirichlet 積分の変分問題を考えるが，一つの項を加えて，ポアソン方程式に一般化する．その代わり，境界条件を斉次条件にする．

Dirichlet 積分の最小化問題

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ をリプシッツ境界をもつ有界領域として，$g \in L^2(\Omega)$ とする．

$$\inf_{u\in X} I[u], \qquad I[u] = \int_\Omega \left[\tfrac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - g(x)u(x)\right]\,dx, \qquad X = W_0^{1,2}(\Omega) \tag{5.5}$$

最小値の正則性

定理 5.3 $\overline{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ が

$$\int_\Omega \nabla\overline{u}\cdot\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega g\varphi\,dx \qquad \forall\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{5.6}$$

を満たすとき，$\overline{u} \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W_{loc}^{2,2}(\Omega)$ が成り立つ．より正確には，任意の開集合 $S \subset \overline{S} \subset \Omega$ に対して定数 $C(S,\Omega)$ が存在し，

$$\|\overline{u}\|_{W^{2,2}(S)} \le C\|g\|_{L^2(\Omega)} \tag{5.7}$$

が成立する．さらに，$-\Delta\overline{u} = g$ *a.e. in* Ω.

証明の基本的なアイデアは，式 (5.6) で $\varphi := \Delta\overline{u}$ とすると，左辺にグリーンの定理を適用した後，次の式が現れる：

$$\int(\Delta\overline{u})^2\,dx = \int g\Delta\overline{u}\,dx \le \tfrac{1}{2}\int g^2\,dx + \tfrac{1}{2}\int(\Delta\overline{u})^2\,dx. \tag{5.8}$$

これは (5.7) に相当する評価である．しかし，修正すべきところがいくつかある：$\varphi = \Delta\overline{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ であるかどうかわからない（実際，これより弱いことを証明しようとしている）のと，$\varphi = \Delta\overline{u}$ の $\partial\Omega$ 上のトレースがゼロであるかどうかわからないのと，$\Delta\overline{u} \in L^2$ から $\overline{u} \in W^{2,2}$ が一般には従わないという 3 点である．前者の欠点を修正するためには，微分の代わりに以下で定義される差分（いわゆる difference quotient）を用いる：

$$(D_h u)(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{|h|}, \qquad h \in \mathbb{R}^n,\ |h| \ne 0.$$

つまり，$\varphi = D_{-h}(D_h\overline{u})$ を使う．また，トレースをゼロにするためには，Ω のなかにコンパクトな台をもち，集合 S では恒等的に 1 となるような滑らかな関数 ρ を挟む：$\varphi = D_{-h}(\rho^2(D_h\overline{u}))$．証明は次の 3 つのステップから構成される：

1. $\varphi = D_{-h}(\rho^2 D_h\overline{u})$ として，(5.8) に相当する式を得る．

2. ρ を挟んだことなどで余分な項が現れるから，その評価を行う．

3. この評価を (5.8) に代入し，(5.7) の評価を導く．

Proof.

1. 定理の集合 S をとって，$\rho \in C_0^\infty(\Omega)$ を

$$0 \le \rho \le 1 \quad \text{in } \Omega \qquad \& \qquad \rho \equiv 1 \quad \text{in } S$$

を満たすように選ぶ．すると，（ρ が $\partial\Omega$ の近傍で消えるから）

$$\varphi = D_{-h}(\rho^2 D_h \overline{u})$$

で定義される関数は十分小さな $|h|$ に対して意味をもち，$W_0^{1,2}(\Omega)$ の関数である．これを試験関数として (5.6) に代入すると，

$$\int_\Omega \nabla\overline{u} \cdot \nabla\left(D_{-h}(\rho^2 D_h \overline{u})\right)\, dx = \int_\Omega g D_{-h}(\rho^2 D_h \overline{u})\, dx \tag{5.9}$$

を得る．今，$|h|$ が十分小さければ，

$$\int_\Omega \nabla\overline{u} \cdot \nabla(D_{-h} v)\, dx = \int_\Omega D_h(\nabla\overline{u}) \cdot \nabla v\, dx$$

が Ω にコンパクトな台をもつ任意の $v \in W^{1,2}(\Omega)$ について正しい（difference quotient を書き下して変数変換をすれば示せる）．これを $v = \rho^2 D_h \overline{u}$ に用いて，$\nabla v = \rho^2 D_h(\nabla\overline{u}) + 2\rho\nabla\rho D_h \overline{u}$ を計算すれば，(5.9) の式は

$$\int_\Omega D_h(\nabla\overline{u}) \cdot \left(\rho^2 D_h(\nabla\overline{u})\right)\, dx + 2\int_\Omega D_h(\nabla\overline{u}) \cdot (\rho\nabla\rho D_h\overline{u})\, dx = \int_\Omega g D_{-h}(\rho^2 D_h \overline{u})\, dx$$

$$\|\rho D_h(\nabla\overline{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\int_\Omega D_h(\nabla\overline{u}) \cdot (\rho\nabla\rho D_h\overline{u})\, dx = \int_\Omega g D_{-h}(\rho^2 D_h \overline{u})\, dx \tag{5.10}$$

となる．

2. 第 2 項と第 3 項の積分を評価する．第 2 項は $ab \le \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2$ がすべての $\epsilon > 0$ について成り立つことを用いて，次のようにおさえることができる：

$$\begin{aligned} 2\int_\Omega D_h(\nabla\overline{u}) \cdot (\rho\nabla\rho D_h\overline{u})\, dx &\le 2\int_\Omega |\rho D_h(\nabla\overline{u})|\, |\nabla\rho D_h\overline{u}|\, dx \\ &\le \epsilon\|\rho D_h(\nabla\overline{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\epsilon}\|\nabla\rho D_h\overline{u}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \tag{5.11}$$

- ここで，任意のコンパクト集合 $S \subset \Omega$ について，$\mathrm{dist}(S, \Omega^c) > |h|$ ならば，$\|D_h u\|_{L^2(S)} \le \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ が成り立つことを示す（$n = 1$ の場合のみ）．実際，u を測度ゼロの集合で

修正すれば,

$$u(x+h) - u(x) = h \int_0^1 u'(x+sh)\, ds.$$

絶対値をとり，Jensen の不等式を適用すれば,

$$|u(x+h) - u(x)|^2 \le |h|^2 \int_0^1 |u'(x+sh)|^2\, ds.$$

S で積分して，$S + sh \subset \Omega$ に気づけば,

$$\begin{aligned}\int_S |u(x+h) - u(x)|^2\, dx &\le |h|^2 \int_0^1 \int_S |u'(x+sh)|^2\, dx\, ds \\ &= |h|^2 \int_0^1 \int_{S+sh} |u'(x)|^2\, dx\, ds \le |h|^2 \|u'\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

よって，(5.11) の右辺の第 2 項は

$$\|\nabla\rho D_h\overline{u}\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_{\mathrm{supp}\rho} |\nabla\rho D_h\overline{u}|^2\, dx \le \|\nabla\rho\|^2_{L^\infty(\Omega)} \int_{\mathrm{supp}\rho} |D_h\overline{u}|^2\, dx \le \|\nabla\rho\|^2_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\overline{u}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

と評価できる．今，(5.11) は

$$2\int_\Omega D_h(\nabla\overline{u}) \cdot (\rho\nabla\rho D_h\overline{u})\; dx \le \epsilon\|\rho D_h(\nabla\overline{u})\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\epsilon}\|\nabla\rho\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\overline{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{5.12}$$

となる.

次に (5.10) の右辺を評価する．さきほどの $\|D_h u\|_{L^2(S)} \le \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ を再び利用すると,

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega g D_{-h}(\rho^2 D_h\overline{u})\, dx\right| &\le \frac{\epsilon}{2}\|D_{-h}(\rho^2 D_h\overline{u})\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\epsilon}\|g\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\le \frac{\epsilon}{2}\|\nabla(\rho^2 D_h\overline{u})\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\epsilon}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

また,

$$\left[\nabla(\rho^2 D_h\overline{u})\right]^2 = \left[\rho^2 D_h(\nabla\overline{u}) + 2r\nabla\rho D_h\overline{u}\right]^2 \le 2\left[\rho^2 D_h(\nabla\overline{u})\right]^2 + 2\left[2\rho\nabla\rho D_h\overline{u}\right]^2$$

より，$0 \le \rho \le 1$ と $\rho^2 \le \rho$ も考慮すれば,

$$\left|\int_\Omega g D_{-h}(\rho^2 D_h\overline{u})\, dx\right| \le \epsilon\|\rho D_h(\nabla\overline{u})\|^2_{L^2(\Omega)} + 4\epsilon\|\nabla\rho\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\overline{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\epsilon}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}$$

3. これらの評価を (5.10) に代入すると,

$$(1-2\epsilon)\|\rho D_h(\nabla\overline{u})\|^2_{L^2(\Omega)} \le \left(4\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\right)\|\nabla\rho\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\overline{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\epsilon}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}$$

を得る．ϵ を小さくとれば（例えば，$\epsilon = \frac{1}{4}$），$C(\epsilon, \rho)$ があって，

$$\|\rho D_h(\nabla\overline{u})\|^2_{L^2(\Omega)} \le C\left(\|\nabla\overline{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

ρ の定義より，左辺は $\|D_h(\nabla\overline{u})\|^2_{L^2(S)}$ より小さくならない．したがって，h によらない C があって，

$$\|D_h(\nabla\overline{u})\|_{L^2(S)} \le C\left(\|\nabla\overline{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2(\Omega)}\right)$$

がすべての十分小さな h について成り立つことがわかった．下記の補題を $\overline{u}_{x_i}, i = 1, \ldots, n$ に適用すれば，$\overline{u}_{x_i} \in W^{1,2}(S), i = 1, \ldots, n$，すなわち，$\overline{u} \in W^{2,2}(S)$ が従う．

定理にある評価を導くために，試験関数 $\varphi = \overline{u}$ を用いて，Poincaré の不等式を適用することで，$\|\overline{u}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \le C\|g\|_{L^2(\Omega)}$ という評価が得られることに注意すればよい．　□

補題

$v \in L^p(\Omega)$ とコンパクト集合 $\overline{S} \subset \Omega$ に対して定数 C が存在して，

$$\|D_h v\|_{L^p(S)} \le C \qquad \forall h \ \text{ such that } 0 < |h| < \operatorname{dist}(S, \Omega^c)$$

が成り立てば，$v \in W^{1,p}(S)$ であり，$\|\nabla v\|_{L^p(S)} \le C$ が成り立つ．

Proof. $n = 1$ の場合（$\Omega = (a, b)$）のみ示す．$\varphi \in C_0^\infty(S)$ と補題の h に対して，

$$\int_a^b v(x+h)\varphi(x)\,dx = \int_a^b v(x)\varphi(x-h)\,dx$$

と部分積分できるから，

$$\left|\int_a^b v(x)\frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{|h|}\,dx\right| = \left|\int_a^b (D_h v)\varphi\,dx\right| \le C\|\varphi\|_{L^{p'}(S)}.$$

$h \to 0$ とすれば，

$$\left|\int_S v\varphi'\,dx\right| \le C\|\varphi\|_{L^{p'}(S)} \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(S).$$

定理5.1の証明と同じ議論で $v \in W^{1,p}(S)$ が従う．　□

より一般的な設定での定理は，例えば [8], p.144 を参照するとよい．

6　Alt-Caffarelli 汎関数について

関数 u が正となる集合 $\{x;\ u(x) > 0\}$ の特性関数 $\chi_{u>0}$ を含む汎関数

$$J[u] = \int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^2 + Q^2(x)\chi_{u>0}(x) \right) dx$$

の最小化問題は [4] で扱われている．

7　変分構造をもつ発展問題

これまで扱ってきた汎関数をある系のエネルギーとして捉え，それに対応する運動の法則を考える．以下では基本的な運動法則を 2 種類，紹介する：エネルギーを保存する運動とエネルギーを減少させる運動である．

7.1　勾配流

エネルギーを表す汎関数が与えられたとき，ある状態からスタートするこの汎関数に対する勾配流はエネルギーを最も早く減少させる動きとして定義される．

まず，有限次元，すなわち汎関数が多変数関数 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の場合で解説する．簡単のために φ が凸な C^2-関数であるとする．関数 φ のグラフが $\mathbb{R}^n$-空間での質点の位置によるエネルギー（いわゆる energy landscape）を表しているとして，ある場所 $x^0 \in \mathbb{R}^n$ に存在する質点がどのように動けばそのエネルギーを最も早く減らすことができるかを考える．負の勾配ベクトル $-\nabla\varphi(x)$ は点 x において関数 φ が最も早く減少している方向をもち，勾配の大きさはその減少の度合いを表している．よって，点 x^0 から始まる関数 φ に対する勾配流

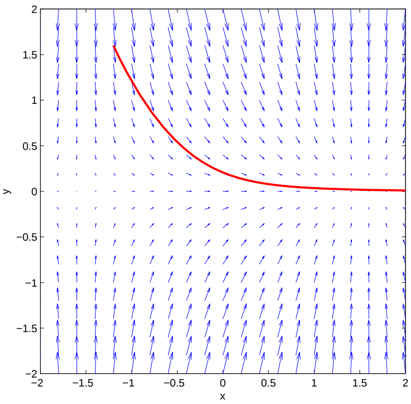
$$u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

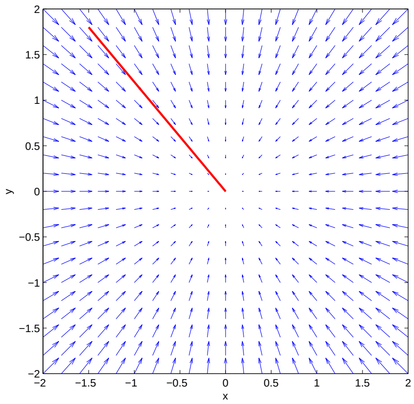
を次の常微分方程式に対する初期値問題の解である関数として定義するのが自然である：

$$\frac{d}{dt}u(t, x^0) = -\nabla\varphi(u(t, x^0)) \qquad \forall t > 0 \tag{7.1}$$

$$u(0, x^0) = x^0. \tag{7.2}$$

上記の微分方程式が n 本の式を連立させたものであることに注意する．スタート地点 x_0 を固定するば，関数 $u(t, x^0), t > 0$ は時刻 t をパラメータとする $\mathbb{R}^n$ 内の曲線を表す．





（左）関数 $y^2 - x\cos x$ の（マイナス）勾配ベクトル場とそれに沿った勾配流の経路の例

（右）以下の例で扱う関数 $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ の（マイナス）勾配ベクトル場と対応する勾配流

例 7.1 $n=2, \varphi(x_1,x_2)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$ のとき，$\varphi(x_1,x_2)=(\partial\varphi/\partial x_1, \partial\varphi/\partial x_2)=(x_1,x_2)$ だから，$-\nabla\varphi(u)=-u$ となり，初期値問題は

$$\frac{d}{dt}u(t)=-u(t), \qquad u(0)=x^0=(x_1^0,x_2^0)$$

として書かれる．この解は

$$u(t,x^0)=e^{-t}x^0$$

となる．よって，$\varphi(x_1,x_2)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$ の勾配流は初期点 x^0 から原点に向かって直線上に動き，速度が指数的に減衰するような運動である．φ のグラフは原点に最小値をもつ回転放物面であることに気づけば，当然の結果である．

今，多変数関数 φ の代わりにヒルベルト空間 H 上の汎関数 $F: H\to\mathbb{R}$ を考える．上と同じような勾配流を導入するには，まず汎関数の勾配を定義する．

定義 7.1 線形作用素 $F'(v)(\cdot): H\to\mathbb{R}$ が存在し，

$$\lim_{w\to 0, w\in H}\frac{|F(v+w)-F(v)-F'(v)(w)|}{\|w\|_H}=0$$

が成り立つならば，この作用素を点 v における F のフレシェ*(Fréchet)* 微分と呼ぶ．

定義 7.2 汎関数 $F: H\to\mathbb{R}$ が点 $v\in H$ においてフレシェ微分可能であるとする．そのとき，リースの定理より，

$$(g,w)_H=F'(v)(w) \qquad \forall w\in H$$

が成り立つような $g\in H$ が存在する．ただし，$(\cdot,\cdot)_H$ は H の内積である．
この元 g を $\nabla F(v)$ と書き，v における F の勾配と呼ぶ．

例 7.2

(1) $H=\mathbb{R}^n$, $F=\varphi$ といった有限次元の場合，F の勾配は通常の公式

$$\nabla F=\left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$$

で与えられる．

(2) ソボレフ空間 $H=W_0^{1,2}(0,1)$ での内積を

$$(f,g)_H=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

と定義する．汎関数 $F:W^{1,2}(0,1)\to\mathbb{R}$ を

$$F(u)=\int_0^1\frac{1}{2}(u'(x))^2\,dx$$

で定め，その勾配を求める．フレシェ微分は変分の計算と同様，

$$F'(v)(w)=\int_0^1 v'w'\,dx$$

となる．したがって，

$$F'(v)(w)=-\int_0^1 v''w\,dx=(-v'',w)_H$$

より，（弱い意味で）$\nabla F(v)=-v''$ であることがわかる．

ヒルベルト空間 H の元 u_0 から始まる，汎関数 $F:H\to\mathbb{R}$ に対する勾配流 $u:\mathbb{R}\times H\to H$ は次の条件を満たす関数として定義する：

$$\frac{d}{dt}u(t,u_0)=-\nabla F(u(t,u_0)),\qquad u(0,u_0)=u_0.$$

例 7.3　$u_0\in W_0^{1,2}(0,1)$ が与えられたとき，最後の例で調べた汎関数

$$F(u)=\int_0^1\frac{1}{2}(u'(x))^2\,dx\quad:\ W^{1,2}(0,1)\to\mathbb{R}$$

に対する勾配流 $u(t)$ は各 $t>0$ に対して $W_0^{1,2}(0,1)$ の元，つまり x の関数であるので，それを $u(t,x)$ と書くと，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), && t>0, x\in(0,1)\\
&u(0,x)=u_0(x), && x\in(0,1)\\
&u(t,x)|_{x\in\{0,1\}}=0, && t>0
\end{aligned}$$

で決まる．

これは熱方程式である．区間 $(0,1)$ を占めるはりがねが初期温度 $u_0(x)$ を与えられたとき，温度の時間変化を表すモデル方程式である．このときエネルギーが減少することが以下の形式的な計算よりわかる：

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{1}{2}(u'(t,x))^2\,dx = \int_0^1 u'u_t'\,dx = -\int_0^1 u''u_t\,dx + u'u_t\big|_{x=0}^1 = -\int_0^1 (u_t)^2\,dx < 0.$$

境界での $u'u_t$ の値が消えるのは時間に依存しない Dirichlet 境界条件や斉次 Neumann 境界条件のときである．

一般的には勾配流は細かい変化を無視した，時間の長いスケールで見た運動のモデルとして解釈できる．例えば，弦の振動の場合は，強い抵抗による減衰を表していると言える．一方では，エネルギーを保存する運動である振動は次節で紹介するアプローチから得られる．

7.2　ハミルトンの原理

束縛力（拘束条件）を除いて，すべての力がポテンシャルをもつような系を考える．この系の全運動エネルギーを K，全ポテンシャル・エネルギーを V とおくと，

$$L = K = V$$

という量は系のラグランジュ関数（ラグランジアン）と呼ぶ．また，それをある時刻 t_1 から他の時刻 t_2 まで積分した量

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$$

を作用積分（action integral）と呼ぶ．

ハミルトンの原理

系が行う運動は作用積分の停留値を与えるものである．

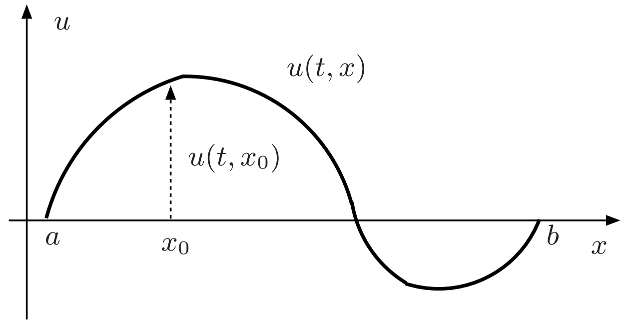
この原理より求めたい未知関数（例えば，弦の形状を表す関数）は時間に依存するものだから，停留値を与えるものがあれば，それが t_1 と t_2 の間の運動を表していることになる．

例 7.4 ニュートンの第 2 法則に基づいて運動方程式を導く例を挙げる．そのあと，ハミルトンの原理からの導出を紹介する．両端を固定した弦の振動を表す方程式を以下の仮定のもとで導出する．

1. 弦の運動はある平面に限られる（以下それを xy-平面とする）
2. 弦の各部分は x 軸と垂直な方向にのみ動く（横波）
3. 弦は一様な線密度 ρ を持つ

4. 弦の張力 T は運動の間一定で，弦の接線方向に働く

5. 弦と x 軸とが成す角度 θ は微小である



振動する弦の問題の設定

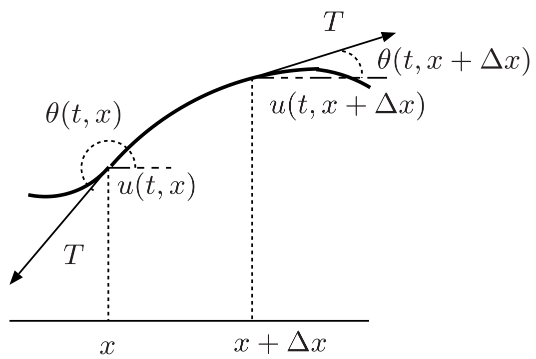
従って，次の設定である：

独立変数 (independent variable)	:	時刻 t, 1 次元の位置座標 x
未知関数 (unknown function)	:	弦上の点 x の時刻 t での垂直方向の変位 $u(t,x)$

弦の微小部分 $[x, x+\Delta x]$ の運動を考え，**Newton の第二法則** $F = ma$ を適用する．このとき，微小部分の質量は $m = \rho \Delta x$ となり，その加速度は $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)$ となる．また，部分に働く外力 F は，左右両端における張力の垂直方向の成分の合計である：

$$F = T\sin\{\theta(t, x+\Delta x)\} + T\sin\{\theta(t,x)\}$$

ここで，5. の仮定を用いて，$\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta = \pm\frac{\partial u}{\partial x}$ を得る．



弦の微小部分に働く力

従って，張力が働く方向を考慮すると，

$$F = T\frac{\partial u}{\partial x}(t, x+\Delta x) - T\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$$

以上により，微小部分に対する Newton の運動方程式は

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = T\frac{\partial u}{\partial x}(t, x+\Delta x) - T\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$$

となる．この両辺を Δx で割り，$\Delta x \to 0$ とすれば，

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$$

という偏微分方程式が得られた．定数 $c = \sqrt{T/\rho}$ を導入して，上式は

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{または} \qquad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

の形に書かれ，**空間 1 次元の波動方程式** (wave equation) と呼ばれる．

次に弦の振動方程式をハミルトンの原理より導出する．弦の微小部分の運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ より，$\frac{1}{2}\rho\Delta x(\frac{\partial u}{\partial t})^2$ となるので，

$$K(u) = \int_a^b \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx$$

と書ける．また，弦のポテンシャル・エネルギーとして弾性エネルギー（の近似）

$$V(u) = \int_a^b \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

を採用する．よって，作用積分は

$$A(u) = \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \left\{\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)\right)^2 - \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)\right)^2\right\} dx\, dt$$

となる．

作用積分は時間 t と空間 x の 2 変数関数を $\mathbb{R}$ へ写す汎関数で，その停留値を以前と同様に，「変分がゼロ」という条件より求める．詳しい関数空間の設定を省略して形式的に計算する．t と x の関数である試験関数 $\varphi(t, x)$ を，時刻 t_1 と時刻 t_2 の近傍，そして両端 a, b の近傍で消えるように選ぶ．すると，

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}A(u+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \left\{\rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - T\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right\} dx\, dt$$

を得るが，ここで t と x それぞれについて部分積分を施し，試験関数の選び方より境界上の値が

ゼロになることに注意すると，

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \left\{ -\rho \frac{\partial u^2}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \varphi \, dx \, dt$$

に変形される．$(t_1, t_2) \times (a, b)$ の内側では φ が任意だから，この領域において上と同じ波動方程式が成り立つことを導いた．初期条件と境界条件は別途，現象の物理的な性質より指定する．

波動方程式の解が全エネルギー

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(\rho u_t^2 + T u_x^2 \right) \, dx$$

を時間と共に保存することを以下の計算で確かめる：

$$\frac{d}{dt} E(u) = \int_a^b \left(\rho u_t u_{tt} + T u_x u_{xt} \right) \, dx = \int_a^b \left(\rho u_{tt} - T u_{xx} \right) u_t \, dx + u_x u_t \big|_{x=a}^{b} = 0.$$

境界での $u_x u_t$ の値が消えるのは時間に依存しない Dirichlet 境界条件や斉次 Neumann 境界条件のときである．

7.3　距離空間における勾配流

上で見たように，$\mathbb{R}^n$ における勾配流は多様体上の勾配流や ヒルベルト空間上の勾配流に拡張できて，それに対する理論も存在する．これを動機に，一般の距離空間への拡張を試みる研究が始まり，距離空間での理論も発達した．純粋に数学的な興味もあるが，微分できない汎関数を扱う必要性や，現象のモデルとしてあらわれる方程式の多くが適切な距離での勾配流として表せる（例えば，反応移流拡散方程式系はエントロピー汎関数の Wasserstein 距離についての勾配流である）ことで変分構造の利点が利用できることから注目され，2010 年の C.Villani のフィールズ賞では距離空間における勾配流の解析の性かも評価された．

距離空間と違って，ヒルベルトやバナッハ空間では空間の線形構造を用いて勾配流の定義式

$$u'(t) = -\nabla \phi(u(t)), \qquad t \in J \tag{7.3}$$

に現れる微分 $u'(t)$ が定義できる．距離空間 X に拡張するには，上の微分方程式が

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t) - z\|^2 + \phi(u(t)) \le \phi(z) \qquad \forall z \in X$$

と同値であることに注目して，$\|u(t) - z\|$ を距離 $d(u(t), z)$ で置き換える．

この拡張の過程を $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の有限次元のケースで見てみよう．ただし，ϕ は微分可能で，$\nabla \phi$ が Lipschitz 連続であると仮定する．

(A) $\nabla \phi$ が quasi-monotone であることに注意する．Hilbert 空間 H での写像 $A : D(A) \subset H \to H$

が quasi-monotone であるとは，$\alpha \in \mathbb{R}$ があって，

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq \alpha|x - y|^2 \qquad \forall x, y \in D(A)$$

が成り立つという意味である．ここで，$D(A)$ は A の定義域（domain）である．$\nabla\phi$ が Lipschitz だから，Lipschitz 係数を L とすれば，

$$\langle \nabla\phi(x) - \nabla\phi(y), x - y\rangle \geq -|\nabla\phi(x) - \nabla\phi(y)|\,|x - y| \geq -L|x - y|^2$$

が成立し，$\alpha = L$ について ϕ は quasi-monotone である．

(B) 次に，ϕ が quasi-convex であることに注意する．つまり，$e(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ と定義すれば，$\psi = \phi - \alpha e$ が凸であるような α が存在する．実際，(A) と同様に $\alpha = L$ とすれば，$\nabla\psi(x) = \nabla\phi(x) - \alpha x$ が monotone である（つまり，$\alpha = 0$ について quasi-monotone である）から，凸性の定義から ψ が凸であることが示される．

(C) $\nabla\psi(x)$ は ψ の x における subgradient である，という事実を示す．実際，

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t}\left[\psi(x + th) - \psi(x)\right] = \langle \nabla\psi(x), h\rangle, \qquad h \in \mathbb{R}^n$$

が成り立つが，ψ が凸なので $t \mapsto \psi(x + th)$ も凸関数で，$[\cdot]$ の中の量は t の非減少関数である．とくに，$t = 1$ をとると，

$$\psi(x + h) - \psi(x) \geq \langle \nabla\psi(x), h\rangle, \qquad h \in \mathbb{R}^n$$

を得る．$z = x + h, y = \nabla\psi(x)$ と置き直すと，

$$\psi(z) \geq \psi(x) + \langle y, z - x\rangle, \qquad z \in \mathbb{R}^n$$

という式になる．この式を満たす $y \in \mathbb{R}^n$ は ψ の x における subgradient と呼ばれる．ψ が微分可能なこの場合は subgradient が一意に決まる．

(D) 今，勾配流の定義式 (7.3) は

$$-u'(t) - \alpha u(t) = \nabla\psi(u(t)), \qquad t \in J$$

と同値である．(E) の結果と合わせると，

$$\langle -u'(t) - \alpha u(t), z - u(t)\rangle + \psi(u(t)) \leq \psi(z) \qquad \forall x, z \in \mathbb{R}^n,\ \forall t \in J$$

これをノルムを用いて書き直す．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left|u(t) - z\right|^2\right) + \alpha|u(t)|^2 - \alpha\langle u(t), z\rangle + \phi(u(t)) - \frac{\alpha}{2}|u(t)|^2 \leq \phi(z) - \frac{\alpha}{2}|z|^2$$

整理して，ノルムを計量で置き換えると，

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}d^2(u(t),z)+\frac{\alpha}{2}d^2(u(t),z)+\phi(u(t))\le\phi(z).$$

これは先ほど予告した勾配流の別の定義式である．

(E) さらに，$u(t)$ にかかっている部分を外すために，試験関数 $\eta\in C_0^\infty(J)$ をかけて，J で積分すれば，

$$-\int_J\frac{1}{2}d^2(u(t),z)\eta'(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_J d^2(u(t),z)\eta(t)\,dt\le\int_J[\phi(z)-\phi(u(t))]\eta(t)\,dt \tag{7.4}$$

を得る．$(\mathbb{R}^n,|\cdot|)$ を一般の距離空間 (X,d) で置き換えても，$\phi\in C(X,\mathbb{R}), u\in C(J,X)$ でさえあれば，この不等式は意味をもつ．

例 7.5 熱方程式の例を取り上げる．

$$\phi(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2\,dx, & u\in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)\\ +\infty, & \text{otherwise}\end{cases}$$

とする．初期値 $u_0:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が $\int_{\mathbb{R}^n}|u_0(x)|^2\,dx<\infty$ を満たすなら，

$$\begin{aligned}v_t(t,x)&=\Delta v(t,x), && t>0, x\in\mathbb{R}^n\\ v(0,x)&=u_0(x), && x\in\mathbb{R}^n\end{aligned}$$

の解 $v(t,x)$ に対して $u(t)(x)=v(t,x)$ は

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}d^2(u(t),z)\le\phi(z)-\phi(u(t)),\qquad t>0,\ \forall z\in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$$

を満たす．ここで，$d^2(u,z)=\int_{\mathbb{R}^n}(u-z)^2\,dx$ という L^2 の距離を意味する．

距離空間での勾配流を定義する準備ができた．

距離空間での勾配流

定義 7.3 (X,d) を距離空間，$\phi:X\to(-\infty,+\infty]$ を *proper* な（つまり，恒等的に $+\infty$ でない）写像，$\alpha\in\mathbb{R}$ とする．$u:J\to X$ は (ϕ,α) に対する (X,d) での勾配流であるとは，u は

(i) $u\in C(J,X)$

(ii) $\phi(u)\in L^1_{loc}(J)$

(iii) *(7.4)* がすべての $z\in X$ とすべての $\eta\in C_0^\infty(J)$ について満たされる

という条件を満足するという意味である．

勾配流の一意性は次の事実から従う：$u, v : J \to X$ が (ϕ, α) に対する勾配流のとき

$$d(u(t), v(t)) \leq e^{-\alpha(t-s)} d(u(s), v(s)) \qquad \forall s, t \in J,\ s < t.$$

よって，存在の問題に集中し，ヒルベルト空間の設定のみではあるが，汎関数 ϕ に対してできるだけ弱い仮定をおく．

ヒルベルト空間での存在

定理 7.4 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を *Hilbert* 空間，$\phi : X \to (-\infty, +\infty]$ を次の条件を満たす *proper* な汎関数とする：

- ϕ は *lower semicontinuous*（下半連続），つまり，すべての $c \in \mathbb{R}$ について $\{x \in X; \phi(x) \leq c\}$ は閉集合である（$\phi(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} \phi(x)$ でも定義できる）
- $\psi = \phi - \alpha e$ が凸であるような $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在する（つまり，$D(\phi) \subset X$ は凸集合で，$\phi|_{D(\phi)}$ は凸）

このとき，任意の $x \in D(\phi)$ に対して，x から始まる (ϕ, α) に関する勾配流 $u : (0, \infty) \to X$ が存在する．

Proof. （概要）ψ の劣微分 $\partial\psi(x)$ を subgradient の集合，すなわち，

$$\partial\psi(x) = \{x \in X; \langle y, z - x \rangle + \psi(x) \leq \psi(z)\ \ \forall z \in D(\psi)\}$$

で定義する．例えば，$f(u) = |u|$ の劣微分は以下で与えられる：

$$\partial f(u) = \begin{cases} \{+1\}, & u > 0 \\ [-1, 1], & u = 0 \\ \{-1\}, & u < 0 \end{cases}.$$

基本的には

$$-u'(t) - \alpha u(t) \in \partial\psi(u(t)), \qquad t > 0 \tag{7.5}$$

を示せばよい．つぎの補題で $\partial\psi$ の性質を述べる．

Lemma. $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の Hilbert 空間における proper な汎関数 $\psi : X \to (-\infty, +\infty]$ が lower semicontinuous で凸ならば，$\partial\psi$ は cyclically monotone，そして $(X, |\cdot|)$ において m-accretive である．

定義 7.5

- X は *Hilbert* 空間．$A \subset X \times X$ は *monotone* であるとは

$$\forall (x_i, y_i) \in A, i = 1, 2 \qquad \langle y_2 - y_1, x_2 - x_1 \rangle \geq 0$$

- $A \subset X \times X$ は *cyclically monotone* であるとは

$$\forall \{x_0, x_1, \ldots, x_N = x_0\}, \{y_1, \ldots, y_N\} \ \textit{such that} \ (x_i, y_i) \in A, i = 1, \ldots, N$$
$$\sum_{i=1}^{N} \langle y_i, x_i - x_{i-1} \rangle \geq 0$$

- $(X, \|\cdot\|)$ は *Banach* 空間．$A \subset X \times X$ は *accretive* である（または $-A$ は *dissipative*（消散作用素）である）とは

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + h(y_1 - y_2)\| \qquad \forall (x_i, y_i) \in A, \ i = 1, 2, \quad \forall h > 0$$

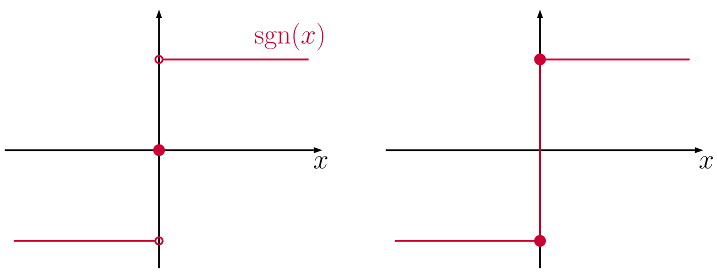
- $A \subset X \times X$ は *m-accretive* であるとは，A は *accretive* で

$$R(I + hA) = X \qquad \forall h > 0.$$

ここで，I は恒等写像のグラフ $\{(x, x), x \in X\}$ で $R(I + hA) = \{y \in X; \exists x \in D(A) \ \textit{such that} \ (x, y) \in I + hA\}$．また，$D(A) = \{x \in X; \ \exists y \in X \ \textit{such that} \ (x, y) \in A\}$.

上の定義では A は $X \times X$ の部分集合となっているが，イメージとしては作用素の”グラフ”を念頭においている．具体的には，$A = \{(x, y); \ x \in X, y \in \partial\psi(x)\}$.

例 7.6 $f(x) = \mathrm{sgn}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のグラフは monotone であるが，m-accretive ではない（$x + \mathrm{sgn}(x)$ は $\mathbb{R}$ への全射ではないから）．一方で，図の右側で示している集合 $A = \{(x, -1); \ x < 0\} \cup \{(0, y); \ -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, +1); \ x > 0\}$ は monotone で m-accretive である．



$A := \partial\psi + \alpha I$ とおけば，式 (7.5) は

$$-u'(t) \in A(u(t)), \qquad t \in J$$

と書き換えられる．そこで，Crandall-Liggett の定理（[6]，[11] の解説も参照）の仮定が満たされるから，この定理を適用できる．この定理により，

$$J_h x = (I + hA)^{-1} x, \qquad x \in X,\ \ h \in I_\alpha := \begin{cases} (0, \infty), & \alpha \geq 0 \\ (0, \frac{1}{|\alpha|}), & \alpha < 0 \end{cases}$$

に対して，

$$S(t)x := \lim_{n \to \infty} \left(J_{t/n}\right)^n x, \qquad x \in \overline{D(A)}$$

が $t > 0$ で存在して，$S(0+) = x$ を満たし，$\{S(t)\}_{t \geq 0}$ は $\overline{D(A)}$ 上の作用素半群を定義する．そして，$u(t)(x) = S(t)x$ は $-u'(t) \in Au(t)$ を満たす．あとは上記の (E) のように進める．　□

Crandall-Liggett の定理のアイデアは基本的にオイラー法の適用である．実際 $x = u(0)$ と小さい $t > 0$ に対してオイラー法を記すと，

$$-\frac{u(t) - u(0)}{t} = Au(t)$$

となり，整理すれば $x = u(t) + tAu(t)$，つまり $u(t) = (I + tA)^{-1} x$ で，これを反復させればよい．

ヒルベルト空間ではなく，距離空間のみの場合，$J_h x$ を

$$\Phi(h, x; y) = \begin{cases} \frac{1}{2h} d^2(x, y) + \phi(y), & y \in D(\phi) \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

のただ一つの最小値 y として定義する．勾配流理論についての詳しい解説は [2] を参照するとよい．

熱方程式の場合は内積が L^2 の内積だったから，Φ を書いてみると，

$$\Phi(h, u; u_{k-1}) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|u(x) - u_{k-1}(x)|^2}{2h} + \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 \right) dx, & u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる．これはいわゆる離散勾配流という近似法につながる．この方法はよく知られているので，以下では，双曲型の問題に対しても同様な方法が提案できるというあまり知られていない事実を波動方程式の例で解説する．

7.4　双曲型離散勾配流

In this section we explain the basic ideas and properties of the variational method called *discrete Morse flow*, reflecting upon its applicability to volume-constrained problems and, eventually, to free-boundary problems. This method solves time-dependent problems with differential operators concerning space variables in divergence form by discretizing time and defining a sequence of minimization problems approximating the original problem. The corresponding minimizers are then interpolated with respect to time and discretization parameter is sent to zero. The method was first introduced in by Norio

Kikuchi for parabolic problems and then applied to hyperbolic problems.

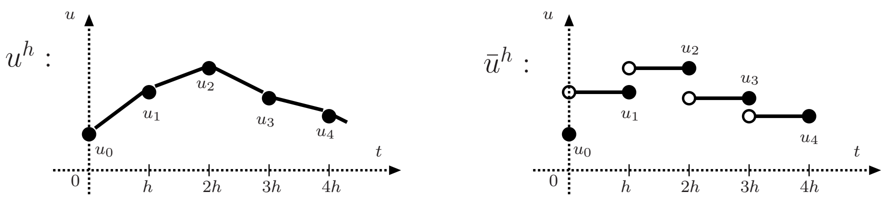
We shall explain the details on the example of the wave equation. It is considered in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ with smooth boundary $\partial\Omega$, on which homogeneous Dirichlet boundary condition is given. Initial position $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ and initial velocity $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ are prescribed. Therefore, we have the following problem:

$$\begin{aligned} u_{tt}(t,x) &= \Delta u(t,x) \quad \text{in } Q_T = (0,T)\times\Omega, && (7.6)\\ u(t,x) &= 0 \quad \text{on } (0,T)\times\partial\Omega, && (7.7)\\ u(0,x) &= u_0(x) \quad \text{in } \Omega, && (7.8)\\ u_t(0,x) &= v_0(x) \quad \text{in } \Omega. && (7.9)\end{aligned}$$

First, we fix a natural number $N > 0$, determine the time step $h = T/N$ and put $u_1(x) = u_0(x) + hv_0(x)$. Function u_0 corresponds to the approximate solution at time level $t = 0$, while function u_1 is the approximate solution at time level $t = h$. We define the approximate solution u_n on further time levels $t = nh$ for $n = 2, 3, \ldots, N$, to be the minimizer of the following functional in $H_0^1(\Omega)$:

$$J_n(u) = \int_\Omega \frac{|u - 2u_{n-1} + u_{n-2}|^2}{2h^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx. \tag{7.10}$$

We observe that the second term of the functional is lower-semicontinuous with respect to sequentially weak convergence in $H^1(\Omega)$ and the first term is continuous in $L^2(\Omega)$. The existence of minimizers then follows immediately from the fact that the functionals are bounded from below for each $n = 2, 3, \ldots, N$. This is a crucial advantage over the continuous version of this functional. Of course, if other terms, representing outer forces etc. are present, we have to make certain assumptions concerning these terms in order to get the existence of a minimizer.



As the next step, we define the approximate solutions $\bar{u}^h$ and u^h through interpolation of the minimizers $\{u_n\}_{n=0}^N$ in time. The interpolation is schematically demonstrated in the above figure and precisely given by

$$\bar{u}^h(t,x) = \begin{cases} u_0(x), & t = 0 \\ u_n(x), & t \in ((n-1)h, nh],\ n = 1,\dots,N, \end{cases} \tag{7.11}$$

$$u^h(t,x) = \begin{cases} u_0(x), & t = 0 \\ \frac{t-(n-1)h}{h} u_n(x) + \frac{nh-t}{h} u_{n-1}(x), & t \in ((n-1)h, nh], n = 1,\dots,N. \end{cases}$$

Since u_n is a minimizer of J_n, the first variation of J_n at u_n vanishes. Thus, for any $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ we have

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} J_n(u_n + \varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J_n(u_n+\varepsilon\varphi) - J_n(u_n)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \frac{|u_n + \varepsilon\varphi - 2u_{n-1} + u_{n-2}|^2 - |u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2}|^2}{2h^2}\, dx \\ &\quad + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega \left(|\nabla u_n + \varepsilon\nabla\varphi|^2 - |\nabla u_n|^2\right) dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \frac{(2u_n + \varepsilon\varphi - 4u_{n-1} + 2u_{n-2})\varphi}{2h^2}\, dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2} \int_\Omega \left(2\nabla u_n \nabla\varphi + \varepsilon|\nabla\varphi|^2\right) dx \\ &= \int_\Omega \frac{u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2}}{h^2} \varphi\, dx + \int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi\, dx. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Using the definition of $\bar{u}^h$ and u^h in (7.11), this can be rewritten as

$$\int_\Omega \left[\frac{u_t^h(t) - u_t^h(t-h)}{h}\varphi + \nabla\bar{u}^h(t)\nabla\varphi\right] dx = 0 \qquad \text{for a.e. } t \in (h,T) \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

We note that the above relation holds also when multiplied by any function $\tilde{\varphi} \in C([0,T])$. Hence, integrating over the time interval (h,T) and using a standard density argument, we arrive at

$$\int_h^T \int_\Omega \left[\frac{u_t^h(t) - u_t^h(t-h)}{h}\varphi + \nabla\bar{u}^h\nabla\varphi\right] dx\, dt = 0 \qquad \forall\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{7.13}$$

Now, we would like to take the time step to zero. To be able to do so, some estimate on the approximate solutions is needed. We state it in the following Lemma.

補題 7.6 *Suppose Ω is a bounded domain with smooth boundary. Let J_n, $n = 2,\dots,N$, be the functionals defined by (7.10) and let u_n be corresponding minimizers in $H_0^1(\Omega)$. Define functions $\bar{u}^h$ and u^h by (7.11) and assume $h \le 1$. Then the following estimate holds*

$$\|u_t^h(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\bar{u}^h(t)\|_{L^2(\Omega)} \le C_E \qquad \textit{for a.e. } t \in (0,T), \tag{7.14}$$

where constant C_E depends on H^1-norms of the initial data but is independent of h.

Proof. Estimate of such kind is usually derived by testing the equation by the time-derivative of solution.

Here it amounts to setting $\varphi := u_n - u_{n-1}$ in (7.12). This yields

$$\int_\Omega \frac{u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2}}{h^2}(u_n - u_{n-1})\,dx + \int_\Omega (\nabla u_n - \nabla u_{n-1})\nabla u_n\,dx = 0.$$

We employ the inequality

$$\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \le (a-b)a, \qquad \forall a,\, b \in \mathbb{R}, \tag{7.15}$$

to find that for each $n = 2, 3, \ldots, N$, the following holds:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big[\Big(\frac{u_n - u_{n-1}}{h}\Big)^2 - \Big(\frac{u_{n-1} - u_{n-2}}{h}\Big)^2 + |\nabla u_n|^2 - |\nabla u_{n-1}|^2\Big]\,dx \le 0\\
&\int_\Omega \Big[\Big(\frac{u_n - u_{n-1}}{h}\Big)^2 + |\nabla u_n|^2\Big]\,dx \le \int_\Omega \Big[\Big(\frac{u_{n-1} - u_{n-2}}{h}\Big)^2 + |\nabla u_{n-1}|^2\Big]\,dx.
\end{aligned}$$

These inequalities are summed from $n = 2$ to an arbitrary integer $k \le N$. Since the terms in between cancel, we obtain

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Big[\Big(\frac{u_k - u_{k-1}}{h}\Big)^2 + |\nabla u_k|^2\Big]\,dx &\le \int_\Omega \Big[\Big(\frac{u_1 - u_0}{h}\Big)^2 + |\nabla u_1|^2\Big]\,dx\\
&= \int_\Omega \big[(v_0)^2 + |\nabla u_0 + h\nabla v_0|^2\big]\,dx\\
&\le \int_\Omega \big[(v_0)^2 + 2|\nabla u_0|^2 + 2h^2|\nabla v_0|^2\big]\,dx\\
&\le 2\|u_0\|^2_{H^1(\Omega)} + 2\|v_0\|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

This is already the desired estimate (7.14), because

$$u_t^h(t) = \frac{u_k - u_{k-1}}{h} \qquad \text{for } t \in ((k-1)h, kh),\ \ k = 1, 2, \ldots, N.$$

□

Thanks to estimate (7.14), we can apply the theorem by Eberlein and Shmulyan to extract a subsequence $\{\nabla \bar{u}^{h_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ which converges weakly in $L^2(Q_T)$ to a function $\mathbf{v}$. From the sequence $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ obtained in this way, we can extract another subsequence $\{h_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ so that $\{u_t^{h_{k_l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$ converges weakly in $L^2(Q_T)$ to a function U. In the sequel, we often use this logic but we shall omit this lengthy explanation and subscripts and simply write

$$\nabla \bar{u}^h \rightharpoonup \mathbf{v} \qquad \text{in } (L^2(Q_T))^m, \tag{7.16}$$

$$u_t^h \rightharpoonup U \qquad \text{in } L^2(Q_T). \tag{7.17}$$

We should now show that there is a function $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ such that $\mathbf{v} = \nabla u$ and $U = u_t$ in $L^2(Q_T)$. To this end, a more detailed analysis is needed. First, we estimate the norm of the difference of the approximate functions $\bar u^h$ and u^h. Let $t \in ((n-1)h, nh)$. Then

$$\begin{aligned}
\|\bar u^h(t) - u^h(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega (\bar u^h - u^h)^2\,dx \\
&= \int_\Omega \Big(u_n - \frac{t-(n-1)h}{h}u_n - \frac{nh-t}{h}u_{n-1}\Big)^2\,dx \\
&= \int_\Omega \Big(\frac{nh-t}{h}\Big)^2 (u_n - u_{n-1})^2\,dx \\
&\le \int_\Omega (u_n - u_{n-1})^2\,dx = h^2 \int_\Omega (u^h_t)^2\,dx \\
&\le C_E^2 h^2.
\end{aligned}$$

This means that

$$\|\bar u^h(t) - u^h(t)\|_{L^2(\Omega)} \le Ch \qquad \text{for a.e. } t \in (0,T).$$

We have further

$$\begin{aligned}
\|u^h\|^2_{L^2(Q_T)} - \|\bar u^h\|^2_{L^2(Q_T)} &= \int_0^T \int_\Omega \big((u^h)^2 - (\bar u^h)^2\big)\,dx\,dt \\
&= \sum_{n=1}^N \int_{(n-1)h}^{nh} \int_\Omega \Big[\big(\frac{t-(n-1)h}{h}u_n - \frac{nh-t}{h}u_{n-1}\big)^2 - u_n^2\Big]\,dx\,dt \\
&= \sum_{n=1}^N \int_{(n-1)h}^{nh} \int_\Omega \Big[\frac{(t-(n-1)h)^2 - h^2}{h^2}u_n^2 \\
&\qquad + 2\frac{(t-(n-1)h)(nh-t)}{h^2}u_n u_{n-1} + \frac{(nh-t)^2}{h^2}u_{n-1}^2\Big]\,dx\,dt \\
&= \sum_{n=1}^N \int_\Omega \big[-\frac{2h}{3}u_n^2 + \frac{h}{3}u_n u_{n-1} + \frac{h}{3}u_{n-1}^2\big]\,dx \\
&\le \frac{h}{6}\sum_{n=1}^N \int_\Omega \big[-4u_n^2 + u_n^2 + u_{n-1}^2 + 2u_{n-1}^2\big]\,dx \\
&= \frac{h}{2}\sum_{n=1}^N \int_\Omega (-u_n^2 + u_{n-1}^2)\,dx = \frac{h}{2}\int_\Omega (u_0^2 - u_N^2)\,dx \\
&\le \frac{h}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

In the same way we get also

$$\|\nabla u^h\|^2_{L^2(Q_T)} - \|\nabla \bar u^h\|^2_{L^2(Q_T)} \le \frac{h}{2}\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Finally, from Poincaré's inequality we know that there is a universal constant C_P so that

$$\|u^h\|_{L^2(Q_T)} \le C_P \|\nabla u^h\|_{L^2(Q_T)} \qquad \text{for all } h \in (0,1). \tag{7.18}$$

We summarize the results for future use. We remark that the results of the following Lemma rely only on the interpolation (7.11) and are independent of the problem under consideration, a fact frequently used later on.

補題 7.7 *Let $\bar{u}^h$ and u^h be defined by (7.11). Then the following relations hold.*

$$\|\bar{u}^h(t) - u^h(t)\|_{L^2(\Omega)} \le h\|u_t^h(t)\|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{for a.e. } t \in (0,T), \tag{7.19}$$

$$\|u^h\|^2_{L^2(Q_T)} \le \|\bar{u}^h\|^2_{L^2(Q_T)} + \frac{h}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{7.20}$$

$$\|\nabla u^h\|^2_{L^2(Q_T)} \le \|\nabla\bar{u}^h\|^2_{L^2(Q_T)} + \frac{h}{2}\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{7.21}$$

Now, (7.14), (7.21) and (7.18) imply that u^h is uniformly bounded in $H^1(Q_T)$. Therefore, there is a weakly convergent subsequence in $H^1(Q_T)$ and, by Rellich theorem, a strongly converging subsequence in $L^2(Q_T)$ (we always mean "subsequence of the last obtained sequence"). Let us denote the cluster function as u:

$$u^h \rightharpoonup u \qquad \text{weakly in } H^1(Q_T). \tag{7.22}$$

Because of (7.17), $U = u_t$ holds almost everywhere. Moreover, from (7.16) for any $\varphi \in C_0^\infty(Q_T)$

$$\int_0^T\int_\Omega \Big(\frac{\partial\bar{u}^h}{\partial x_i} - \frac{\partial u^h}{\partial x_i}\Big)\varphi\,dx\,dt \to \int_0^T\int_\Omega \Big(\mathbf{v}_i - \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)\varphi\,dx\,dt \qquad \text{as } h \to 0+,$$

while at the same time

$$\int_0^T\int_\Omega \Big(\frac{\partial\bar{u}^h}{\partial x_i} - \frac{\partial u^h}{\partial x_i}\Big)\varphi\,dx\,dt = -\int_0^T\int_\Omega (\bar{u}^h - u^h)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx\,dt \to 0 \qquad \text{as } h \to 0+$$

by (7.19). This means that $\mathbf{v} = \nabla u$ almost everywhere in Q_T.

We have shown in this way that there is a function $u \in H^1(Q_T)$, such that

$$\nabla\bar{u}^h \rightharpoonup \nabla u \qquad \text{in } (L^2(Q_T))^m, \tag{7.23}$$

$$u_t^h \rightharpoonup u_t \qquad \text{in } L^2(Q_T). \tag{7.24}$$

Now, we can pass to limit in (7.13) as $h \to 0+$. We shall, for the time being, consider a test function φ belonging to $C_0^\infty([0,T)\times\Omega)$. To begin with, we have

$$\begin{aligned}\int_h^T\int_\Omega \nabla\bar{u}^h\nabla\varphi\,dx\,dt &= \int_0^T\int_\Omega \nabla\bar{u}^h\nabla\varphi\,dx\,dt - \int_0^h\int_\Omega \nabla\bar{u}^h\nabla\varphi\,dx\,dt \\ &\to \int_0^T\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\,dx\,dt \qquad \text{as } h \to 0+,\end{aligned} \tag{7.25}$$

because of the boundedness (7.14) of $\nabla\bar{u}^h$:

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^h\int_\Omega \nabla\bar{u}^h\nabla\varphi\,dx\,dt\Big| &\le \int_0^h\Big(\int_\Omega|\nabla\bar{u}^h|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega|\nabla\varphi|^2\,dx\Big)^{1/2}dt \\ &\le \int_0^h \sqrt{C_E}\,C\,dt = Ch \to 0 \qquad \text{as } h \to 0+\,.\end{aligned}$$

Moreover, we have

$$
\begin{aligned}
&\int_h^T \int_\Omega \frac{u_t^h(t) - u_t^h(t-h)}{h} \varphi \, dx \, dt \\
&\qquad = \int_h^T \int_\Omega \frac{u_t^h(t)}{h} \varphi(t) \, dx \, dt - \int_0^{T-h} \int_\Omega \frac{u_t^h(t)}{h} \varphi(t+h) \, dx \, dt \\
&\qquad = \int_0^T \int_\Omega u_t^h(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(t+h)}{h} \, dx \, dt - \int_0^h \int_\Omega \frac{u_t^h(t)}{h} \varphi(t) \, dx \, dt \\
&\qquad\quad + \int_{T-h}^T \int_\Omega \frac{u_t^h(t)}{h} \varphi(t+h) \, dx \, dt \qquad (7.26) \\
&\quad \to - \int_0^T \int_\Omega u_t \varphi_t \, dx \, dt - \int_\Omega v_0 \varphi(0) \, dx \qquad \text{as } h \to 0+ .
\end{aligned}
$$

The convergence is deduced from the following facts: (i) in the first term of (7.26), u_t^h converges weakly and $(\varphi(t) - \varphi(t+h))/h$ converges strongly in $L^2(Q_T)$; (ii) in the second term, $u_t^h = (u_1 - u_0)/h = v_0$ for $t \in (0, h)$; (iii) in the third term, $\varphi(t+h) = 0$ for $t \in (T-h, T)$. Thus, we can finally state that

$$
\int_0^T \int_\Omega (-u_t \varphi_t + \nabla u \nabla \varphi) \, dx \, dt - \int_\Omega v_0 \varphi(0, x) \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty([0, T) \times \Omega). \tag{7.27}
$$

Noting that the space of functions from $H^1(Q_T)$ with zero trace on $(\{0\} \times \Omega) \cup ([0, T] \times \partial\Omega)$ is a closed linear subspace of $H^1(Q_T)$ and, therefore, weakly closed by Mazur's theorem, we conclude by (7.22) that u belongs to this space. Consequently, u satisfies boundary condition (7.7) and initial condition (7.8) in the sense of traces. We remark that the convergence of traces follows also from the compactness of the trace operator $T : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$. Moreover, it follows that u, as a function from $H^1(0, T; L^2(\Omega))$, belongs to $C([0, T]; L^2(\Omega))$. Thus, the initial condition (7.8) is satisfied even in the strong sense.

To summarize, we have proved by the discrete Morse flow method that there exists a weak solution $u \in H^1(Q_T)$ to problem (7.6) – (7.9) in the sense of (7.27), satisfying boundary and initial conditions (7.7), (7.8) in the sense of traces.

References

[1] 岡崎 誠，べんりな変分原理，共立出版，1993.

[2] L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Birkhäuser, 2008.

[3] B. Benešová, M. Kružík, *Weak lower semicontinuity of integral functionals and applications*, SIAM Review, Vol. 59, No. 4, pp. 703-766, 2017.

[4] H.W. Alt, L.A. Caffarelli, *Existence and regularity for a minimum problem with free boundary*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 1981, Issue 325, pp. 105-144, 1981(DOI:

https://doi.org/10.1515/crll.1981.325.105).

[5] Francis Clarke, *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*, Springer, 2013.

[6] M.G. Crandall, T.M. Liggett, *Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces*, Amer. J. Math. 93, pp. 265-298, 1971.

[7] R. Cristoferi, *Calculus of Variations, lecture notes*, 2016
(URL: https://www.math.cmu.edu/cna/Publications/publications2016/papers/16-CNA-007.pdf)

[8] Bernard Dacorogna, *Introduction to the Calculus of Variations*, Imperial College Press, 2015.

[9] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, AMS, Providence, Rhode Island, 1998.

[10] Mark Kot, *A First Course in the Calculus of Variations*, American Mathematical Society, 2014.

[11] J.H. Shapiro, http://joelshapiro.org/Pubvit/Downloads/rulla_crandlig.pdf

[12] Frederic Wan, *Introduction to the Calculus of Variations and its Applications*, Second Edition, CRC Press, 1995.