偏微分方程式：講義ノート

Karel Švadlenka
2015 年

1 偏微分方程式の位置づけ

概要
この講義ではまず，弦の振動のモデルである波動方程式という偏微分方程式を導出し，偏微分方程式がどのように自然現象のモデルとして現れるかを実感する．次に，どのような方程式のタイプがあるかを把握するために，偏微分方程式の基本的な分類のしかたを学ぶ．最後に，偏微分方程式と対応する物理現象の例をいくつか見て楽しむ．

1.1 偏微分方程式とは

偏微分方程式（partial differential equation）は 2 つ以上の変数の未知関数とその偏微分（partial derivative）を含む方程式のことである．k-階の偏微分方程式は一般的に次のように書ける：

$$f(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, \qquad x \in \Omega \tag{1.1}$$

ここで，$k \geq 1$ は自然数，Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合，$x = (x_1, \dots, x_n)$ は独立変数，$f : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ は与えられた関数，$u : \Omega \to \mathbb{R}$ は未知関数である．また，D^k という記号は次に説明する多重指数を用いたものである．

記号

- x_i-軸方向の単位ベクトル e_i に対して極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}$$

が存在すれば，それを x における u の x_i についての偏微分と呼ぶ．この偏微分は，次の記号が使われることが多い：

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = u_{x_i}(x) = \partial_{x_i} u(x).$$

- 同様にして高階偏微分を定義する：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = u_{x_i x_j} = \partial_{x_i}\partial_{x_j} u(x).$$

- 多重指数について ([10], p.54，問題1.1も参照)
  - 成分 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ が非負の整数であるようなベクトル $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ を多重指数（multiindex）とよぶ．そのオーダー $|\alpha|$ は次で定義される：

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

  - さらに，次の記号を導入する：

$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \dots \alpha_n!, \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

  - 与えられた多重指数 α に対し次の記号を導入する：

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

– 自然数 k に対し集合

$$D^k u(x) = \{D^\alpha u(x);\ |\alpha| = k\}$$

を導入し，それらの元をある順番で並べたベクトルの大きさを次で与える：

$$|D^k u(x)| = \Big(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u(x)|^2 \Big)^{1/2}.$$

注 上の関数 f と未知関数 u をベクトル値関数とすれば，連立偏微分方程式の定義式が得られる．

解が集合 Ω の境界上などで満たす条件を追加して偏微分方程式を解くことが多い．そのとき，方程式と条件をまとめて「偏微分方程式に対する問題」（例えば，境界値問題など）と言い，f, Ω や境界条件に現れる関数のことを問題のデータとよぶ．

応用で現れる偏微分方程式の解が簡単で閉じた形で求まることは非常に稀である．解の値が実際に必要になった場合，数値計算で近似的に解く．そのため，数学的な立場として，方程式が well-posed であるかどうかを調べることに集中する．偏微分方程式の問題は well-posed であるとは，

a) 問題の解が存在する，

b) 解は一意である，

c) 解は問題のデータに連続的に依存する，

ということである．最後の性質 c) は，現象を表すデータが少しだけ変化すれば解も少ししか変化しないことを意味し，物理的な応用で特に重要である．数学者が「偏微分方程式を解く」と言うと，「上の三つの性質を示す」を指していることが多い．

> 偏微分方程式を解くことに関するより詳しい解説は [7], p.7 を参照.

例 $\mathbb{R}^2$ において次の偏微分方程式を考える（[8], p. 32）．

1. $u_{x_1} = 0$　この一般解は，任意の関数 g に対し $u(x_1, x_2) = g(x_2)$ と書ける．よって，この方程式は x_1 の関数としての解の振る舞いを完全に指定している（すなわち，x_1 について定数である）が，x_2 についての依存性に関しては何の情報も与えていない．

2. $u_{x_1 x_2} = 0$　f と g を任意の微分可能な関数とすると，この解は $u(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2)$ と書ける．よって，解の x_1 と x_2 についての依存性が分離されていること以外に方程式は何も教えてくれない（つまり，x_1 と x_2 をどちらか固定したときにもう片方に解がどのように依存するかは任意である）．

3. $u_{x_1} + i u_{x_2} = 0$　この Cauchy-Riemann の方程式の解は複素変数 $z = x_1 + i x_2$ の holomorphic な関数である．とくに，解は C^∞-関数であり，方程式は解の微分可能性に関して非常に強い制限を示している．

1.2 波動方程式の導出

本節の動機は「両端を固定した弦を弾いたときにどのように振動するかを知りたい」ということである．そのために，弦の位置が（近似的に）満た波動方程式という偏微分方程式を以下の**仮定**のもとで導出する．

> [2], p.2; [6], p.54; [5], p.281; [1], p.1 でも導出がなされている．

1. 弦の運動はある平面に限られる（以下，それを $x - u$ 平面とする）．

2. 弦の各部分は x 軸と垂直な方向にのみ動く（横波）.

3. 弦は一様な線密度 ρ を持つ.

4. 弦の張力 T は運動の間一定で，弦の接線方向に働く.

5. 弦と x 軸とが成す角度 θ は微小である.

弦が区間 $[a,b]$ に張られているとする．従って，次の設定である：

独立変数 (independent variables) ： 時刻 $t>0$, 1 次元の位置座標 $x\in[a,b]$
未知関数 (unknown function) ： 弦上の点 x の時刻 t での垂直方向の変位 $u(t,x)$

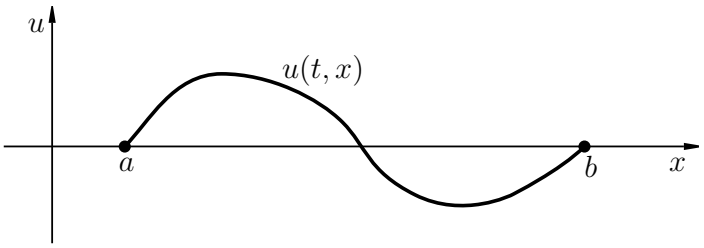


Figure 1: 弦の振動モデルの設定

区間 $[x,x+\Delta x]$ に存在する弦の微小部分の運動に対し **Newton の第二法則** $F=ma$ を適用する．このとき，微小部分の質量は $m=\rho\Delta x$ となり，その加速度は $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x+\Delta x/2)$ と近似する．また，部分に働く外力 F は，左右両端における張力の垂直方向の成分の合計である（図 2）：

$$F=T\sin\big(\theta(t,x+\Delta x)\big)-T\sin\big(\theta(t,x)\big)$$

u の x についての偏微分は弦の傾斜を与えるので，

$$\tan\theta(t,x)=u_x(t,x),\qquad \tan\theta(t,x+\Delta x)=u_x(t,x+\Delta x). \tag{1.2}$$

これで，角度 θ と関数 u の非線形な関係が得られたが，ここで，簡単な線形な関係にするために 5. の仮定を用いて，

$$\sin\theta\approx\theta\approx\tan\theta=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.3}$$

と近似する（演習問題1.2）.

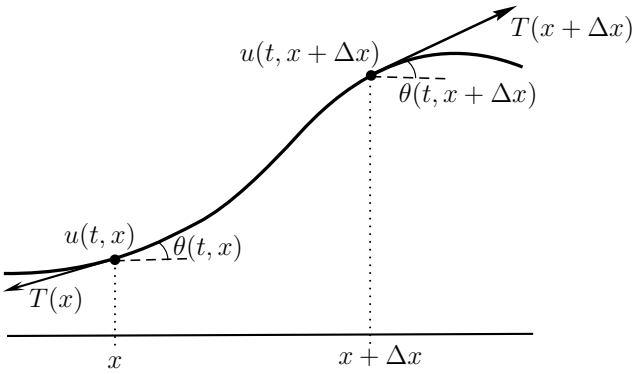


Figure 2: 弦の微小部分に働く張力

従って，

$$F = T\frac{\partial u}{\partial x}(t, x+\Delta x) - T\frac{\partial u}{\partial x}(t, x).$$

以上により，微小部分に対する Newton の運動方程式は

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x+\tfrac{\Delta x}{2}) = T\frac{\partial u}{\partial x}(t, x+\Delta x) - T\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$$

となる．この両辺を Δx で割り，$\Delta x \to 0$ とすれば，

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$$

という偏微分方程式が得られた．波速を表す定数 $c = \sqrt{T/\rho}$ を導入すると，上式は

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{または} \qquad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{1.4}$$

の形に書かれ，**空間 1 次元の波動方程式** (wave equation) と呼ばれる．

以下では，導出した波動方程式についていくつかコメントをする．

外力 (outer force)　上で考えた弦に重力が作用するとすれば，弦の微小部分に働く力 F に $-g\rho\Delta x$ が加わる．より一般に，時刻 t において弦上の点 x で弦に垂直な方向に単位質量当り $f(t,x)$ の力が働くとき，$f(t,x)\rho\Delta x$ が加わり，得られる偏微分方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

となる．

抵抗 (resistance)　弦が空気からの抵抗を受けることを考えるとき，最も基本的な抵抗のモデルは速度に比例するものである．速度抵抗を取り入れた方程式は次のようになる：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k\frac{\partial u}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

条件について　導かれた方程式はこのままだと，無限に多くの解を持つ．実際に弦の運動状態を決定するには，方程式に種々の条件を付加する必要がある．

初期条件 (initial conditions)　初期時刻 $t = 0$ における弦の形と速度を指定する．

$$\begin{aligned} u(0,x) &= u_0(x) \qquad \text{弦の初期位置} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= u_1(x) \qquad \text{弦の初期速度} \end{aligned}$$

方程式に未知関数の 2 階微分が出てくるから，解を求めるには積分を 2 回することになり，積分定数を決定するには二つに初期条件が必要であることに注意しよう．

境界条件 (boundary conditions)　境界における弦の挙動を指定する．基本的な境界条件は 2 種類ある．

- ディリクレ (Dirichlet) 境界条件（境界における解の値を指定する）

$$u(t,a) = v_a(t), \qquad u(t,b) = v_b(t)$$

例 弦を両端でゼロの高さで固定した状況を表す境界条件は

$$u(t,a) = u(t,b) = 0.$$

- ノイマン (Neumann) 境界条件（境界における解の法線微分の値を指定する）

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,a) = w_a(t), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t,b) = w_b(t)$$

例 弦の両端に輪をつなぎ，それを平行に置いた棒に通しておくと，(摩擦を無視すれば) 弦は上下に自由に動ける．この状態を表す境界条件は

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,a) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,b) = 0.$$

注 導出を簡単にするために多くの仮定をおいて得られた方程式なので，この「モデル」が現象を十分に表現できているかを数学的に・物理的に確認しておく必要がある．

このようにして，偏微分方程式は自然現象の近似的なモデルとして現れ，数学解析または数値解析の対象となる偏微分方程式のほとんどが物理などの分野と密接な関係にある．

現象のただの近似でありながら，モデルの導出過程で現象の重要な要素をうまく抽出できれば，得られたモデル方程式は現象を忠実に表現し，実験や物理的考察ではわからないようなことまで教えてくれることもある．例えば，ブラックホールの衝突のような現象では実験が無理で，現象の複雑さのため物理の法則に基づいた基礎理論的な考察も難しいので，偏微分方程式モデルが欠かせない．または，津波が海岸に押し寄せる現象も実験が難しく，偏微分方程式のモデルとその数値計算が警報システムの開発に大いに役立てる．生物学の例として，シマウマの模様が遺伝子の大量の情報により決定されていると思われがちだが，偏微分方程式のモデルに基づいた解析によれば実は非常に少ない遺伝子情報が科学的反応と組み合わさって作られるものであることが明らかになりつつある．

波動方程式は弦の振動だけではなく，2 次元では膜の振動（[2], p. 28），3 次元では弾性体の変形のモデルとしても使われ，量子物理や相対性理論にも登場する方程式である．また，バネの振動である縦波や音波，光波，地震波，そして水面に現れる波も波動方程式で記述できる．

弾性体の方程式の場合も，$u(t,x)$ は時刻 $t \geq 0$ と $x \in \mathbb{R}^3$ における物体のある方向での変位を表す．その導出は同様に行われるが，上の導出のおさらいと多次元における考え方の確認のため，簡単に述べておく（[7], p.66; [2], p.56）．

滑らかな領域 Ω を任意に選ぶ．この領域における加速度は

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega u\,dx = \int_\Omega u_{tt}\,dx$$

である．また，密度を簡単のために 1 として，この領域 Ω に境界を通して働く力を $\boldsymbol{F}$ とすると，領域に働く圧力の合計は

$$-\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS$$

と書ける．ただし，$\boldsymbol{\nu}$ は $\partial\Omega$ への外向き単位法線ベクトルである．Newton の第 2 法則

$$\int_\Omega u_{tt}\,dx = -\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS$$

において右辺の積分にガウスの発散定理を適用すると，

$$\int_\Omega u_{tt}\,dx = -\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F}\,dx$$

を得る．この関係式は任意の領域 Ω で成り立つので，

$$u_{tt} = -\operatorname{div} \boldsymbol{F} \qquad \text{pointwise in } \Omega.$$

弾性体の場合，$\boldsymbol{F}$ は変位の勾配 ∇u の関数で，この勾配が小さいとき，線形な関係 $\boldsymbol{F}(\nabla u) = -a\nabla u$ で近似できることが多い．これを上の方程式に代入すると，

$$u_{tt} = a\Delta u,$$

波動方程式が得られる．ただし，ここではラプラス作用素（ラプラシアン）(Laplace operator, Laplacian) は次のように定義される：

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}.$$

1.3 偏微分方程式の分類

偏微分方程式は様々な基準により分類される．

1.3.1 階数による分類

偏微分方程式に現れる未知関数の最高階微分が k のとき，「k 階の偏微分方程式」（equation of k-th order）であるという（(1.1) を参照）．

1.3.2 非線形性の程度による分類

- 与えられた関数 a_α と g に対し，方程式が

  $$\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = g(x)$$

  の形で書けるとき，「線形」（linear）であるという．また，線形な方程式において $g(x) \equiv 0$ のとき，「同次方程式」（homogeneous equation）であるという．

- 方程式が

  $$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0$$

  の形で書けるとき，「半線形」（semilinear）であるという．つまり，最高階の微分についてのみ線形である．

- 方程式が

  $$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0$$

  の形で書けるとき，「準線形」（quasilinear）であるという．つまり，最高階微分の係数は未知関数のそれより低い微分にのみ依存する．

- 方程式 (1.1) を与える関数 f が未知関数の最高階微分の非線形な関数のとき，方程式は「非線形」（fully nonlinear）であるという．

一般の偏微分方程式 (1.1) の左辺（未知関数 u を含む項）を $L[u]$ という記号で表し，L のことを**微分作用素**（differential operator）とよぶ．線形な微分方程式に対する作用素 L は，

$$L[u] = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x)$$

となるが，つぎの解に対する**重ね合わせの原理**（superposition principle）が成り立つことは明らかである．

定理 1.1 $u_1, \dots, u_m$ が線形な同次方程式 $L[u] = 0$ の解であれば，その任意の線形結合も解である．

なお，k-階の線形常微分方程式の場合，k 個の独立な基本解を求めれば，解がその線形結合として決定されるが，偏微分方程式の場合は一般には無限個の基本解を見つけなければならない．

1.3.3 数学的な振る舞いによる分類

ここでは定数係数をもつ 2 変数 x, y の関数 u に対する線形な 2 階偏微分方程式

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g(x, y) \tag{1.5}$$

のときの分類を簡単に紹介する．

> その詳細とより一般的な方程式への拡張については [9], p.57 を参照できる（ [3], p.160 と [5], p.31 もこの内容に関係している）．

この分類の基本は，変数変換を行えば上の方程式が 4 つある形のどれかに変形できるという事実である．具体的には，

$$\xi = \alpha x + \beta y, \qquad \eta = \gamma x + \delta y$$

という線形な変換を施すと，(1.5) の方程式は

$$Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + \cdots = 0$$

という形に変換される．1 階微分以下の項はこの解析にとって重要でないので，$\cdots$ で省略することにする．A, B, C の係数は

$$\begin{aligned} A &= a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2, \\ B &= a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\beta\delta, \\ C &= a\gamma^2 + 2b\gamma\delta + c\delta^2, \end{aligned}$$

となり，$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ に依るが，

$$B^2 - AC = (b^2 - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

が成り立つため，$b^2 - ac$ という量の符号が変換に対して不変であることがわかる．ここで，$\alpha\delta - \beta\gamma$ は変換のヤコビアンである．

方程式 (1.5) を簡単な形に変換したいので，A, B, C の係数を 0 にすることを考える．上の A, B, C の定義式より，A, C が消えるのは

$$a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2b\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + c = 0, \qquad a\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2 + 2b\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) + c = 0 \tag{1.6}$$

のときであることがわかる．この 2 次方程式の根は

$$\frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

であるので，$b^2 - ac$ の正負によって，ゼロにできる係数の数が変わってくる．

1. 双曲型方程式（hyperbolic equation）：$b^2 - ac > 0$ のとき
   このとき，(1.6) の異なる根が二つあり，A と C と両方を消すことができ，
   $$u_{\xi\eta} + \cdots = 0$$
   の方程式を得る．この方程式は次の形に書けることが知られている：
   $$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \cdots = 0.$$
   双曲型方程式の代表例は波動方程式 $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ である．
2. 楕円型方程式（elliptic equation）：$b^2 - ac < 0$ のとき
   このとき，(1.6) の根が実数では存在しないが，$A = C, B = 0$ となるように $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を選ぶことができる．すると，
   $$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \cdots = 0$$
   の方程式を得る．楕円型方程式の代表例はラプラス方程式 $u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = 0$ である．
3. 放物型方程式（parabolic equation）：$b^2 - ac = 0$（それから，$2cd \neq be$ or $2ae \neq bd$）のとき
   このとき，(1.6) の根が一つしかないので，C のみを消すことにする．しかし，$B^2 - AC = 0$ が成り立つから，$C = 0$ とすれば自動的に $B = 0$ となり，
   $$u_{\xi\xi} + \tilde{e} u_\eta + \cdots = 0$$
   の方程式を得る．放物型方程式の代表例は熱方程式 $u_t - k u_{xx} = 0$ である．
4. 退化型方程式（degenerate equation）：$b^2 - ac = 0$（それから $2cd = be, 2ae = bd$）のとき
   このとき，楕円型方程式と同様に $C = B = 0$ とできるが，係数 $a, \ldots, e$ が上記の条件を満たすと，η についての微分を含む項がすべて消え，
   $$u_{\xi\xi} + cu = G(\xi, \eta)$$
   の方程式を得る．

それぞれの場合に係数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を決めて，変換した方程式が簡単な形になるようにしたが，そのときの $\xi(x, y)$ もしくは $\eta(x, y)$ の等高線のことを**特性曲線**（characteristics）とよぶ．上で考えた定数係数の方程式の場合は直線であるが，係数 $a, \ldots, e$ が x, y の関数のときは一般に曲線になる．そのとき，方程式の分類を考える点 (x, y) によって方程式のタイプが異なる場合もある．この特性曲線に沿って特異性などの情報が伝播すること，そして（$\xi = c, \eta = c$ (c 定数) という特性曲線をもつ上の $u_{\xi\eta} = 0$ の方程式を考えればわかるように）2 階微分の情報が消失することや解の挙動がより簡単に解析できるなどの意味で，特性曲線は非常に重要な概念である．

特性曲線の観点からそれぞれの方程式のタイプの数学的な振る舞いについて直感的な（つまり，正確でない）説明をしておく（[4], p.95; 以下の図3を参照）．

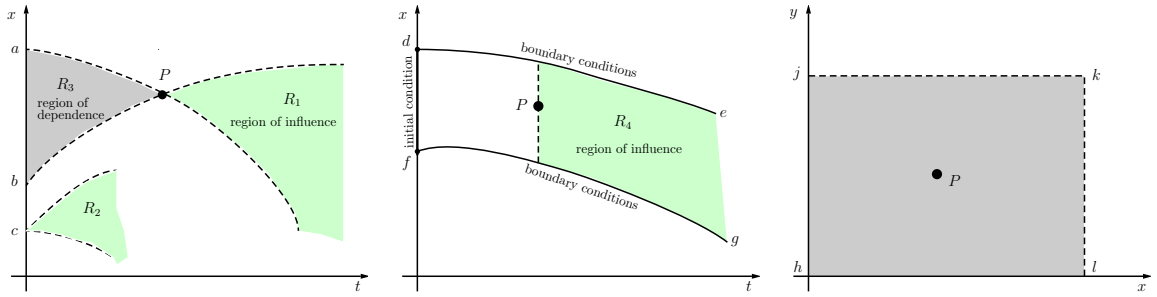


Figure 3: 方程式のタイプによって異なる数学的な特徴（双曲型・放物型・楕円型）

- 方程式が点 $P = (x, y)$ において 双曲型 である場合，点 P を二つの特性曲線が通る．このとき，点 P における値はこの 2 本の特性曲線の間にある領域のみの値に影響を与える．つまり，点 P で摂動を加えると，その影響は図3（左）の領域 R_1 でしか感知されない．

  双曲型方程式が時間発展を記述することが多いので，図では横軸を時刻 t とした．特性曲線を t 軸を遡る方向に延長すると，x-軸と 2 点 a, b で交わる．すると，点 P での値を決定するのは初期時刻 $t = 0$ での区間 $[a, b]$ の値のみである．点 P における値が影響される領域は図の依存領域 R_3 である．点 c の影響領域は点 $(0, c)$ を通る 2 本の特性曲線の間にある領域 R_2 で，この領域は点 P を含まないから，点 c と点 P は無関係である．

  よって，方程式を数値計算などで解くときは初期時刻 $t = 0$ で与えられる初期データから始めて，時刻を進めることで解くことができる．

- 方程式が点 $P = (x, y)$ において 放物型 である場合，点 P を通る特性曲線は一つだけである．もう一つの特性方向は垂直な直線に相当する．

  ここでも，時間発展問題が多いので，図3（中央）では横軸を時刻 t，縦軸を空間位置 x とした．初期条件が線分 df で与えられ，境界条件が線分 de と fg で与えられたとしよう．放物型方程式の場合，点 P での値は点 P を通る垂直な線より右側にある領域 R_4 全体に影響を及ぼす．

  従って，放物型の場合でも $t = 0$ における初期条件から出発して時刻を進めることにより数値計算を行うことができる．

- 方程式が点 $P = (x, y)$ において 楕円型 である場合，特性曲線が存在せず，影響領域または依存領域の概念もない．問題の領域は図3（右）のような長方形 $hjkl$ であるとしよう（これは上の二つの場合の時間方向に開かれた領域と対照的である）．点 P において加えた摂動は領域全体での値に影響し，逆に点 P での値は長方形 $hjkl$ の境界のすべての点でのデータに依存する．

  そのため，双曲・放物型方程式とは対照的に，数値計算を領域のすべての点で同時に行う必要がある．

1.4 偏微分方程式の例

- 移流方程式（convection/advection/transport equation）

$$u_t + cu_x = 0$$

  線形な 1 階の双曲型方程式で，流れなどによる物質の移流を表す．

- ラプラス方程式（Laplace equation）

$$\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots + u_{x_nx_n} = 0$$

線形な 2 階の楕円型方程式である．渦なしの非圧縮の流れ，重力場，静電場や平衡状態の温度分布を記述する．

- 波動方程式（wave equation）

$$u_{tt} = c^2 \Delta u$$

線形な 2 階の双曲型方程式である（1.2節を参照）．

- マクスウェルの方程式（Maxwell's equations）

$$\begin{aligned} \varepsilon \boldsymbol{E}_t &= \text{curl}\, \boldsymbol{H} \\ \mu \boldsymbol{H}_t &= -\text{curl}\, \boldsymbol{E} \\ \text{div}\, \boldsymbol{E} &= \text{div}\, \boldsymbol{H} = 0 \end{aligned}$$

電磁気学の基本的なモデルで，電場 $\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3)$ と磁場 $\boldsymbol{H} = (H_1, H_2, H_3)$ ベクトルに対する，線形な 1 階連立方程式である．電場と磁場の各成分は波動方程式を満たす（$c^2 = 1/(\varepsilon\mu)$）．

- 弾性体方程式（equations of elasticity）

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\text{div}\, u) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

線形な 2 階の双曲型連立偏微分方程式である．平衡状態では（つまり，$u_t = 0$ のとき），重調和方程式（biharmonic equation）$\Delta^2 u = 0$ が得られる．

- 熱方程式（heat equation）

$$u_t = k \Delta u$$

線形な 2 階の放物型方程式である．物体のなかの熱伝導を記述する．

- シュレーディンガー方程式（Schrödinger equation）

$$i\hbar \psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi$$

量子力学の基本方程式である．線形な 2 階方程式であるが，係数に虚数単位が出てくるため，熱方程式の拡散の性質に加えて波動方程式の側面も持つ．

- 極小局面の方程式（minimal surface equation）

$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0$$

準線形な 2 階の楕円型方程式である．境界の位置を指定したときの最小の面積をもつ曲面を与える．

- ナビエ-ストークス方程式（Navier-Stokes equations）

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \gamma \Delta u_i \qquad (i = 1, 2, 3) \\ \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned}$$

半線形な 2 階の連立方程式で，運動する流体の速度 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ と圧力 p を与える．

- KdV 方程式（Korteweg - de Vries equation）

$$u_t + cuu_x + u_{xxx} = 0$$

半線形な 3 階の方程式で，水波の研究で利用される．

- バーガース方程式（Burgers equation）

$$u_t + uu_x = 0$$

準線形な 1 階の方程式で，交通のモデルや気体運動の研究などで登場する．

- アイコナール方程式（eikonal equation）

$$u_x^2 + u_y^2 = 1$$

非線形な 1 階の方程式で，光学の分野で使われる．

> 参考書 [7], p. 3; [6], p. 601 ではより多くの偏微分方程式の例が紹介されている．

1.5 演習問題

問題 1.1 多重指数の練習として，次の関係式を示せ．([10], p.55; [11], p.16)

(1) 二項定理　$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} x^\beta y^\gamma$

(2) 多項定理　$(x_1 + \cdots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha,\ \ m \in \mathbb{N}$

(3) $\frac{1}{1-(x_1+\cdots+x_n)} = \sum_\alpha \frac{|\alpha|! x^\alpha}{\alpha!}$

(4) m-次多項式 $f(x)$ のテーラー展開　$f(x) = \sum_{|\alpha|\le m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0)\, x^\alpha$

(5) $\alpha! \le |\alpha|! \le n^{|\alpha|}\alpha!$

(6) Leibnitz の公式　$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} (D^\beta f)(D^\gamma g)$

問題 1.2 テーラー展開を用いて (1.3) の近似が正しいことを確認せよ．また，この近似の誤差を評価せよ．

問題 1.3 任意の偏微分 D^α が線形作用素であることを示せ．それを用いて，定理1.1を証明せよ．

問題 1.4 つぎの偏微分方程式の一般解を求めよ．ただし，$u(x_1, x_2)$ は 2 変数関数である．

(1) $u_{x_1} + 2u = x_2$

(2) $u_{x_2x_2} + u = 0$

(3) $u^2 u_{x_1} = x_1$

問題 1.5 波動方程式を導出するときの仮定を以下のように緩めたときに得られる 1 次元のより一般的な波動方程式を求めよ（ここでは，(1) と (2) を別々に考え，それぞれに対し方程式を導く）．

(1) 密度 ρ と張力 T は定数ではなく，位置に依存することを許す（つまり，$\rho(x), T(x)$ は x の関数である）．

(2) 近似 (1.3) を使用せず，非線形な sin と tan の関係をそのまま用いる．

問題 1.6 重力の影響を受ける弦を考える．弦の両端を同じ高さで固定し，その線密度を ρ，張力を T，長さを L とする．平衡状態にある（すなわち，振動しない）ときの弦の形状を求めよ．モデルとして通常の波動方程式 (1.4) と問題1.5(2) で導出した方程式を用いて，それぞれのモデルによる結果を比べよ．

問題 1.7 次の関数が（係数 c をうまく選べば）波動方程式 $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ の解になることを示せ．

(1) $u(t,x) = t^2 + x^2$

(2) $u(t,x) = \sin(at)\cos(bx)$, $a, b \in \mathbb{R}$

(3) $u(t,x) = \log(t+x) + (t-x)^2$

(4) $u(t,x) = f(x+2t) + g(x-2t)$, $f, g \in C^2(\mathbb{R})$

References

[1] 井川満: 偏微分方程式論入門, 裳華房, 2005.

[2] 金子晃: 偏微分方程式入門, 東大出版会, 1998.

[3] 熊ノ郷準: 偏微分方程式, 共立出版, 1978.

[4] J.D. Anderson, Jr.: Computational fluid dynamics, McGraw-Hill, 1995.

[5] D.D. Bleecker: Basic Partial Differential Equations, International Press, 2003.

[6] M.P. Coleman: An Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB, CRC Press, 2013.

[7] L. C. Evans: Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.

[8] G. B. Folland: Introduction to Partial Differential Equations, Princeton University Press, 1995.

[9] P.R. Garabedian: Partial Differential Equations, AMS Chelsea Publishing, 2007.

[10] F. John: Partial Differential Equations, Springer, 1982.

[11] J. Rauch: Partial Differential Equations, Springer, 1997.

2 常微分方程式の基礎理論の復習

概要
この講義では常微分方程式の基礎的な知識を確認する．常微分方程式の求積法の「レシピ」を紹介してから，力学系の概要を述べる．最後に，解の存在と一意性，そして解の性質について知られている基本的な事実を整理する．

2.1 常微分方程式の求積法

以下は，次のタイプの常微分方程式の解き方（求積法）を紹介する：

- 変数分離形
- 同次形
- 1 階線形
- 2 階線形（定数係数）
- 定数係数線形微分方程式系

それ以外の方程式の解法については [5], [1], [3], [6] などを参考にできる．この講義ノートは主に [5] をもとに作成されている．

2.1.1 変数分離形

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{2.1}$$

の形の方程式を変数分離形（equation with separated variables）といい，次のように解く（[5], p. 23）．

$g(y) \neq 0$ のとき，(2.1) は

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x)$$

と同値である．関数 $1/g$ の原始関数を $G(y) = \int 1/g(y)\,dy$ とおくと，

$$\frac{dG(y(x))}{dx} = f(x)$$

の形に書きかえられる．これを積分すれば，

$$G(y(x)) = \int f(x)\,dx + C$$

という y に対する関係式が得られる．
最後に，$g(y) \neq 0$ と仮定したことによりのぞかれた解がないか調べる．

例 バクテリアの増殖などを表すロジスティック方程式を解く．

$$\frac{dy}{dx} = (a - by)y \tag{2.2}$$

$y \neq a/b$ と $y \neq 0$ のとき，以下の式は同値である．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(a-by)y}\frac{dy}{dx} &= 1 \\
\frac{1}{a}\left(\frac{1}{y} - \frac{b}{by-a}\right)\frac{dy}{dx} &= 1 \\
\frac{1}{a}\Big(\int \frac{1}{y}\,dy - \int \frac{b}{by-a}\,dy\Big) &= \int dx \\
\frac{1}{a}\big(\log|y| - \log|by-a|\big) &= x + C \\
\log\left|\frac{y}{by-a}\right| &= ax + C' \\
\frac{y}{by-a} &= \pm e^{ax+C'} = \pm e^{C'}e^{ax} = C''e^{ax} \qquad (C'' \in \mathbb{R},\ C'' \neq 0) \\
y(x) &= \frac{aC''}{bC'' - e^{-ax}}, \qquad C'' \neq 0
\end{aligned}$$

上では，$y \neq 0$ と仮定したが，$y(x) \equiv 0$ という定数関数が方程式をみたすことがすぐにわかる．この $y(x) \equiv 0$ という解は，上式において $C'' = 0$ とおけば実現される．

同じように，$y \neq a/b$ という仮定に対し，$y(x) \equiv a/b$ という定数関数が方程式をみたす．この $y \equiv a/b$ という解は $C'' \to \infty$ とすれば実現される．

時刻 $x = 0$ でバクテリアの量は $y(0) = y_0$ だったとする．この初期条件を用いて，一般解の中の積分定数 C'' を定め，特殊解を求めることができる．つまり，

$$y(0) = \frac{aC''}{bC'' - 1} = y_0 \qquad \Rightarrow \qquad C'' = \frac{y_0}{by_0 - a}.$$

一般解に代入すれば，次の解を得る．

$$y(x) = \frac{a}{b + (\frac{a}{y_0} - b)e^{-ax}}$$

バクテリア増殖のよりシンプルなモデル $y'(x) = ay(x)$（つまり，$b = 0$）の解と比べると，それぞれのモデルの特徴が分かる．$y' = ay$ の解 $y(x) = y_0e^{ax}$ は指数的に増加していくのに対し，ロジスティック方程式の解は時間が経てばある一定値（すなわち，a/b）に近づく（図 1）．

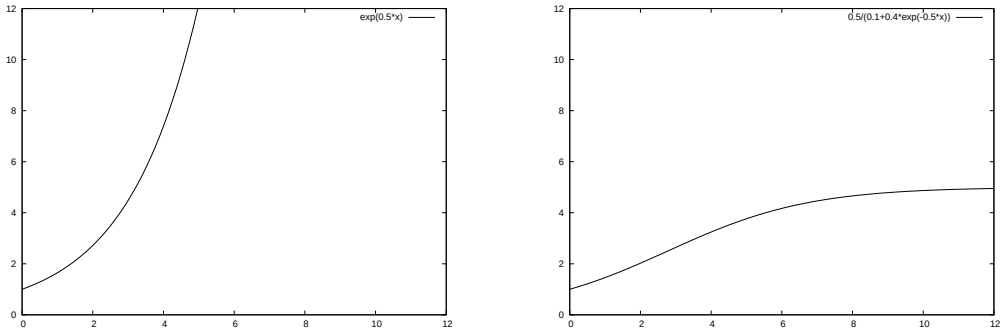


Figure 1: $a = 0.5$, $b = 0.1$, $y_0 = 1$ のときのシンプルなモデルとロジスティック方程式の解.

例 連立微分方程式が単独方程式に帰着されて解ける場合：Lotka-Volterra 方程式（共存モデル）.

$$\frac{dx}{dt} = (a - by)x \tag{2.3}$$
$$\frac{dy}{dt} = (-c + dx)y \tag{2.4}$$

ここで $a, b, c, d > 0$ と考えるので，捕食者 (predator) と被食者 (prey) という 2 種類の動物の共存モデルになる.

$dx/dt \neq 0$ と仮定すれば，(2.4) を (2.3) で割ると，

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{(-c + dx)y}{(a - by)x}$$

を得る（形式的な計算）. これは変数分離形であるので，次のように解ける.

$$\int \frac{a - by}{y}\, dy = \int \frac{-c + dx}{x}\, dx + C$$
$$a \log |y| - by = -c \log |x| + dx + C$$

x, y は生物の量を表しているので，$x, y > 0$ とするのが自然である. よって，

$$a \log y - by + c \log x - dx = C$$

この左辺を $F(x, y)$ とおくと，連立方程式の解 $x(t), y(t)$ に対して，$F(x, y)$ の値が一定になる. この解は既知の関数で表すことはできそうにないが，関係式 $F(x, y) = C$ は解の様子を教えてくれる. 関係式を満たす (x, y) は (x, y)-平面上で閉曲線を作る. $F(x, y)$ のように与えられた連立微分方程式の解に沿って，値が不変に保たれるような関数を**第一積分** (first integral) という. その値そのものは，初期値のとり方により変化する（図 2）.

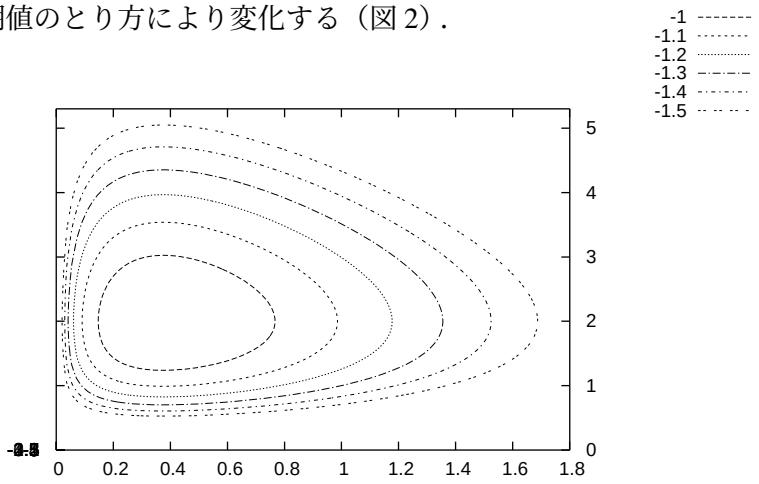


Figure 2: モデル方程式で $a = 1, b = 0.5, c = 0.3, d = 0.8$ として，第一積分の値 C を $-1.5, -1.4, -1.3, -1.2, -1.1, -1$ と選んだときの xy-平面上の閉曲線. 被食者が減ると捕食者も減少するなどの相互関係が読み取れる.

2.1.2 同次形

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{x}{y}\right) \tag{2.5}$$

の形の方程式を同次形 (homogeneous) という（[5], p. 27）.

これは，

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}$$

とおくと（つまり，$y(x)$ の代わりに新しい未知関数 $z(x)$ を導入すると），

$$\begin{aligned} y(x) &= z(x) \cdot x \\ y'(x) &= z'(x) \cdot x + z(x) = f(z(x)) \\ z' &= \frac{f(z) - z}{x} \end{aligned}$$

この方程式は未知関数 $z(x)$ に対して変数分離形になっているので解ける．具体的には，

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{f(z) - z} &= \int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C \qquad (f(z) - z \neq 0 \text{ のとき}) \\ e^{\int \frac{dz}{f(z)-z}} &= e^{\log|x| + C} = e^C |x| = C'x \end{aligned}$$

ここで，$C' = e^C$ は 0 と異なる定数である．上式の左辺を $G(z)$ とおくと，$G(z) = C'x$ となり，つまり，一般解

$$G(\frac{y}{x}) = C'x$$

を得る．ここで，ζ が $f(z) - z = 0$ の根ならば，$y(x) = \zeta x$ も解であることに注意する．

例

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{2y}{x}$$

$y = xz$ とおけば，方程式は

$$xz' = z^2 + z$$

となる．これを積分して，

$$\log|z| - \log|z+1| = \log|x| + C$$

すなわち，

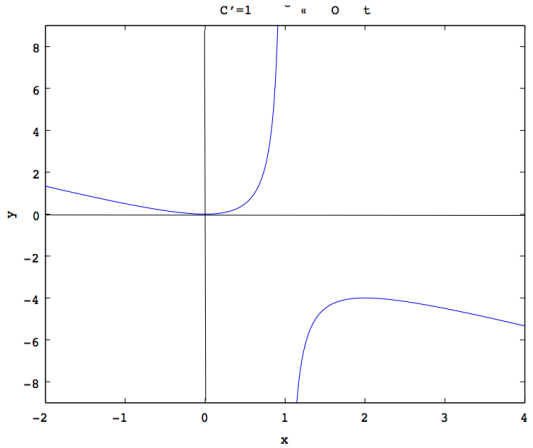
$$\frac{z}{z+1} = C'x \qquad (C' = \pm e^C,\ C' \in \mathbb{R},\ C' \neq 0)$$

ここで，z をもとの y/x で置き換え，さらに書き直せば，一般解

$$y(x) = \frac{C'x^2}{1 - C'x}$$

が得られる．

$f(z) - z = z^2 - z = 0$ を満たすのは $z = 0$ と $z = -1$ であり，これはそれぞれ $y(x) = 0$ と $y(x) = -x$ という解に対応しているが，一般解で $C' = 0, C' \to \infty$ とおいて得られる特殊解である．



注

$$y' = f\Big(\frac{ax+by+p}{cx+dy+q}\Big) \tag{2.6}$$

という方程式は，変数変換

$$\begin{aligned} x &= \xi + \alpha \\ y &= \eta + \beta \end{aligned}$$

を施し，定数 α, β をうまく選べば同次形に直すことができる（詳しくは [5], p. 29 を参照）.（ここで，ξ は x にかわる新しい変数，η は y にかわる新しい未知関数である.）

2.1.3 1 階の線形微分方程式

1 次の微分方程式

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{2.7}$$

を 1 階線形微分方程式 (linear differential equation of first order) という（[5], p. 34）．二つの場合に分けて，解き方を紹介する.

- $Q(x) = 0$ のとき，方程式は**同次**，または**斉次** (homogeneous) であるといい，

  $$y' + P(x)y = 0$$

  という形になる．これは変数分離形であるから容易に解くことができて，一般解は

  $$y(x) = Ce^{-\int P(x)\,dx}, \qquad C \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

  と表される.

- $Q(x) = 0$ でないとき，方程式は**非同次**，または**非斉次** (inhomogeneous) であるという．この場合は，方程式を解くためにまず $Q(x) = 0$ とした同次の方程式を解く．次に，上で求まった一般解 (2.8) の積分定数 C を x の関数とみて，$y(x)$ が方程式 (2.7) の解になるように $C(x)$ の具体的な形を決める．つまり，(2.8) の定数部分を x の関数で置き換えた

  $$y(x) = C(x)e^{-\int P(x)\,dx}$$

  というものをもとの方程式 (2.7) に代入して，$C(x)$ を求める．解であるためには

  $$y'(x) = C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} + C(x)(-P(x))e^{-\int P(x)\,dx} = -P(x)y(x) + Q(x)$$

  が成り立たなければならない．$y(x)$ に解の形を入れると，

  $$C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} + C(x)(-P(x))e^{-\int P(x)\,dx} = -P(x)C(x)e^{-\int P(x)\,dx} + Q(x)$$

  が得られる．従って，

  $$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$$

  という C に対する方程式を得る．これを積分し，

  $$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx} + \tilde{C}$$

  (2.8) に代入すると，

  $$y(x) = e^{-\int P(x)\,dx}\Big\{\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx} + \tilde{C}\Big\}$$

  が (2.7) の解になる．以上の解法を**定数変化法** (method of variation of constants) と呼ぶ.

例

$$y' = -y\cos x + e^{-\sin x}$$

- まず，同次方程式　$y' = -y\cos x$　を解く．

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y} &= -\int \cos x\, dx \\ \log|y| &= -\sin x + C_1 \\ y(x) &= Ce^{-\sin x}\end{aligned}$$

- 定数変化法を用いて，解を次の形で求める：

$$y(x) = C(x)e^{-\sin x} \tag{2.9}$$

この微分は

$$y'(x) = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)\cos x e^{-\sin x}$$

であるので，方程式に y と y' を代入すれば，

$$C'(x)e^{-\sin x} - C(x)\cos x e^{-\sin x} = -C(x)\cos x e^{-\sin x} + e^{-\sin x}$$

という条件になる．これを整理すると，$C'(x) = 1$ という条件に帰着され，$C(x) = x + \tilde{C}$ がわかる．これを (2.9) で使うと，微分方程式の一般解が得られる：

$$y(x) = e^{-\sin x}(x + \tilde{C}), \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

2.1.4 2 階定数係数線形微分方程式

$$y'' + py' + qy = r(x) \tag{2.10}$$

という形の方程式を扱う（[5], p. 64）．ただし，ここでは p, q は定数で r は関数である．

同次方程式　1 階方程式と同様に，最初は同次方程式

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2.11}$$

を解く．ここで，$y(x) = e^{\lambda x}$ と置いてみよう．

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q)$$

を得る．つまり，λ が

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{2.12}$$

を満たせば，$y(x) = e^{\lambda x}$ は (2.11) の解になる．方程式 (2.12) を微分方程式 (2.11) の**特性方程式** (characteristic equation) とよぶ．特性方程式は一般に 2 つの解 λ_1, λ_2 をもつ．つまり，$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ と $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ という 2 つの独立な解を得る．

そこで，次の重ね合わせの原理に注目する．つまり，$y(x)$ が (2.11) の解であれば，その定数倍 $Cy(x)$ も解である．また，$y_1(x)$ と $y_2(x)$ が (2.11) の 2 つの解であれば，$y_1(x) + y_2(x)$ も解になる．より一般に，$y_1(x), y_2(x)$ が (2.11) の解であれば，その任意の 1 次結合 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ も (2.11) の解になる．

さらに，(2.11) のすべての解を $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ の形で表されるということが証明できる．そういう意味では，$y_1(x), y_2(x)$ はすべての一般解が成すベクトル空間の基底である．基底を与える解の組を**基本解** (fundamental solution) という．

注 2 階定数係数線形方程式の場合，基本解が 2 つあって，一般解の空間は 2 次元の空間であるが，一般に m 階定数係数線形方程式を考えた場合，解空間は m 次元のもので，m 個の独立な基本解が存在することになる．

解の公式 以上の考察から，方程式 (2.11) の解の公式を得る．(2.11) の一般解は次のように与えられる：

1. $p^2 - 4q > 0$ のとき，2 次方程式 (2.12) が 2 つの異なる実数の解 λ_1, λ_2 をもつので，一般解は
$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \tag{2.13}$$
となる．

2. $p^2 - 4q < 0$ のとき，(2.12) の解を $\alpha \pm i\beta$ （互いに共役な複素数）とすると，一般解は
$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \tag{2.14}$$
である．(この形は $(e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x})/2$ と $(e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x})/2i$ という二つの解の線形結合として得られる．)

3. $p^2 - 4q = 0$ のとき，(2.12) の重解を $\lambda = -p/2$ とすると，
$$y(x) = e^{\lambda x}(C_1 x + C_2) \tag{2.15}$$

例 単振動の方程式
$$y'' + \omega^2 y = 0, \qquad \omega > 0$$
の一般解を実数値関数として求める．

特性方程式は $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ であり，この解は $\pm i\omega$ である．従って，方程式の 2 つの解を次のように書ける：
$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{i\omega x} = \cos \omega x + i \sin \omega x \\ y_2(x) &= e^{-i\omega x} = \cos \omega x - i \sin \omega x \end{aligned}$$
しかし，方程式が実数範囲で与えられているので，解も実数値関数が望ましい．そこで，上の二つの関数の任意の 1 次結合が解に
$$\begin{aligned} z_1(x) &= \frac{1}{2}\{y_1(x) + y_2(x)\} = \cos \omega x \\ z_2(x) &= \frac{1}{2i}\{y_1(x) - y_2(x)\} = \sin \omega x \end{aligned}$$
一般解はその線形結合
$$y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$$
で与えられる．

例 微分方程式
$$y'' + 3y' + 2y = 0$$
の一般解を求める．

特性方程式は $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ であり，これは $(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$ と因数分解されるので，$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ が根である．一般解は $e^{\lambda_1 x}$ と $e^{\lambda_2 x}$ の 1 次結合
$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$
で与えられる．

非同次方程式 微分方程式 (2.10) において，$r(x) \neq 0$ の場合について考える．(2.10) の一般解を $y(x)$ とし，(2.10) の一つの解 $y_0(x)$ が何らかの方法で見つかったとする．そのとき，

$$z(x) = y(x) - y_0(x)$$

という関数がみたす方程式を導いてみよう．

$$z'' + pz' + qz = (y'' + py' + qy) - (y_0'' + py_0' + qy_0) = r(x) - r(x) = 0$$

従って，z が同次 2 階線形微分方程式 $z'' + pz' + qz = 0$ を満たす．その一般解は計算でき，基本解 $y_1(x), y_2(x)$ の線形結合 $z(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ で与えられる．よって，(2.10) の一般解は

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_0(x)$$

となる．すなわち，非同次方程式 (2.10) の一般解は次の手順で計算できる：

1. 何らかの方法で非同次方程式の一つの解 $y_0(x)$ を計算する（これを**特殊解**という）
2. $r(x) = 0$ とおいた同次方程式の一般解 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ を求める
3. 一般解は $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_0(x)$ となる

特殊解を求める一般的な方法はないが，計算法が知られている $r(x)$ の特別な形はある．例えば，

- $r(x) = a =$ 定数　のとき，$y_0(x) = \alpha =$ 定数　という形で求めることができる
- $r(x) = ae^{kx},\ a, k \in \mathbb{R}$ のとき，$y_0(x) = Ce^{kx}$ という形で求めることができる
- $r(x) = ax + b$ のとき，$y_0(x) = \alpha x + \beta$ という形で求めることができる
- $r(x) = ax^2 + bx + c$ のとき，$y_0(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ という形で求めることができる

例 微分方程式

$$y'' + 3y' + 2y = e^{2x}$$

の一般解を求める．

1. 特殊解を計算する．$y_0(x) = Ce^{2x}$ という形で求める．方程式に代入すると，

   $$y_0'' + 3y_0' + 2y_0 = 4Ce^{2x} + 6Ce^{2x} + 2Ce^{2x} = 12Ce^{2x} = e^{2x}$$

   よって，$C = 1/12$ と置けば，y_0 は解になる．
2. 右辺を 0 にした同次方程式の一般解は $C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ である（上の例を参照）．
3. 一般解は $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \frac{1}{12}e^{2x}$ となる．

2.1.5 定数係数線形微分方程式系

ここで，正規形の連立 1 階微分方程式の初期値問題

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{z}_0 \tag{2.16}$$

の解法を考える（[5], p. 84）．ただし，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))^T$ は未知関数のベクトルで，A は $n \times n$ 実数正則行列である．この問題には n 階の定数係数線形微分方程式の初期値問題

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = 0, \qquad y(x_0) = z_1,\ y'(x_0) = z_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = z_n \tag{2.17}$$

（a_j は定数）も含まれる．なぜかというと，

$$y_1 = y,\ y_2 = y',\ \dots,\ y_n = y^{(n-1)}$$

と置くと (2.17) は

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ -a_1 y_n - \cdots - a_n y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

と表される．そこで $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)^T$, $\boldsymbol{z}_0 = (z_1, \cdots, z_n)^T$ と置けば (2.16) の形になることが分かる．

$y' = ay$ の解は $y = Ce^{ax}$ であるので，連立方程式 (2.16) の場合も解を e^{xA} のような形で書けないかということが思いつく．実数の指数関数に対して e^{xA} は意味がないが，実数の指数関数と同様に

$$e^{xA} = I + xA + \frac{1}{2}x^2A^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k A^k$$

と形式的に定義してみる．ただし，$A^0 = I$ （単位行列）としている．

上の無限級数は任意の x と A に対して収束し，極限は x に滑らかに依存することが知られている．この極限を e^{xA} と表し，**行列 A の指数関数**という．

行列の指数関数の性質

(1) $e^O = I$
(2) $(e^{xA})^{-1} = e^{-xA}$
(3) $e^{(x+x')A} = e^{xA}e^{x'A} = e^{x'A}e^{xA}$
(4) $e^{x(aI+A)} = e^{ax}e^{xA}$
(5) $\frac{d}{dx}e^{xA} = Ae^{xA}$

この証明は行列の指数関数の定義に出ている無限級数が絶対一様収束することを用いる（普通の指数関数と同様）．

初期値 $\boldsymbol{z}_0 \in \mathbb{R}^n$ に対して行列 $e^{(x-x_0)A}$ を作用させたものを

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{(x-x_0)A}\boldsymbol{z}_0$$

と置く．行列の指数関数の性質を用いて，

$$\boldsymbol{y}(x_0) = e^{0A}\boldsymbol{z}_0 = e^O\boldsymbol{z}_0 = I\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{z}_0$$

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{y} = \frac{d}{dx}\left\{e^{(x-x_0)A}\boldsymbol{z}_0\right\} = \frac{d}{dx}\left\{e^{xA}e^{-x_0A}\boldsymbol{z}_0\right\} = Ae^{xA}e^{-x_0A}\boldsymbol{z}_0 = Ae^{(x-x_0)A}\boldsymbol{z}_0 = A\boldsymbol{y}$$

が確認できる．つまり，$\boldsymbol{y}$ は初期値問題 (2.16) の解である．微分方程式系に対し単独の微分方程式と同様な存在定理が成り立つので，上の解がただ一つの解であることが分かる．

行列 A の指数関数 e^{xA} の求め方（行列 A が対角化可能の場合のみ紹介する）

1. 行列 A を対角化する：

$$A = PDP^{-1}, \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2. 行列 D の指数関数を計算する：

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{aligned} e^{xD} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} D^k &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\lambda_n^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. e^{xA} を計算する：

$$\begin{aligned} e^{xA} = e^{x(PDP^{-1})} &= I + xPDP^{-1} + \frac{x^2}{2!}(PDP^{-1})^2 + \cdots \\ &= I + xPDP^{-1} + \frac{x^2}{2!}PD^2P^{-1} + \cdots \\ &= P\left(I + xD + \frac{x^2}{2!}D^2 + \cdots\right)P^{-1} \\ &= Pe^{xD}P^{-1} \end{aligned}$$

すなわち，

$$e^{xA} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} P^{-1}$$

ここで，$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は行列 A の固有値である．

例 初期値問題

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -4y_1 + 5y_2 \\ & y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 3 \end{aligned}$$

を解く．

ここで，

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

である．式 $\det(A - \lambda I) = 0$ を解いて，固有値が $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ であることが分かる．また，$A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i$ により対応している固有ベクトルは $\boldsymbol{p}_1 = (1,1)^T, \boldsymbol{p}_2 = (1,2)^T$ である．それを縦に並べた行列 P を用いて

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

と対角化される．従って，

$$e^{xA} = Pe^{xD}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^x - e^{3x} & -e^x + e^{3x} \\ 2e^x - 2e^{3x} & -e^x + 2e^{3x} \end{pmatrix}$$

となる．求める解は

$$\boldsymbol{y} = e^{xA} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^x + 2e^{3x} \\ -e^x + 4e^{3x} \end{pmatrix}$$

で与えられる． つまり，$y_1(x) = -e^x + 2e^{3x}$, $y_2(x) = -e^x + 4e^{3x}$ という解になる．

対角化可能でない行列の場合も同様の方法を用いることができるが，少し複雑になる．

2.2 力学系について

力学系（dynamical system）とは，一定の規則に従って時間の経過とともに状態が変化するシステム（系）のことである（そのシステムを記述する数学的なモデルを指すこともある，[5], p. 133）．状態の変化に影響を与える数個の要素を変数として取り出し，要素間の相互作用を微分方程式として記述される．力学系の例として振動運動，ロトカ・ヴォルテラの方程式，惑星の運動方程式，ローレンツの方程式，カオスなどが挙げられる．

ここでは特に，独立変数を時間 t とし，未知量 y が時間の流れとともにどのように変化していくかを考える．解を直接求めることができるのがまれであるから，解を求めることなく系の状態が時間とともに描く軌跡や運動の方向といった幾何学的な性質を調べるのが力学系の考え方である．

ここでは，微分方程式の右辺が t を陽に含まない**自律系**

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}), \qquad \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0 \tag{2.18}$$

を考えよう．ただし，$\dot{\boldsymbol{y}}$ は時間微分 $d\boldsymbol{y}/dt$ を表す記号で，$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は滑らかな関数であるとする．

初期条件を明示して，この解を

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t; t_0, \boldsymbol{y}_0)$$

と表す．特に，$t_0 = 0$ に対応する解を $\boldsymbol{y}^*(t; \boldsymbol{y}_0)$ と表すことにする．すなわち，

$$\boldsymbol{y}^*(t; \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{y}(t; 0, \boldsymbol{y}_0)$$

解 $\boldsymbol{y}(t; t_0, \boldsymbol{y}_0)$ と $\boldsymbol{y}(t; 0, \boldsymbol{y}_0)$ の関係を調べるために，

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{y}^*(t - t_0; \boldsymbol{y}_0)$$

と置く．

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}} &= \frac{d}{dt}\boldsymbol{y}^*(t-t_0;\boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^*(t-t_0,\boldsymbol{y}_0)) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) \\ \boldsymbol{z}(t_0) &= \boldsymbol{y}^*(0;\boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{y}(0;0,\boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{y}_0 \end{aligned}$$

であるので，$\boldsymbol{z}(t)$ と $\boldsymbol{y}(t;t_0,\boldsymbol{y}_0)$ は同じ初期値問題 (2.18) を満たす．解の一意性によりこの二つの関数は等しい，すなわち

$$\boldsymbol{y}(t;t_0,\boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{y}^*(t-t_0;\boldsymbol{y}_0)$$

が成り立つ．これは時間方向に解を平行移動することによって，初期値の観測時刻 $t=t_0$ を $t=0$ に移すことができることを意味する．従って，初期値問題 (2.18) の解の性質を調べるためには，特に $t_0=0$ とした場合のみを考えれば十分である（この事実は $\boldsymbol{f}$ が t に陽に依存する非自律系では成立しない）．

またこのことは，解曲線 $(t,\boldsymbol{y}(t))$ よりも， t をパラメータとして解が $\mathbb{R}^n$ 上にどのような軌跡からなる曲線を描くかということの方がより重要であるということである．$\mathbb{R}^n$ の中に描かれる解 $\boldsymbol{y}^*(t;\boldsymbol{y}_0)$ の軌跡

$$\mathcal{O}(\boldsymbol{y}_0) = \{\boldsymbol{y}^*(t;\boldsymbol{y}_0);\ \ t\in\mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$$

を $\boldsymbol{y}_0$ を通る**解軌道**（orbit）という．

例 単振動の方程式

$$\ddot{x} + kx = 0 \qquad (k>0)$$

の解軌道を $\mathbb{R}^2$ 上に図示する．

$y=\dot{x}$ と置くとこの微分方程式は

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -kx \end{cases}$$

と表される．$\boldsymbol{y}=(x,y)^T$, $\boldsymbol{f}(x,y)=(y,-kx)^T$ と置けば，(2.18) の形になる．定数係数の線形微分方程式であるから，その一般解は

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1\cos\sqrt{k}t + C_2\sin\sqrt{k}t \\ y(t)=\dot{x}(t) &= \sqrt{k}\big(-C_1\sin\sqrt{k}t + C_2\cos\sqrt{k}t\big) \end{aligned}$$

であることが容易に計算できる．この 2 式から

$$kx^2(t) + y^2(t) = k(C_1^2+C_2^2) = C = \text{定数} \geq 0$$

と変数 t を消去できる．これにより，解 $(x(t),y(t))$ の軌道は楕円であることが分かる（図3）．

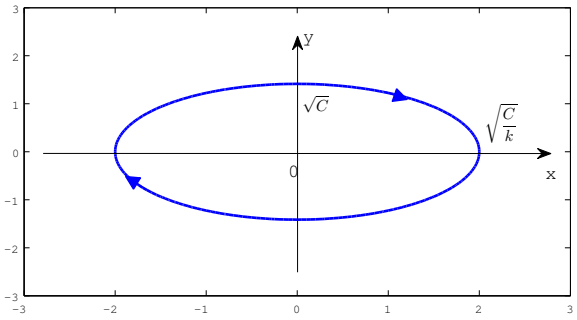


Figure 3: 単振動方程式の解軌道

定義

- 微分方程式 (2.18) において $\boldsymbol{f}(P) = \boldsymbol{0}$ を満たす点 $P \in \mathbb{R}^n$ を**平衡点**（equilibrium (point)）という．平衡点はそれ自身が軌道である．
- $\boldsymbol{y}^*(t; \boldsymbol{y}_0)$ が周期関数のとき，その軌道を**周期軌道**（periodic orbit）という．

上の例では平衡点が $(x, y) = (0, 0)$ で，解軌道は周期軌道である．

定理（解軌道の性質）

- 解軌道は曲線としてつなぎ合わせができる：

$$\boldsymbol{y}^*(s; \boldsymbol{y}^*(t; \boldsymbol{y}_0)) = \boldsymbol{y}^*(t; \boldsymbol{y}^*(s; \boldsymbol{y}_0)) = \boldsymbol{y}^*(s + t; \boldsymbol{y}_0)$$

  すなわち，時刻 s までに描かれる軌道と，時刻 s の状態を新たな出発点としてさらに時間 t だけ進めたときに描かれる軌道とをつなぎ合わせた曲線は，最初の時刻から時刻 $s + t$ までの間に描かれる一本の曲線と同じものである．
- 二つの解軌道は決して交わらない： 二つの軌道 $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}(\boldsymbol{y}_1)$ と $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}(\boldsymbol{y}_2)$ は共有点を持たないか，あるいは $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ のどちらかである．
- 解軌道が自分自身と交わるときの状況： 解 $\boldsymbol{y}^*(t; \boldsymbol{y}_0)$ の軌道 $\mathcal{O}(\boldsymbol{y}_0)$ が異なる t の値で自分自身と共有点を持つならば，$\boldsymbol{y}_0$ は平衡点で $\mathcal{O}(\boldsymbol{y}_0) = \{\boldsymbol{y}_0\}$ であるか，または $\mathcal{O}(\boldsymbol{y}_0)$ は周期軌道である．

平衡点の安定性

単振動の方程式は解くことができるから解の挙動を詳しく定量的に調べることができる．しかし，一般の微分方程式に対しては，定性的な振る舞いしかわからないことが多い．ここでは，特に平衡点近傍の解に限定すれば，定量的な解析が可能になることを示す（[5], p. 146, [4], p. 124）．

解 $\boldsymbol{y}(t)$ の挙動を平衡点 P の近傍で考察するために，

$$\boldsymbol{y}(t) = P + \boldsymbol{v}(t)$$

によって変数を $\boldsymbol{y}$ から $\boldsymbol{v}$ に変換する．$\boldsymbol{f}(P + \boldsymbol{v})$ を P の周りでテーラー展開すると，

$$\boldsymbol{f}(P + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f}(P) + \boldsymbol{f}'(P)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v})$$

となる．ここで，

- $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}$ に関する 2 次以上の項（すなわち，ある正定数 $C > 0$ があって，$|\boldsymbol{v}|$ が小さいとき $|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v})| \leq C|\boldsymbol{v}|^2$ を満たすような関数）である．
- $A = \boldsymbol{f}'(P)$ は n 次の正方行列

$$A = \boldsymbol{f}'(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(P) \end{pmatrix}$$

である．

未知変数 $\boldsymbol{v}$ に関する初期値問題は

$$\dot{\boldsymbol{v}} = A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}), \qquad \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{y}_0 - P \tag{2.19}$$

となる．解が平衡点 P の十分近くの初期値から出発すれば，しばらくの間 P の十分近くに留まり，従って $\boldsymbol{v}(t)$ が十分小さく留まっているだろう．このとき，$\boldsymbol{v}$ の振る舞いは近似的に

$$\dot{\boldsymbol{v}} = A\boldsymbol{v}$$

という方程式で記述されると期待できる．この方程式を平衡点 P に関する (2.18) の**線形化方程式**という．

例

$$\text{微分方程式} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -x + xy + y \\ \dot{y} = -2y + x^2 + y^2 \end{cases}$$

では $f_1(x,y) = -x + xy + y$, $f_2(x,y) = -2y + x^2 + y^2$ と表し，$f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$ であるから，$P = (0,0)$ は平衡点になる．$\boldsymbol{f}$ の P に関する線形化行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}\Big|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} -1+y & x+1 \\ 2x & -2+2y \end{pmatrix}\Big|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

従って，線形化方程式は $\boldsymbol{v} = (v,w)^T$ として

$$\begin{cases} \dot{v} = -v + w \\ \dot{w} = -2w \end{cases}$$

と表される．

$\dot{\boldsymbol{v}} = A\boldsymbol{v}$ の微分方程式の解は $e^{tA}\boldsymbol{v}_0$ である．大雑把に言うと，λ が行列 A の固有値であれば，行列 A の指数関数が $e^{\lambda t}$ という項を含む．そのため，平衡点の近くから出発した解が平衡点に近づくか，平衡点から離れていくかを行列 A の固有値の実部を見て判断できる．以下の定理を厳密に証明することができる：

定理． 線形化行列 A のすべての固有値の実部が負であるとすると，初期値 $\boldsymbol{v}_0$ が $\boldsymbol{0}$ に十分近ければ (2.19) の解は

$$\boldsymbol{v}(t) \to 0 \qquad (t \to \infty)$$

を満たす．

$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{v}(t) + P$ だったから，上の定理の状況では $\boldsymbol{y}_0$ が平衡点 P に十分近ければ，解 $\boldsymbol{y}(t)$ が平衡点 P に収束するということである．

定義

- 平衡点 P の十分近くから出発した解が必ず P に収束するとき，平衡点 P は**漸近安定**（asymptotically stable）であるという．
- 平衡点 P の十分近くから出発した任意の解がすべての $t > 0$ に対してその平衡点の近くに留まっているとき，平衡点 P は**安定**（stable）であるという．
- 平衡点が安定でないとき**不安定**（unstable）であるという．

2 次元力学系の場合，平衡点の近傍での解の振る舞いを線形化方程式を用いて具体的に見ていく．$\mathbb{R}^2$ において平衡点 P に関する線形化方程式

$$\dot{\boldsymbol{v}} = A\boldsymbol{v}$$

を考える．A の二つの固有値を λ_1, λ_2 とし，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ とし，簡単のため $\lambda_1 \neq \lambda_2$ と仮定する．

$\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ が独立であるから，$\boldsymbol{v}(t) = \alpha_1(t)\boldsymbol{p}_1 + \alpha_2(t)\boldsymbol{p}_2$ と表すことができる．これを線形化方程式に代入すると，

$$\dot{\alpha}_1\boldsymbol{p}_1 + \dot{\alpha}_2\boldsymbol{p}_2 = \alpha_1 A\boldsymbol{p}_1 + \alpha_2 A\boldsymbol{p}_2 = \alpha_1\lambda_1\boldsymbol{p}_1 + \alpha_2\lambda_2\boldsymbol{p}_2$$

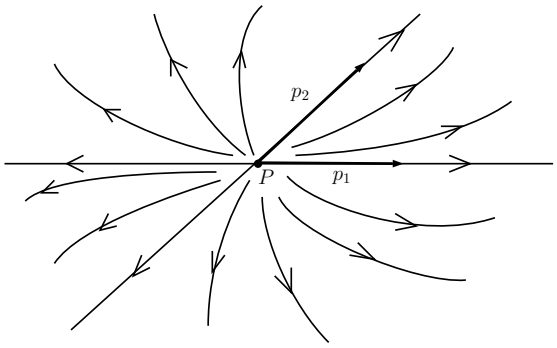
となる．ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ の係数を比較することによって，$\dot{\alpha}_1 = \lambda_1\alpha_1, \dot{\alpha}_2 = \lambda_2\alpha_2$ を得る．初期値が $\boldsymbol{v}_0 = a_1\boldsymbol{p}_1 + a_2\boldsymbol{p}_2$ と表されるとき，解 $\boldsymbol{v}(t)$ は

$$\boldsymbol{v}(t) = e^{\lambda_1 t}a_1\boldsymbol{p}_1 + e^{\lambda_2 t}a_2\boldsymbol{p}_2$$

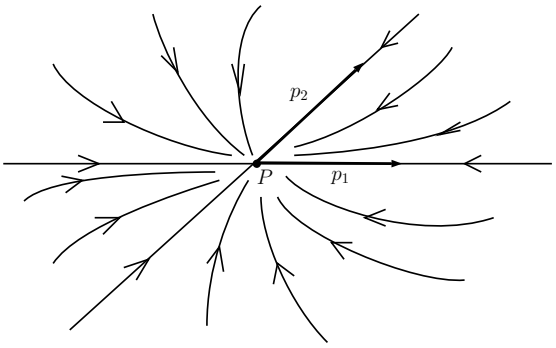
と表されることが分かる．

以下の四つの場合を考える：

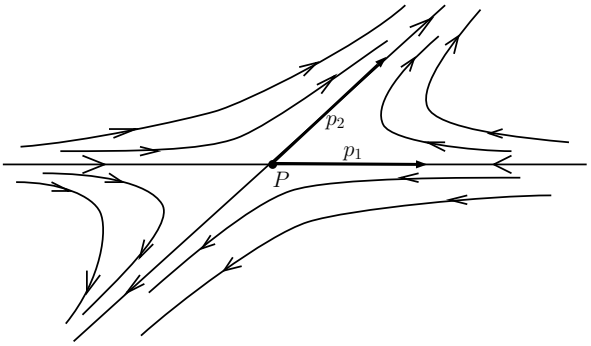
1. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$：$\boldsymbol{v}(t)$ は指数的に増大する．
2. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$： $\boldsymbol{v}(t)$ はベクトル $\boldsymbol{p}_1$ の方向には指数的に減少し $\boldsymbol{p}_2$ の方向には指数的に増大する．
3. $\lambda_1, \lambda_2 < 0$：$\boldsymbol{v}(t)$ は指数的に減少し $\boldsymbol{0}$ に収束する．
4. $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$（共役複素数）：$\lambda_1 = p + iq$ と置くと $e^{\lambda_1 t} = e^{pt}(\cos qt + i\sin qt)$ であるから，$\boldsymbol{v}(t)$ は回転しながらその絶対値が増大するか（$p > 0$）$\boldsymbol{0}$ に収束するか（$p < 0$）のどちらかである．



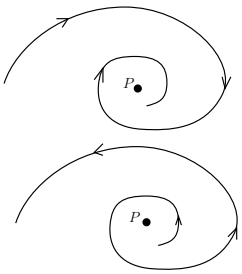
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$（不安定結節点）



$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$（鞍点）



$\lambda_1, \lambda_2 < 0$（安定結節点）



$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$（渦状点）

注 周期解の安定性についても同じように調べることができる（[5], p. 160）.

2.3 常微分方程式の基礎理論

常微分方程式の理論では，解の存在と一意性がどのような条件の下で成り立つかを明らかにし，初期値に対する連続的な依存性などの解の性質を調べることが目標である.

連立方程式についても言えることであるが，ここでは簡単のために方程式

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{2.20}$$

について述べる.

2.3.1 解の存在

解の存在についての代表的な定理を二つ紹介する.

Cauchy の定理

xy 平面上の長方形領域（中心 (x_0, y_0)，辺の長さ $2a, 2b$ の長方形）

$$D = \{(x, y);\ |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\}$$

において，関数 $f(x, y)$ は連続でかつ Lipschitz 条件

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \qquad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D$$

を満たすとする．D における $|f|$ の最大値を M とすると，初期値問題 (2.20) の解が区間

$$I = [x_0 - r, x_0 + r], \qquad r = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

で存在し，しかもただ一つである.

Peano の定理

D を xy-平面上の領域，関数 $f(x, y)$ は D で定義されて連続であるとする．$(x_0, y_0) \in D$ ならば，微分方程式 (2.20) の解 $y(x)$ が点 (x_0, y_0) の近傍で存在する.

常微分方程式の解の存在を調べる主な方法が三つ知られている：

1. 近似によるアプローチ（Cauchy の折線）

   簡単な初期値問題

   $$y' = 2y, \qquad y(0) = 1 \tag{2.21}$$

   を例にとって考え方を解説する.

   この解が $y = e^{2x}$ であることはすぐにわかる.

   この解曲線が点 $(x_0, y(x_0))$ を通るとき，その点での解曲線が動く方向を調べる．すなわち，解曲線への接線の向きを計算すればよい．曲線上の点 $(x_0, y(x_0))$ において，曲線の傾斜は $\tan\theta = y'(x_0)$ となるので，図 4（左）のように点 $x_0 = 0.3$ での接線の向きを描くために，点 $(x_0, y(x_0)) = (0.3, e^{0.6})$ より水平方向に長さ 1 の線分を引き，この線分の終点より垂直方向に

長さ $y'(x_0) = 2e^{2x_0} = 2e^{0.6}$ の線分を引く．解曲線への点 $(x_0, y(x_0))$ での接線は $(x_0, y(x_0))$ と垂直な線分の終点を結ぶ直線である（図では赤く表示した）．解曲線はこの接線に沿った方向に動くので，動きの方向を図の紫色の矢印のように描くことができる．

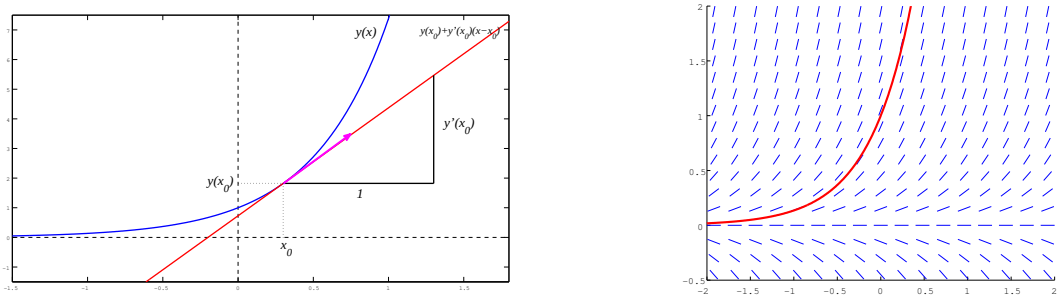


Figure 4: 解への接線と方程式の方向の場

しかし，よく見ると，与えられた点 (x_0, y_0) での解曲解を求めなくても計算できることがわかる．方程式を用いればよい：

$$y'(x_0) = 2y(x_0) = 2y_0.$$

つまり，解曲線が点 (x_0, y_0) を通るとしたら，その点での動く方向（接線の向き）は「x-方向に 1，y-方向に $2y_0$」というベクトルになる．このようにして，xy 平面の各点で解の（接線）方向を求めることができ，各点での方向が定まった平面を**方向の場**とよぶ．上記の問題に対し方向の場を描くと，図 4（右）のようになる．右の図は点 $(0, 1)$ を通る解曲線を表しており，解曲線が方向の場に沿って動いていることが見てとれる．

上の考察を微分方程式の近似を与えるのに応用できる．微分方程式は解析的に解けるものがごく僅かであるので，数値計算により解を近似する必要がある．

最初に挙げた初期値問題を区間 $x \in (0, 1)$ で近似的に解いてみよう．区間 $(0, 1)$ を n 等分して，部分区間の長さを $h = 1/n$ とする．これにより得られた接点を $x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h, \ldots, x_{n-1} = (n-1)h, x_n = 1$ とおく．

まず，$n = 2$ のときのとても粗い近似解を求める．そのために，初期点 $(0, 1)$ からスタートして，微分方程式の方向の場が定める方向（つまり，解曲線への接線の方向）に沿って $x = 0.5$ の軸にぶつかるまで直線上に進む．点 $(x_0, y_0) = (0, 1)$ における接線方向は $(1, y'(x_0)) = (1, 2y_0) = (1, 2)$ であるので，進む直線の方程式は $y = 2x + 1$ となる．接点 x_1 が定める軸 $x = x_1 = 0.5$ にぶつかったら，進む方向を修正する．つまり，ぶつかった点 $(0.5, 2)$ での方向の場の方向に切り替える．点 $(0.5, 2)$ での方向の場の方向は $(1, y'(0.5)) = (1, 2y) = (1, 4)$. よって，次は点 $(0.5, 2)$ からこの方向に進むので，進む直線の方程式は $y = 4x$ となる．最後の接点 $x_2 = 1$ にぶつかるまでこの直線上に進む．この手順で得られた近似解は

$$y_2(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \in [0, 0.5] \\ 4x, & x \in (0.5, 1] \end{cases}$$

となる．このグラフは図5で青で表示してある．

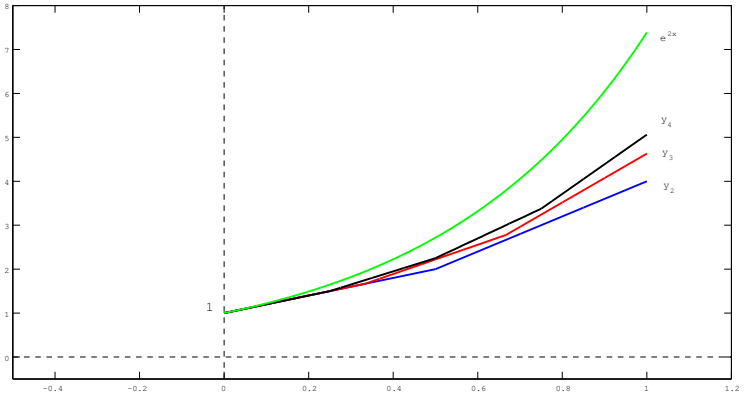


Figure 5: オイラー法による近似解（2 分割，3 分割と 4 分割のとき）と真の解

同様に，$n = 3$ の場合に近似解 y_3 を計算する．同じ初期点 $(0,1)$ からスタートするので，$x \in (0, \frac{1}{3})$ の間では y_2 と同じ直線 $y = 2x + 1$ の方向に進む．点 $(\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$ での 方向は $(1, 2y) = (1, \frac{10}{3})$ であるので，区間 $x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ での直線の方程式は $y = \frac{10}{3}x + \frac{5}{9}$ となる．最後の区間 $(x_2, x_3) = (\frac{2}{3}, 1)$ での近似解の方程式を求め，一つの式にまとめると，

$$y_3(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \frac{10}{3}x + \frac{5}{9}, & x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{50}{9}x - \frac{25}{27}, & x \in (\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

となる．この近似解を図で赤で示した．

黒で示したのは近似解 y_4 であり，緑の曲線は解析解 $y(x) = e^{2x}$ である．刻み幅を細かくしていくと近似解が解析解に近づくことがわかる．

一般に，(2.20) の関数 f が連続でさえあれば，$n \to \infty$ のときに，折線 $y_n(x)$ が真の解 $y(x)$ に（局所的に）一様収束することが証明でき（Arzelà-Ascoli の定理を利用，[2], p. 19），Peano の存在定理を得る．

このように微分方程式を近似的に解く方法はオイラー法（Euler method）と呼ばれる．有限個の接点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ での値のみ求めるので，コンピューターで扱える有限次元の問題になる．一般的な問題 (2.20) に対してオイラー法を書くと，

$$y_n(x_{k+1}) = y_n(x_k) + hf(x_k, y_n(x_k))$$

となる．これは，接点 $x_0, x_1, \ldots, x_k$ での近似解 y_n の値をすでに求めたとして，次の接点 x_{k+1} での値を与える式である．この式が $y'(x_k)$ を $(y(x_k + h) - y(x_k))/h$ で置き換えることによって得られることが注意に値する．

複数の接点での近似解の値を用いて次の接点での値を計算するなど，微分方程式の数値解法はいくつかあるが，オイラー法は最も基本的な方法である．

2. 不動点定理への帰着

このアプローチは，連続な f に対して問題 (2.20) が

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi$$

という積分方程式と同値であることを利用している．この式の右辺を y に作用するオペレータ $\Phi(y)$ として考えれば，不動点問題 $y = \Phi(y)$ の形になっており，いくつかある不動点定理を適用できる．

- f が Lipschitz 条件を満たすとき，バナッハの不動点定理（縮小写像の定理）が適用でき，一意的な解の存在が示される．
  関数 $f(x,y)$ が D において y について偏微分可能で，偏導関数が D で連続であれば，Lipschitz 条件が満たされることに注意する．
- f がただ連続なときはより一般的な Schauder の不動点定理を利用するが，そのときは存在だけ示される（Peano の定理）．

バナッハの不動点定理に基づいた方法は Picard の逐次近似法とよばれ，以下のように定義した関数列がただ一つの真の解に一様収束することを示している（詳しくは [5]）：

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= y_0 \\
y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)\, d\xi \\
y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))\, d\xi \\
&\vdots \\
y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_{n-1}(\xi))\, d\xi \\
&\vdots
\end{aligned}$$

例 オイラー法を考えるときに用いた初期値問題

$$y' = 2y, \qquad y(0) = 1$$

に対して逐次近似解を計算してみよう．この場合は

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad f(x,y) = 2y$$

であるので，近似解は次の式で与えられる：

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 \\
y_{n+1}(x) &= 1 + 2\int_0^x y_n(t)\, dt
\end{aligned}$$

これを計算していくと，

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 \\
y_1(x) &= 1 + 2\int_0^x 1\, dt = 1 + 2x \\
y_2(x) &= 1 + 2\int_0^x (1 + 2t)\, dt = 1 + 2x + \frac{2^2}{2}x^2 \\
y_3(x) &= 1 + 2\int_0^x (1 + 2t + \frac{2^2}{2}t^2)\, dt = 1 + 2x + \frac{2^2}{2}x^2 + \frac{2^3}{2\cdot 3}x^3 \\
y_4(x) &= 1 + 2\int_0^x (1 + 2t + \frac{2^2}{2}t^2 + \frac{2^3}{3!}t^3)\, dt = 1 + 2x + \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^4}{4!}x^4
\end{aligned}$$

となり，第 n 次近似解の形がわかる：

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2x)^k}{k!}$$

この式で $n \to \infty$ とすると，$y_n(x) \to e^{2x}$ が得られる．つまり，近似解が真の解に収束する．

3. Taylor 展開による手法

方程式 (2.20) が解をもち，f が初期値 (x_0, y_0) の近傍で何回でも微分可能であるとすると，方程式を微分していくことにより解 y の (x_0, y_0) における微分をすべて求めることができる：

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)), \quad y''(x_0) = f_x(x_0, y(x_0)) + f_y(x_0, y(x_0))y'(x_0), \quad \dots.$$

解 $y(x)$ が x_0 のまわりで Taylor 展開できるならば，それは

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}y''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$

となり，形式的に解が求まる．優級数定理を用いて，上の展開がある区間 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ で収束することが証明されるので，解の存在が言える．

しかし，この方法は f と y の解析性を必要としているので，特殊な場合にしか応用されない．

2.3.2 解の一意性

右辺の関数 f に対する Lipschitz 条件など，解の一意性の十分条件が昔から知られていたが，必要十分条件については岡村氏がはじめて発見した（詳しくは [2] の 6 章を参照）．

岡村の定理

方程式 (2.20) において関数 $f(x, y)$ は領域 D で定義されているとする．D の任意の点に対し，その点の近傍 V があって，V の 2 点 (x, y) および (x, z) に対して定義された連続的微分可能な関数 $\Phi(x, y, z)$ があって，つぎの不等式を満足するとする：

$$\Phi(x, y, z) \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial y} f(x, y) + \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial z} f(x, z) \leq 0 \qquad (2.22)$$

そのとき，方程式 (2.20) の解曲線は（存在すれば）D の各点からみぎにむかって一意的に決まる．
逆に，D の各点からみぎに出る (2.20) の解が常に一意的に決まるとき，D の内部の任意の点に対し，その小さな近傍 V 上の任意の 2 点 $(x, y), (x, z)$ に対して定義された関数 $\Phi(x, y, z)$ が存在し，それは連続的微分可能，かつ (2.22) を満たす．

Lipschitz 条件が (2.22) の特別な場合であることに注意する．また，Lipschitz 条件が満たされるときの一意性の証明は Gronwall の不等式を利用している（[5], p. 185）．

2.3.3 解の性質

存在定理で得られる解をこれ以上延長できないときに，それを**最大解**とよぶ．f が y について線形なとき，この最大解の定義域は f が（x について）連続である領域を含むが，非線形な方程式ではそれが成り立たず，最大解がより狭い定義域をもつことがある．例として，$y' = y^2$ という方程式を考えればよい．

Peano の定理により存在が示された解曲線は，領域 D から出ない限りいくらでも延長できることが知られている．正確には次の定理がある．

最大解の特徴

関数 f が点 (x_0, y_0) を含む領域 D において連続であるとする．y が区間 (a, b) で定義される (2.20) の最大解で，$K \subset D$ がコンパクト集合であるとする．そのとき，$x_1, x_2 \in (a, b)$ が存在し，

$$x \in (a, x_1) \cup (x_2, b) \qquad \Rightarrow \qquad (x, y(x)) \notin K$$

が成り立つ．

つまり，最大解は D に含まれる任意のコンパクト領域を出る，D の境界点から境界点までのびる解である（図6）．

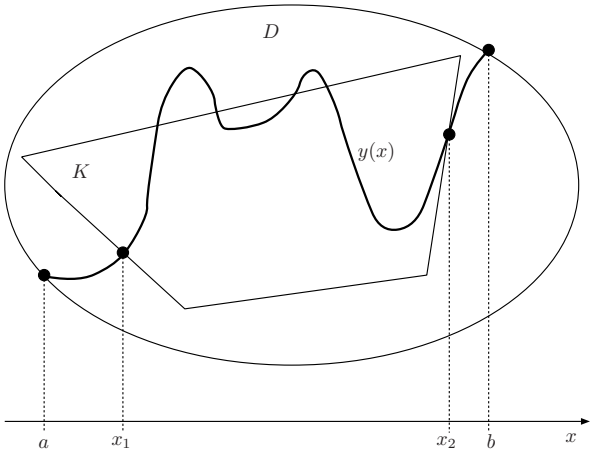


Figure 6: 最大解の特徴

他にも様々な解の性質を示すことができるが，ここでは簡単な説明にとどめる．

- ある初期値 (x_0, y_0) から出発する解の集合について述べる結果がある．ここでは単独方程式の場合の Peano-Osgood の定理を紹介し，詳しいことは [2], p. 55 に委ねる．

  Peano-Osgood の定理

  方程式 (2.20) において $f(x, y)$ が領域 $D = \{x_0 \le x \le x_1,\ -\infty \le y \le \infty\}$ で連続かつ有界とし，点 (x_0, y_0) からみぎに出る (2.20) のすべての解曲線をとりその曲線上の点全体の集合を E とすると，E は $\{x_0 \le x \le x_1,\ \psi(x) \le y \le \Psi(x)\}$ という集合となり，ここに $y = \psi(x)$ および $y = \Psi(x)$ は (2.20) の解であって，$\psi(x_0) = \Psi(x_0) = y_0$.

- 解の初期値に対する連続性（[2], p. 27）

  初期値に関する連続性

  関数 $f(x, y)$ が領域 D において連続で Lipschitz 条件を局所的に満たすとする．方程式 (2.20) の最大解が区間 (α, β) で定義されるとする．そのとき，任意の $\varepsilon > 0$ および $\gamma_1, \gamma_2 \in (\alpha, \beta)$（ただし，$\gamma_1 < x_0 < \gamma_2$）に対し $\delta > 0$ が存在し，$|y_0 - b| < \delta$ を満たすすべての b に対する $y'(x) = f(x, y), y(x_0) = b$ の最大解 $\eta(x)$ が少なくとも (γ_1, γ_2) において定義され，

  $$|y(x) - \eta(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in (\gamma_1, \gamma_2)$$

  が成り立つ．

- 解の初期値に関する微分可能性

  右辺の関数 f が微分可能であれば，解も初期値について微分可能であることがわかっている（詳しくは [2], p. 32）.

2.4 演習問題

問題 2.1 微分方程式

$$xy' - y\log\frac{y}{x} = 0$$

に対し，初期条件 $y(1) = 1$ を満たす特殊解を求め，解のグラフを描け.

問題 2.2 次の条件を満たす関数 $y(x)$ を求めよ.

$$\begin{aligned} 2x + y - x\frac{dy}{dx} &= 0 \\ y(1) &= 0 \end{aligned}$$

問題 2.3 次の微分方程式の解の存在と一意性について調べてから一般解を求め，様々な初期値に対する解曲線を図示せよ.

$$(x+y) + (x-y)y' = 0$$

また，以下の初期条件を満たす全ての特殊解をそれぞれ求めよ.

(i) $y(1) = 1 + \sqrt{2}$

(ii) $y(1) = 1$

(iii) $y(1) = -1$

問題 2.4 次の条件を満たす関数 $y(x)$ を すべて 見つけよ.

$$\begin{aligned} y' &= 3\sqrt{xy} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

問題 2.5 微分方程式 $x^3y' + xy = 1$ の一般解を求めよ.

問題 2.6 微分方程式 $y'' - y + 2x^2 = 0$ に対し，初期条件 $y(0) = y'(0) = 2$ を満たす特殊解を求めよ.

問題 2.7 次の微分方程式を解いて，３つ以上の異なる初期値に対する解のグラフを一つの図にまとめて図示せよ.

$$(x^2 - x)y' + (1 - 2x)y + x^2 = 0$$

問題 2.8 微分方程式

$$y'' - y' = 12(y - 2x) + 10$$

について，次の問に答えよ.

(i) 方程式の一般解を求めよ.

(ii) 初期条件　$y(0) = 0,\ y'(0) = 6$　を満たす特殊解を求めよ.

問題 2.9 次の微分方程式を解いて，3 つ以上の異なる初期値に対する解のグラフを一つの図にまとめて図示せよ．

$$(2x - y + 3) - (x - 2y + 3)y' = 0$$

（ヒント： 新しい変数 ξ と新しい未知関数 η を導入し，変数変換 $x = \xi + \alpha, y = \eta + \beta$ を行う．定数 α と β をうまく選ぶと，同次形の方程式が得られる．）

問題 2.10 微分方程式

$$(1 + x^2)y' - 2xy - x^2 = 1$$

について以下の問に答えよ．

(i) 解の存在と一意性について調べよ．

(ii) 方程式の一般解を求めよ．

(iii) 初期条件 $y(0) = -\frac{\pi}{2}$ を満たす特殊解を見つけよ．

(iv) $x \to \infty$ のときの (iii) の特殊解の漸近挙動を調べよ．すなわち，無限遠方で解がどのような関数（定数関数，線形関数，二次関数，指数関数など）に近づくかを調べる．（ヒント： $\lim_{x\to\infty} y(x)$ や $\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x}$ などの計算をしてみる．）

問題 2.11 微分方程式 $y' = y - x + 1$ の方向の場を図示せよ．

問題 2.12 初期値問題

$$\begin{aligned} y' &= y - 1 \\ y(0) &= 2 \end{aligned}$$

に対し，次の問いに答えよ．

(i) 区間 $(0, 1)$ を n 等分するオイラー法により得られる近似解 y_n の具体的な形を書け．

(ii) $\lim_{n\to\infty} y_n(1) = y(1)$ が成り立つことを証明せよ．ただし，$y(x)$ は上の初期値問題の真の解である．

(iii) 上の初期値問題の近似解をオイラー法により計算するプログラムを作成し，コンピューターで実行し，得られた近似解のグラフを出力せよ．

問題 2.13 初期値問題

$$\begin{aligned} y' &= y + x \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

に対し逐次近似解の列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を構成し，$\lim_{n\to\infty} y_n$ を計算することによって，この初期値問題の解を求めよ．

問題 2.14 連立微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 4y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 5y \end{aligned}$$

について次の問いに答えよ．

(i) 初期条件 $x(0) = 1, y(0) = 3$ を満たす解を求めよ．ただし，未知関数 x, y は変数 t の関数である．

(ii) $t > 0$ をパラメータとして，曲線 $(x(t), y(t))$ を xy 平面に図示せよ．（コンピューターを使ってもよい）

問題 2.15 微分方程式

$$\begin{cases} \dot{x} = (4 - 7x + 3y)x \\ \dot{y} = (-2 + 3x - \frac{5}{3}y)y \end{cases}$$

の $p \neq 0, q \neq 0$ を満たす平衡点 $P = (p, q)$ を求め，その安定性を調べよ．

References

[1] 村上温夫：微分方程式入門，新曜社，1997.

[2] 岡村博: 微分方程式序説, 共立出版, 2003.

[3] 佐藤光：微分方程式の基礎と応用，サイエンス社，1997.

[4] 白岩謙一：常微分方程式論序説，サイエンス社，1975.

[5] 柳田英二，栄伸一郎：常微分方程式論，朝倉書店，2002.

[6] R.P. Agarwal, D. O'Regan: An Introduction to Ordinary Differential Equations, Springer, 2008.

3 偏微分方程式の解の存在と一意性

概要
今回の講義では，ある超曲面上に値を指定された偏微分方程式の解を求めるコーシー問題を取り上げる．目標は常微分方程式と同じような存在・一意性・初期値への依存性についての定理を述べることであるが，偏微分方程式の場合はより複雑で，一般にはデータが解析関数のときのみ結果が得られることがわかる．特性曲面の概念を導入し，解析関数の基本性質を整理した上で，今回の主定理であるコーシー－コワレフスキーの存在定理を証明する．

3.1 コーシー問題

ここで考える問題を紹介する．以下の内容のより詳細な解説は [3], p. 221; [5], p. 54; [4], p. 42; [6], p. 11; [1], p. 160; [2], p. 221 などで見つけることができる．

まず，Γ を領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ における，滑らかな $(n-1)$-次元の超曲面（hypersurface）とする．超曲面 Γ の点 x_0 における単位法線ベクトルを $\boldsymbol{\nu}(x_0) = \nu = (\nu_1, \ldots, _n\, u_n)$ という記号で表す．準線形偏微分方程式に対するコーシー問題（Cauchy problem）（または一般初期値問題）とは，次の条件を満たす関数 $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を求める問題である．

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \left(D^{k-1}u, \ldots, u, x\right) D^\alpha u + a_0 \left(D^{k-1}u, \ldots, u, x\right) = 0 \qquad \text{in } \Omega, \tag{3.1}$$

$$D^\beta u(x) = g_\beta(x) \qquad \text{for } x \in \Gamma \ \text{ and } \ |\beta| \le k-1. \tag{3.2}$$

つまり，k-階の偏微分方程式を満たし，超曲面で指定された $(k-1)$-階までの微分を持つように関数 u を決める問題である．次の例でわかるように，超曲面での微分を任意に指定することができないため，任意に指定できる法線方向の微分のみに対する条件を課すことが多い．

例 2 変数関数に関する 2 階偏微分方程式

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} = f \tag{3.3}$$

に対するコーシー問題を考える．ただし，$a_{11}, a_{12}, a_{22}, f$ が u_x, u_y, u, x, y の（滑らかな）関数である．

このとき，Γ は曲線であるから，それを $(x, y) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ とパラメータ表示する．条件 (3.2) に対応するコーシーデータ（Cauchy data）は

$$u|_\Gamma = g_0, \quad u_x|_\Gamma = g_1, \quad u_y|_\Gamma = g_2 \tag{3.4}$$

である．これを詳しく書くと，

$$u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = g_0(t), \quad u_x(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = g_1(t), \quad u_y(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = g_2(t)$$

となる．関数 g_0 の微分を計算してみると，

$$g_0'(t) = u_x(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_1'(t) + u_y(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_2'(t) = g_1(t)\gamma_1'(t) + g_2(t)\gamma_2'(t)$$

を得る．すなわち，曲線とコーシーデータがある関係式で結ばれているから，任意に指定できず，適合条件式 $g_0' = g_1\gamma_1' + g_2\gamma_2'$ を満たすように選ばなければならない．g_0' が u の（Γ への）接線方向の微分であることに気づくと，u_x と u_y のそれぞれの 1 階微分を指定する代わりに，u の Γ への法線方向の微分（つまり，$\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}$）のみ指定すればよいことがわかる．法線微分を指定するときは適合条件を気にする必要がない．

一般には，u の j-階の法線微分（normal derivative）を次の式で定義する（[3], p. 221）．

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} \coloneqq \sum_{|\alpha|=j} \binom{j}{\alpha} D^\alpha u\, \nu^\alpha = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=j} \binom{j}{\alpha} \frac{\partial^j u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} \nu_1^{\alpha_1} \dots \nu_n^{\alpha_n}$$

そこで，条件 (3.2) の代わりに，適合条件を必要としない

$$u = g_0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_1, \dots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = g_{k-1} \qquad \text{on } \Gamma \tag{3.5}$$

という条件がよく使われる．

> この法線微分の定義は法線ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ を定数として Γ の近傍に拡張できることを仮定しており，通常の法線微分の定義と異なる．法線ベクトルが Γ 上でしか定義されないことから従う注意点とその解決法は [6], p. 24 で解説されている．

コーシー問題 (3.3),(3.4) の解の構成のアイデア：u の Γ 上のすべての微分を計算し，この微分を用いて解を Γ の近傍でテーラー展開として得る．

まず，Γ 上の 2 階微分を計算するために，方程式と u_x, u_y に対するコーシー条件を微分した式を連立させる：

$$\begin{aligned} a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} &= f \\ \gamma_1' u_{xx} + \gamma_2' u_{xy} &= g_1' \\ \gamma_1' u_{xy} + \gamma_2' u_{yy} &= g_2' \end{aligned}$$

解の 2 階微分を計算できるのは，係数行列の行列式がゼロでないときである．つまり，

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{22} \\ \gamma_1' & \gamma_2' & 0 \\ 0 & \gamma_1' & \gamma_2' \end{pmatrix} = a_{11}(\gamma_2')^2 - 2a_{12}\gamma_1'\gamma_2' + a_{22}(\gamma_1')^2 \neq 0$$

これはちょうど $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ が特性曲線ではないという状況を表している式である（第 1 回の講義・偏微分方程式の分類を参照）．

準線形方程式の場合，Γ 上では a_{11}, a_{12}, a_{22} は $\gamma_1, \gamma_2, g_0, g_1, g_2$ の関数であるから，Γ が特性曲線であるかどうかということは一般に，Γ 上で与えられたコーシーデータに依存する．

Γ が特性曲線でなければ，2 階微分だけでなく，すべての微分が計算できる．例えば，方程式

とコーシー条件をさらに微分することで，3 階微分に対する連立方程式

$$\begin{aligned} a_{11}u_{xxx} + 2a_{12}u_{xxy} + a_{22}u_{xyy} &= \tilde{f} \\ a_{11}u_{xxy} + 2a_{12}u_{xyy} + a_{22}u_{yyy} &= \tilde{\tilde{f}} \\ (\gamma_1')^2 u_{xxx} + 2\gamma_1'\gamma_2' u_{xxy} + (\gamma_2')^2 u_{xyy} &= \tilde{g}_1' \\ (\gamma_1')^2 u_{xxy} + 2\gamma_1'\gamma_2' u_{xyy} + (\gamma_2')^2 u_{yyy} &= \tilde{g}_2' \end{aligned}$$

が得られる．ここで，$\tilde{f}, \tilde{\tilde{f}}, \tilde{g}_1', \tilde{g}_2'$ は f, g_0, g_1 の微分以外に u の 2 階以下の微分を含む関数である．この係数行列の行列式は $[a_{11}(\gamma_2')^2 - 2a_{12}\gamma_1'\gamma_2' + a_{22}(\gamma_1')^2]^2$ であることがわかる．

このようにして，j-階までの微分がわかっていることを利用して $(j+1)$-階微分を求めることで，順番にすべての微分が計算される．よって，形式的ではあるが，解のテーラー展開

$$u(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^2} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(x_0)(x - x_0)^\alpha, \qquad x_0 \in \Gamma$$

を書くことにより，Γ の近傍で解を得る．厳密に解を構成しようとすれば，このテーラー展開が収束することを示す必要があるが，それはコーシー－コワレフスキーの定理に他ならない． ■

例 Γ が特性曲線であるとき，上の例の構成方法が利用できず，コーシー問題が解をもたないこともあり得る．例えば，偏微分方程式

$$u_{xy} = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^2$$

の特性曲線は $x = c, y = c$（c は定数）である．

$$\Gamma = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$$

とおくと，Γ は特性曲線になる．

$y = 0$ とした方程式 $u_{xy}(x, 0) = 0$ を x について 0 から任意の x まで積分すると，

$$u_y(x, 0) = u_y(0, 0)$$

を得る．よって，u が解であれば，u_y は Γ に沿って定数でなければならない．すると，y についての微分が定数でないようなコーシー条件を Γ 上で指定した問題は解をもたない． ■

3.2 超曲面上の微分を求める

本節では，次の疑問に答える．つまり，u が偏微分方程式

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \left(D^{k-1}u, \dots, u, x\right) D^\alpha u + a_0 \left(D^{k-1}u, \dots, u, x\right) = 0 \qquad \text{in } \Omega, \tag{3.6}$$

の滑らかな解ならば，超曲面 Γ 上のコーシーデータ

$$u = g_0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_1, \dots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = g_{k-1} \qquad \text{on } \Gamma \tag{3.7}$$

より u のすべての微分を Γ で求めることができるか？，という疑問である．

テーラー展開の形で解を求めるなら，これは不可欠な情報である．

上の疑問に答えるには，まず Γ が超平面（hyperplane）という特別な場合を考えてから，一般の超曲面（hypersurface）の場合を超平面の場合に帰着できることを示す．

3.2.1 超平面

$\Gamma = \{x_n = 0\}$ とする．このとき，$\nu = e_n = (0, \dots, 0, 1)$ のため，境界条件 (3.7) は次の形をとる：

$$u = g_0,\ \frac{\partial u}{\partial x_n} = g_1, \dots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x_n^{k-1}} = g_{k-1} \qquad \text{on } \{x_n = 0\} \tag{3.8}$$

平面 Γ で解 u の偏微分を計算していく．

- 1 階微分　Γ 上で u 自体が与えられている（$u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = g_0(x_1, \dots, x_{n-1})$）ので，接線方向に微分すると（すなわち，$x_1, \dots, x_{n-1}$ について微分すると），

  $$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial g_0}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \dots, n-1$$

  がわかる．x_n についての微分は (3.8) で g_1 として与えられているので，Γ において勾配 Du 全体を計算できた．

- 2 階微分　同様にして，

  $$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_i} = \frac{\partial g_1}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n-1, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = g_2,$$

  というふうに 2 階微分も求まる．

- $(k-1)$-階までの微分 も同じように計算される．

- k-階微分　これまでの方法で $\frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}$ 以外の k-階微分なら，計算できる．x_n についての k-階微分（つまり，法線方向の k-階微分）は，偏微分方程式 (3.6) を用いて計算される．係数 $a_{(0,\dots,0,k)}$ がゼロでなければ，

  $$\frac{\partial^k u}{\partial x_n^k} = -\frac{1}{a_{(0,\dots,0,k)}} \Big[\sum_{\substack{|\alpha| = k \\ \alpha \neq (0,\dots,0,k)}} a_\alpha D^\alpha u + a_0 \Big]. \tag{3.9}$$

  係数 a_0, a_α は $D^{k-1}u, \dots, u$ に依存するが，上で見てきたようにそれらの値はすべてコーシーデータから算出できる．よって，Γ において

  $$a_{(0,\dots,0,k)} \neq 0 \tag{3.10}$$

  であれば，$D^k u$ が Γ 上で計算できる．

  そこで，すべての引数の値に対し $a_{(0,\dots,0,k)}$ が非零のとき，超平面 Γ が偏微分方程式 (3.6) に対して**非特性**（noncharacteristic）であるという．

- k-階より高い微分　式 (3.9) の右辺を g_k とおくと，コーシーデータに

  $$\frac{\partial^k u}{\partial x_n^k} = g_k \qquad \text{on } \Gamma$$

  という式を加えることができる．$(k+1)$-階微分を計算するために，g_k までのコーシーデータを微分すればよい．それで，$\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_n^{k+1}}$ 以外のすべての偏微分が得られるが，この $(k+1)$-階の法線微分は方程式 (3.6) を x_n について微分し，$a_{(0,\dots,0,k)}$ で割ってあげれば求まる．同様にして帰納的にすべての微分が計算される．

3.2.2 一般の超曲面

単位法線ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ をもつ一般の超曲面の場合を考える．超曲面 Γ を関数 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ のゼロ等高面として表すことが便利なときがある：

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \phi(x) = 0\}.$$

ただし，Γ 上で $\nabla\phi \neq 0$ であると仮定する．そのとき，単位法線ベクトルは

$$\boldsymbol{\nu} = \pm\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \qquad \text{on } \Gamma$$

で与えられる．

定義 3.1 超曲面 Γ が偏微分方程式 *(3.6)* に対して**非特性**（*noncharacteristic*）であるとは，

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha \neq 0 \qquad \textit{on } \Gamma$$

が係数 a_α のすべての引数について成り立つということである． ■

注 等高面関数 ϕ を使った表示のとき，非特性条件は次のようになる：

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha (\nabla\phi)^\alpha \neq 0 \qquad \text{on } \Gamma. \qquad ■$$

> この条件の詳しい導出と一般の非線形な方程式への拡張は [5], p.57–61 で扱われる．

定理 3.2 滑らかな超曲面 Γ が偏微分方程式 *(3.6)* に対して非特性であるとする．また，u が方程式 *(3.6)* の滑らかな解で，コーシー条件 *(3.7)* を満たすとする．このとき，超曲面 Γ，関数 $g_0, \dots, g_{k-1}$ と係数 a_0, a_α を用いて Γ に沿って u のすべての偏微分を一意的に計算できる．

注 Γ が「滑らかである」とは，具体的に次のような意味である．すべての点 $x^0 \in \Gamma$ に対し半径 $r > 0$ と C^k-関数 $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ が存在し，(座標を適宜，回転させた上で)

$$\Gamma \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r);\ x_n = \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

が成り立つとき，Γ が C^k-級であるという．ここで，$B(x^0, r)$ は半径 r と中心 x_0 をもつ球である（図 1）．なおまた，γ がすべての $k = 1, 2, \dots$ に対し C^k-級であれば，Γ は C^∞-級，γ が解析関数であれば，Γ は解析的であるという． ■

証明

超平面のケースに帰着することで証明する．$x^0, r > 0$ と γ を上のように選び，$y = \Phi(x)$ の変換を次のように定義する：

$$\begin{aligned} y_i &= \Phi^i(x) \coloneqq x_i, \qquad i = 1, \dots, n-1, \\ y_n &= \Phi^n(x) \coloneqq x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

この逆変換 $\Psi \coloneqq \Phi^{-1}$ は

$$\begin{aligned} x_i &= \Psi^i(y) = y_i, \qquad i = 1, \dots, n-1, \\ x_n &= \Psi^n(y) = y_n + \gamma(y_1, \dots, y_{n-1}). \end{aligned}$$

となり，Φ は点 x^0 の近傍で Γ を「まっすぐ」にする（超平面に変換する）変換である（図 1）．

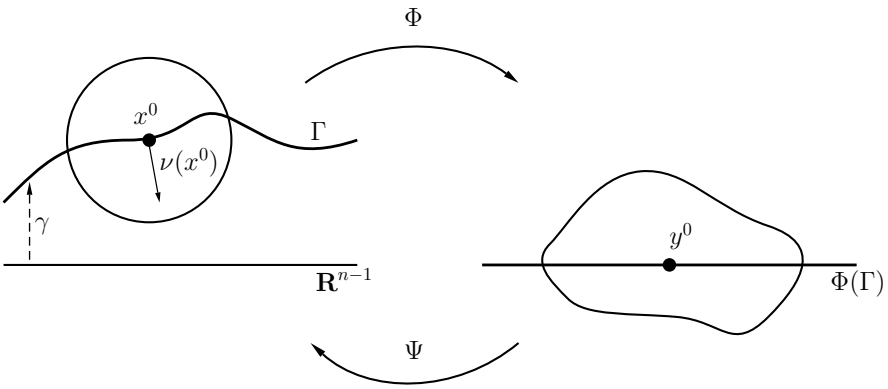


Figure 1: 曲面をまっすぐにする変換.

今，新しい未知関数 v を $v(y) \coloneqq u(\Psi(y))$ で定義する．すなわち，

$$u(x) = v(\Phi(x)). \tag{3.11}$$

この式を微分することで，v が準線形偏微分方程式

$$\sum_{|\alpha|=k} b_\alpha D^\alpha v + b_0 = 0$$

を満たすことがわかる．
この偏微分方程式に対し，

$$b_{(0,\dots,0,k)} \neq 0 \qquad \text{on } \{y_n = 0\}$$

が成り立つことを示す．実際，$|\alpha| = k$ を満たすすべての多重指数 α に対し，

$$D^\alpha u = \frac{\partial^k v}{\partial y_n^k} (D\Phi^n)^\alpha + \text{“}\tfrac{\partial^k v}{\partial y_n^k}\text{”を含まない項.}$$

もとの偏微分方程式 (3.6) より，

$$0 = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha (D\Phi^n)^\alpha \frac{\partial^k v}{\partial y_n^k} + \text{“}\frac{\partial^k v}{\partial y_n^k}\text{”を含まない項.}$$

よって,

$$b_{(0,\dots,0,k)} = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha (D\Phi^n)^\alpha.$$

しかし，$D\Phi^n = (-\gamma_{x_1}, \dots, -\gamma_{x_{n-1}}, 1)$ なので，$D\Phi^n$ は $\boldsymbol{\nu}$ と平行なベクトルである．つまり，$D\Phi^n = c\boldsymbol{\nu}$, $c \neq 0$ で，仮定より

$$b_{(0,\dots,0,k)} = c^k \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha \neq 0.$$

コーシーデータ $g_0, g_1, \dots, g_{k-1}$ より $\{y_n = 0\}$ 上の

$$v, \quad \frac{\partial v}{\partial y_n}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{k-1} v}{\partial y_n^{k-1}}$$

の値が決まるので，上の超平面に関する議論より，v の $\{y_n = 0\}$ 上の微分をすべて計算できる．そして，(3.11) の式を用いれば，u の x^0 付近の Γ 上のすべての微分が計算される． □

3.3 解析関数

コーシー問題の解をテーラー展開の形で見つけようとしているので，まずはそのような展開で定められる関数とその性質を整理しておく．以下で解説するように，解析関数はベキ級数で局所的に表現できること，またはその偏微分の階に依存する増加のしかたによって特徴づけられる．

定義 3.3 (解析関数) 関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が点 y の近傍において**（実）解析関数**（*(real) analytic function*）であるとは，$r > 0$ と定数 $f_\alpha \in \mathbb{R}$ が存在し，$|x - y| < r$ を満たすすべての点 x に対し

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} f_\alpha (x - y)^\alpha \tag{3.12}$$

が成り立つということである．
関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が開集合 Ω において解析関数であるとは，すべての $y \in \Omega$ に対し f が y において解析関数であることを意味し，$f \in C^\omega(\Omega)$ という記号で表される． ■

上の定義では $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ の多重指数の記号を用いている．

定理 3.4 $f \in C^\omega(\Omega)$ ならば，$f \in C^\infty(\Omega)$ である．さらに，任意の点 $y \in \Omega$ に対し近傍 U と正の実数 M, ρ が存在し，すべての $x \in U$ において次が成り立つ．

$$f(x) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f(y))(x - y)^\alpha, \tag{3.13}$$

$$|D^\beta f(x)| \leq M |\beta|! \, \rho^{-|\beta|} \qquad \forall \beta \in \mathbb{N}_0^n. \tag{3.14}$$

すなわち，点 y の近傍 U では，f がその y でのテーラー展開に等しい．

証明

簡単のため，$y = 0$ とする．f が $y = 0$ の近傍で解析関数であるから，ある $r_1 > 0$ に対して級数 (3.12) が $|x| \le r_1$ において一様収束し，連続な関数を与える．点 x が

$$|x_i| < r_1 \qquad \text{for all } i$$

を満たすならば，$q \in (0, 1)$ が存在して，

$$|x_i| \le q r_1 \qquad \text{for all } i$$

が成り立つ．

$$\mu := \sum_\alpha |f_\alpha| r_1^{|\alpha|}, \qquad M := \frac{\mu}{(1-q)^n}, \qquad \rho := (1-q) r_1$$

とすると（問題3.2を参照），

$$\begin{aligned} \sum_\alpha |D^\beta f_\alpha x^\alpha| &\le \sum_{\alpha \ge \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} |f_\alpha| q^{|\alpha-\beta|} r_1^{|\alpha-\beta|} \\ &\le \frac{\mu}{r_1^{|\beta|}} \sum_{\alpha \ge \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} q^{|\alpha-\beta|} \\ &= \frac{\mu}{r_1^{|\beta|}} \frac{\beta!}{(1-q)^{n+|\beta|}} = M|\beta|!\, \rho^{-|\beta|}. \end{aligned}$$

よって微分した級数が r_1-近傍のコンパクトな部分集合で一様収束し，項ごとの微分によりテーラー展開との一致が確かめられる． □

その他の解析関数の性質を次の定理でまとめる．

定理 3.5 開集合 Ω に対して，$f \in C^\omega(\Omega)$ とする．

(1) さらに，Ω が連結集合であるとし，$z \in \Omega$ とする．そのとき，Ω 全体における f の値は z という一点での値 $D^\alpha f(z)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ により一意的に決まる．

(2) 次の二つの条件が同値である：

- $f \in C^\omega(\Omega)$
- $f \in C^\infty(\Omega)$ およびすべてのコンパクト集合 $S \subset \Omega$ に対し M, ρ が存在し，$f \in C_{M,\rho}(y)$ がすべての $y \in S$ で成り立つ．

  $f \in C_{M,\rho}(y)$ とは *(3.14)* が y の近傍で成り立つという意味である．

(3) g も解析関数ならば，$f(x)$ が g の定義域に入るようなすべての x の近傍で $g(f(x))$ は解析関数である．（この事実はコーシー-コワレフスキーの定理の証明で頻用される．）

> 定理の証明は [5], p.64–69 を参照．p.70 以降では $\mathbb{C}$ での解析関数との関係が解説されている．

例 (1) $f(x)=e^{\alpha x}$ は解析関数である：

$$e^{\alpha x}=e^{\alpha y}e^{\alpha(x-y)}=e^{\alpha y}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\alpha(x-y)]^k}{k!}.$$

(2) C^∞-級関数 $f(x)=e^{-1/x^2}$ は原点でのすべての微分が 0 である．よって，解析関数ではない．

(3) $f(x)=e^{\alpha x^m}, m\in\mathbb{N}$ が解析関数である（定理3.5(3)）．

(4) $r>0$ に対して

$$f(x):=\frac{r}{r-(x_1+\cdots+x_n)},\qquad |x|<\frac{r}{\sqrt{n}}$$

と定義する．多項定理を適用すると，

$$f(x)=\frac{1}{1-\frac{x_1+\cdots+x_n}{r}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{r}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k}\sum_{|\alpha|=k}\binom{|\alpha|}{\alpha}x^\alpha=\sum_{\alpha}\frac{|\alpha|!}{r^{|\alpha|}\alpha!}x^\alpha.$$

この級数は $|x|<r/\sqrt{n}$ において絶対収束する．実際，$|x_1|+\cdots+|x_n|\le|x|\sqrt{n}<r$ のため，

$$\sum_{\alpha}\frac{|\alpha|!}{r^{|\alpha|}\alpha!}|x^\alpha|=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{|x_1|+\cdots+|x_n|}{r}\right)^k<\infty.\qquad\blacksquare$$

定義 3.6 (優級数) $f=\sum_\alpha f_\alpha x^\alpha, g=\sum_\alpha g_\alpha x^\alpha$ を二つの冪級数とする．g が f の**優級数**（*majorant, g majorizes f*）であるとは，

$$|f_\alpha|\le g_\alpha\qquad\forall\alpha\in\mathbb{N}_0^n$$

が成り立つことを指す.（記号：$f\ll g$）
ベクトル値関数 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$ の場合 $\boldsymbol{f}\ll\boldsymbol{g}$ は $f^k\ll g^k\,\forall k$ という成分ごとの意味をもつ.　$\blacksquare$

補題 3.7 (優級数)　*(1)* $f\ll g$ で，g が $|x|<r$ において収束すれば，f も $|x|<r$ において収束する．

(2) f が $|x|<r$ において収束し，$0<s\sqrt{n}<r$ ならば，f は $|x|<s/\sqrt{n}$ において優級数をもつ．

証明

(1) は明らかなので，(2) のみ証明する．$y=s(1,\dots,1)$ とおくと，$|y|=s\sqrt{n}<r$ より $\sum_\alpha f_\alpha y^\alpha$ が収束する．したがって，定数 C が存在し，$|f_\alpha y^\alpha|\le C$ が成立する．特に，

$$|f_\alpha|\le\frac{C}{y_1^{\alpha_1}\cdots y_n^{\alpha_n}}\le\frac{C}{s^{|\alpha|}}\le C\frac{|\alpha|!}{s^{|\alpha|}\alpha!}.$$

すると（上の例 (4) を参照），

$$g(x):=\frac{Cs}{s-(x_1+\cdots+x_n)}=C\sum_\alpha\frac{|\alpha|!}{s^{|\alpha|}\alpha!}x^\alpha$$

が $|x|<s/\sqrt{n}$ において f の優級数である．　□

3.4 コーシー－コワレフスキーの存在定理

定理 3.8 (Cauchy-Kowalevski の存在定理) 準線形な偏微分方程式 *(3.1)* を考える．超曲面 Γ がある点 $x_0 \in \Gamma$ の近傍で解析的であるとする．つまり，x_0 の近傍で解析関数 ϕ が存在し，x_0 の近傍において $\Gamma = \{x;\ \phi(x) = 0\}$ と書ける（ただし，$\nabla\phi(x_0) \neq 0$ とする）．Γ 上で x_0 で適合条件を満たす解析的なコーシーデータ $D^\beta u,\ |\beta| < k$ が与えられたとする．方程式の係数 a_α がその引数の解析関数（x_0 に対応する点の近傍で）であるとする．さらに，Γ が x_0 において非特性条件を満たすとする（したがって，x_0 の近傍でも非特性曲面である）．そのとき，x_0 の近傍において解析関数である解が x_0 の近傍で存在する．この解は解析関数のクラスで一意である．

注

(1) 一般の非線形な偏微分方程式は微分することによって準線形の場合に帰着できる．また，非特性条件を一般化したコーシー-コワレフスキーの定理の非線形バージョンもある．詳しくは [6], p.17 を参照.

(2) コーシー-コワレフスキーの定理は局所的であり，大域的な解の存在を保証するものではない．また，解析関数でない解が他に存在することを否定しない．さらに，x_0 で解析関数である解が，x_0 から離れたところで解析関数でなくなる可能性も否定しない.

(3) 解析性の仮定を C^m-級または C^∞-級に緩めると，同じような定理が成立しない.

(4) 物理などの応用で現れる方程式の係数が解析的なことが多いが，解析的なコーシーデータに制限することは非現実的である（一点の近傍での情報よりすべての点での情報が決まるから）．しかし，解析関数の解はより一般的な解の議論において役に立つこともある（例えば，解析的な楕円型方程式の解は解析関数である）.

(5) Γ が非特性超曲面ならば，定理が与える局所解を「張り合わせる」ことで，超曲面全体の近傍での解を構成できる（[5], p.75）.

(6) コーシー-コワレフスキーの定理は解析関数である解しか扱っていないが，k-階方程式なら C^k-級の関数での一意性を期待するのが自然である．一般の方程式に対しては示されていないが，解析的な係数をもつ線形方程式なら C^k-級での一意性が知られている．それは **Holmgren（ホルムグレン）の定理**である．その証明は一意性を示す領域を非特性曲面で覆って，グリーンの定理とコーシー-コワレフスキーの定理をうまく合わせて利用している.

> この証明は [5], p.79–87 ではわかりやすく解説されている．より詳しい解説は [6], p.33–51 でなされている．[1], p.173 も参照.

(7) コーシーデータへの解の連続的な依存性は一般には望めない（[4], p.54 を参照）.

(8) 滑らかな係数と滑らかな右辺をもつ方程式なら解が多く存在すると信じられたが，1957 年に Hans Lewy はそのような直感が間違っていることを例をもって示した．具体的には，$u_x + iu_y - 2i(x+iy)u_t = f(t)$ を満たす C^1-級の関数 $u(x,y,t)$ が存在すれば，f が $t = 0$ の近傍で解析関数でなければならないということを発見した．Hörmander がこの結果を一般化して，偏微分方程式の局所可解性の理論に発展した（[4], p.58）.

上の定理の証明は次のステップを踏む：

1. 超曲面 Γ を x_0 の近傍でまっすぐにする．
2. 偏微分方程式を 1 階の連立微分方程式に直す．
3. 解のテーラー展開の係数が偏微分方程式とコーシーデータを微分することにより一意的に求まることを示す．
4. 三つ目のステップで得た級数（テーラー展開）がコーシー問題の解に収束することを示す．

ステップ 1 と 3 のやり方はすでに上で見てきたが，ここではステップ 2 について触れる．簡単のために，$x_0 = 0$ として，$\Gamma = \{x_n = 0\}$ となるように原点の近傍で超曲面をまっすぐにしておく．また，未知関数 u から適切な解析関数を引いてあげれば，コーシー条件を同次のものに変形できるので，次の問題を出発点とする：

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \left(D^{k-1}u, \dots, u, x\right) D^\alpha u + a_0 \left(D^{k-1}u, \dots, u, x\right) = 0 \qquad \text{for } |x| < r, \tag{3.15}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial x_n} = \cdots = \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x_n^{k-1}} = 0 \qquad \text{for } |x'| < r, \quad \text{on } \{x_n = 0\}. \tag{3.16}$$

ここで，$x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ という記号を用いた．また，$r > 0$ は原点の近傍の大きさを表すパラメータで，証明において求まる値である．

この問題を 1 階の連立方程式に帰着させる．そのため，k より低いすべての偏微分を含むベクトル値関数

$$\boldsymbol{u} \coloneqq (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x_n^{k-1}}) = (u^1, u^2, \dots, u^m)$$

を新しい未知関数として導入する．境界条件 (3.16) より，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ が $|x'| < r$, $x_n = 0$ で成り立つ．

新しい連立方程式は未知関数の x_n についての微分についての方程式として作るので，これらの微分の式を求める．$u^l_{x_n}, l = 1, \dots, m-1$ が $\{\boldsymbol{u}_{x_j}\}_{j=1}^{n-1}$ を用いて計算できる．そして，残りの $u^m_{x_n}$ は，原点近傍で成り立つ非特性条件 $a_{(0,\dots,0,k)} \neq 0$ のため偏微分方程式から求まる．また，$u^{m+1} \coloneqq x_n$ という新しい未知関数の成分を導入することにより，方程式の係数が x_n によらないようにできる．このようにして，次の連立微分方程式を得る：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{x_n} &= \sum_{j=1}^{n-1} \boldsymbol{B}_j(\boldsymbol{u}, x')\boldsymbol{u}_{x_j} + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{u}, x') \qquad \text{for} \quad |x| < r, \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{0} \qquad \text{for} \quad |x'| < r, \ \ x_n = 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

ここで，$\boldsymbol{B}_j : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{M}^{m\times m}$ と $\boldsymbol{c} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^m$ が解析関数である．

> 連立方程式 (3.17) がもとの方程式と同値であることは [4], p.48–50 で示されている．

コーシー-コワレフスキーの定理は次のより簡単なバージョンより従う．

定理 3.9 *$\boldsymbol{B}_j$ と $\boldsymbol{c}$ が解析関数ならば，$r > 0$ が存在し，$|x| < r$ において問題 (3.17) の解となる解析関数 $\boldsymbol{u} = \sum_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha x^\alpha$ がただ一つ存在する．*

解の展開における係数 $\boldsymbol{u}_\alpha$ が問題のデータより計算できることはこのノートの前半で確認した．示すべきことは，このように求めた級数 $\boldsymbol{u} = \sum_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha x^\alpha$ が収束することだけである．この証明では補題3.7で登場した優級数を使う（詳しいことは [3], p.229; [5], p.74 を参照）．

> 一意性を得るための条件を弱くすることができる（[4], p.44）．

3.5 演習問題

問題 3.1 ([5], p.61) 関数 $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ とその $(k-1)$ 階までのすべての微分が $\phi(x) = 0$ により与えられる超曲面 Γ の上で消える（ゼロである）とき，

$$D^\alpha u = \mu(\nabla\phi)^\alpha \qquad \text{for } |\alpha| = k$$

が成り立つことを示せ．ここで，比例定数 μ は u に依存するが，α には無関係である．（ヒント：Γ を超平面 $x_n = 0$ に変換する．）

問題 3.2 ([5], p.63) 多重指数 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ に対し次の関係式を示せ．

(1) $$\sum_{\alpha:\alpha\geq\beta} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta} = D^\beta \frac{1}{(1-x)^1} = \frac{\beta!}{(1-x)^{1+\beta}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ |x_i| < 1\ \forall i = 1, \dots, n.$$

(2) $$\sum_{\alpha:\alpha\geq\beta} \frac{|\alpha|!}{(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta} = D^\beta \frac{1}{1-x_1-\cdots-x_n} = \frac{|\beta|!}{(1-x_1-\cdots-x_n)^{1+|\beta|}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ |x_1|+\cdots+|x_n| < 1.$$

ただし，「$\alpha \geq \beta$」は「$\alpha_i \geq \beta_i\ \forall i = 1, \dots, n$」を意味する．

問題 3.3 次の主張を証明せよ．

(1) 関数 f_1 と f_2 が領域 Ω において解析関数ならば，$f_1 + f_2$ と $f_1 f_2$ も Ω において解析関数である．

(2) $f \ll F$ ならば，任意の $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ に対し $D^\alpha f \ll D^\alpha F$ が成り立つ．

(3) $f_i \ll F_i$, $i = 1, 2$ ならば，$f_1 + f_2 \ll F_1 + F_2$ かつ $f_1 f_2 \ll F_1 F_2$ が成り立つ．

問題 3.4 ([5], p.66) Ω_1 と Ω_2 を $\mathbb{R}^n$ の凸な開集合とし，$f_1 \in C^\omega(\Omega_1)$, $f_2 \in C^\omega(\Omega_2)$ とする．$\Omega_1 \cap \Omega_2$ に属する一つの点 y において $D^\alpha f_1(y) = D^\alpha f_2(y)$ がすべての α について成り立つならば，$f_1(x) = f_2(x)\ \forall x \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ が成り立つことを示せ．
（集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合であるとは，すべての $x, y \in \Omega$ と任意の $\theta \in (0, 1)$ に対し $\theta x + (1-\theta)y \in \Omega$ が成り立つという意味である．）

問題 3.5 ([5], p.66) 級数

$$\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$$

が $z_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$ を満たす点 z において収束するなら，この級数が $\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x_i| < |z_i| \text{ for all } i\}$ の集合において解析関数を定義することを示せ．

問題 3.6 ([5], p.67) 関数 f が凸な開集合 Ω において解析関数であるとする．ある 2 点 $x, z \in \Omega$ に対し級数

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!}(D^{\alpha} f(z))(x-z)^{\alpha}$$

が収束するとする．そのとき，上の級数の和が $f(x)$ であることを示せ．

問題 3.7 ([5], p.69) $C_{M,\rho}(y), y > 0$ への属性を確かめることで，関数 $f(x) = 1/x$ と $f(x) = \sqrt{x}$ が $x > 0$ において解析関数であることを示せ．

問題 3.8 ([5], p.69) 変数 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ のスカラー有理関数が分母がゼロでない領域において解析関数であることを示せ．

問題 3.9 ([5], p.69) $p \in \mathbb{R}$ とする．関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-p}} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

が $C^{\infty}(\mathbb{R})$-級であるが，$x = 0$ において解析関数ではないことを示せ．

問題 3.10 ([5], p.69) 関数 f, g は原点において解析関数で，

$$|x_i| < r \qquad \text{for all } \ i = 1, \ldots, n \tag{3.18}$$

においてそのテーラー展開で定義されるとする．$f \ll g$ のとき，

$$|f(x_1, \ldots, x_n)| \leq g(|x_1|, \ldots, |x_n|)$$

が (3.18) を満たすすべての x について成り立つことを示せ．

問題 3.11 ([5], p.70) 定数 $c > 0$ に対し関数 f を次の式で定義する：

$$f(x) = c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}, \qquad |x| < 1.$$

c が十分小さければ，$f^2 \ll f$ が成立することを示せ．

問題* 3.12 直線 $\{t = 0\}$ が熱方程式 $u_t = u_{xx}$ に対して特性曲線であることを示せ．また，コーシー条件 $u = \frac{1}{1+x^2}$ on $\{t = 0\}$ を満たす解析関数 $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在しないことを示せ．
（ヒント：解析関数である解が存在することを仮定し，その展開の係数を求める．このように得られた級数が原点以外のすべての点で発散する．この例はコワレフスキーによる．）

問題 3.13 ([5], p.78) 関数 $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ を波動方程式

$$u_{x_n x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i}$$

の解とする．$x_n = \phi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ で定義される超曲面 Γ でコーシーデータ

$$u = f(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad u_{x_n} = g(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

を指定したコーシー問題を考える．関数 f, g, ϕ が点 $x_0 \in \Gamma$ において解析関数で，Γ が x_0 で非特性条件

$$\sum_{i=1}^{n-1} \phi_{x_i}^2 \neq 1$$

を満たすとする．
このコーシー問題を標準形 (3.17) に帰着し，得られる連立方程式を具体的に書け．

問題* **3.14** ([5], p.78，[4], p.54 も参照) ラプラス方程式 $u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0$ の解を $u(x_1, x_2)$ とおく．コーシーデータは，極座標 $x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta$ を用いて単位円上で指定する：

$$u = f(\theta), \quad \frac{\partial u}{\partial r} = g(\theta) \qquad \text{for } r = 1.$$

ただし，f, g は周期 2π の解析関数である．

(1) すべての θ と十分小さい $|r-1|$ に対し解析的な解が存在することを示せ．

(2) f, g が θ の三角関数による多項式の場合，解は原点を取り除いた x_1x_2-平面全体で定義されることを示せ．（ヒント：$e^{in\theta}r^{\pm n}$ という特殊解を用いる．）

問題* **3.15** ([6], p.16) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $g'(0) \neq 0$ を満たす 0 の近傍で解析的な関数で，$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ が $(0, 0, g(0))$ の近傍で解析関数であるとする．コーシー-コワレフスキーの定理を用いて，初期値問題

$$u_t u_x = f(t, x, u), \qquad u(0, x) = g(x)$$

が $(0, 0)$ の近傍で解析的な解をもつことを示せ．
上の初期値問題が $(0, 0)$ の近傍で C^1-級の解すらもたないような，$g'(0) = 0, g''(0) \neq 0$ を満たす解析関数 g と解析関数 f の例を見つけよ．

問題 **3.16** ([4], p.55) $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_n = 0\}$ とする．Γ 上でデータが指定されるようなラプラス方程式 $\Delta u = f$ に対するコーシー問題を標準形 (3.17) に変換せよ．

問題* **3.17** ([4], p.55, Exercise 3)

References

[1] 熊ノ郷準: 偏微分方程式, 共立出版, 1978.

[2] 溝畑茂：偏微分方程式論，岩波書店，1965.

[3] L. C. Evans: Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.

[4] G. B. Folland: Introduction to Partial Differential Equations, Princeton University Press, 1995.

[5] F. John: Partial Differential Equations, Springer, 1982.

[6] J. Rauch: Partial Differential Equations, Springer, 1997.

4 ラプラス方程式

概要
この講義はラプラス方程式とポアソン方程式の入門となる．最初に，これらの方程式がどのような物理的な状況のもとでモデル方程式として現れるかを見る．それから，基本解という概念を導入し，全空間におけるポアソン方程式の解の公式を紹介する．

これからはしばらく，

$$\text{ラプラス（Laplace）方程式} \qquad \Delta u = 0 \tag{4.1}$$

$$\text{ポアソン（Poisson）方程式} \qquad -\Delta u = f \tag{4.2}$$

という重要な偏微分方程式について調べる．ただし，ここでは $u(x), x \in \mathbb{R}^n$ は未知関数で，

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$$

はその**ラプラシアン**または**ラプラス作用素**である．

方程式 (4.1) を満たす C^2-関数を**調和関数**とよぶ．

4.1 ポアソン方程式の導出

ラプラス方程式の物理的な意味について見ていこう．一般には，u がある物理量の密度（例えば，化学物質の濃度）を表し，その物理量が平衡状態にある場合にラプラス方程式が現れる．

このとき，任意の領域 V の境界 ∂V における物理量の総流量 $\boldsymbol{F}$ は 0 であるので，

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0.$$

Gauss の定理により，

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dx = \int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0.$$

$\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ をどんな領域で積分してもゼロになるので，各点で

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0.$$

流量 $\boldsymbol{F}$ が u の勾配 ∇u に比例し，向きが反対になることが多い．そのようなときは，

$$\boldsymbol{F} = -a\nabla u \tag{4.3}$$

であり，上の式にこれを代入すれば，

$$\operatorname{div}\nabla u = \Delta u = 0,$$

ラプラス方程式が得られる．

u が { 化学物質の濃度 / 温度 / 静電ポテンシャル } を表す場合，(4.3) の式は { Fick の拡散の法則 / Fourier の熱伝導の法則 / Ohm の電流に関する法則 } である．

> ラプラス方程式とポアソン方程式が物理学で遍在していることは [2], Volume II, Chapter 12 でも詳しく取り上げられている．

つぎに，視点を変えて，与えられた質量の空間分布 ρ に対する重力ポテンシャル u が満たす方程式を導いてみる．

独立変数 (independent variable) ： 3 次元空間の位置座標 x, y, z
未知関数 (unknown function) ： 重力ポテンシャル $u(x, y, z)$

質量の分布が定める力の場は $\boldsymbol{f} = -\nabla u$ であり，Newton の万有引力の法則に従う．それは，質量それぞれ m, M の二つの質点 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ と $\boldsymbol{y} = (\xi, \eta, \zeta)$ が距離 r で真空中に置かれたとき，相互の間に大きさ mM/r^2 に比例する引力が働くという法則である．簡単のため，比例定数と質点 $\boldsymbol{x}$ の質量をどちらも 1 とおくと，点 $\boldsymbol{x}$ に働く力のベクトルは

$$-M\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3}$$

である．ただし，$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ はユークリッドノルムを意味する．

一般に，密度 $\rho(x, y, z)$ で分布する質量が空間に作る場は，上式において M を $\rho(\boldsymbol{y})\Delta V_{\boldsymbol{y}}$ で置き換えたものの総和

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \approx -\sum \rho(\boldsymbol{y})\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3}\Delta V_{\boldsymbol{y}} \to -\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3}\rho(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}$$

で与えられる．位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $\nabla(1/|\boldsymbol{x}|) = -\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|^3$ が成り立つので，上式を変形して

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \nabla_{\boldsymbol{x}} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\,d\boldsymbol{y}$$

を得る．すなわち，

$$u(\boldsymbol{x}) = -\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\,d\boldsymbol{y}. \tag{4.4}$$

これを質量分布 ρ に対する **Newton ポテンシャル**と呼ぶ．

この u がどんな偏微分方程式を満たすかを調べる．方程式が成り立つ点 $\boldsymbol{x}$ について，二つの場合にわけて考える．

1. $\boldsymbol{x}$ が関数 ρ の台から離れている（つまり，$\boldsymbol{x}$ のある近傍では ρ は恒等的にゼロである）：計算してみると，$\Delta(1/|\boldsymbol{x}|) = \nabla\cdot(\nabla(1/|\boldsymbol{x}|) = \nabla\cdot(-\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|^3) = 0$ がわかるので，(4.4) にラプラシアンをかけると，
$$\Delta u = 0$$

という **Laplace 方程式**が成り立つことを得る（$\boldsymbol{x}$ が ρ の台から離れているから，ρ さえ滑らかであれば，被積分関数は特異性をもたない滑らかな関数であることに注意）.

2. $\boldsymbol{x}$ が関数 ρ の台にかかる：このとき，$1/|\boldsymbol{x}|^3$ が原点で可積分でないため，上のように積分記号下での微分は正当ではなく，慎重に計算しなければならない．簡単のため，ρ が台がコンパクトな 2 回微分可能な関数であるとする.

   まず，ポテンシャルの式（$\boldsymbol{y}$ の代わりに $\boldsymbol{z}$ という記号を用いた）

$$u(\boldsymbol{x}) = -\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\boldsymbol{z})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|}\,d\boldsymbol{z}$$

   で $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}$ という変換を行うと，次の式が得られる：

$$u(\boldsymbol{x}) = -\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{y}|}\,d\boldsymbol{y}.$$

   u の x についての偏微分を計算してみる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(\boldsymbol{x}) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_1) - u(\boldsymbol{x})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{-1}{|\boldsymbol{y}|} \frac{\rho(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{y}) - \rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{h}\,d\boldsymbol{y} \\
&= -\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\boldsymbol{y}|} \lim_{h\to 0} \frac{\rho(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{y}) - \rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{h}\,d\boldsymbol{y} \\
&= -\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\boldsymbol{y}|} \frac{\partial \rho}{\partial x}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

   極限を積分記号下にもっていくことができるのは，$[\rho(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{y}) - \rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})]/h$ が $\mathbb{R}^3$ で一様に収束するからである．2 階微分に対しても，同様に計算できるので，結局

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = -\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\Delta_{\boldsymbol{x}}\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} = -\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\Delta_{\boldsymbol{y}}\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}.$$

   $1/|\boldsymbol{y}|$ が原点で発散するので，原点を中心として半径 $\varepsilon > 0$ の球 $B_\varepsilon(0)$ を考え，上の積分をこの球の内部と外部とに分割する.

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = -\iiint_{|\boldsymbol{y}|<\varepsilon} \frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\Delta_{\boldsymbol{y}}\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} - \iiint_{|\boldsymbol{y}|\ge\varepsilon} \frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\Delta_{\boldsymbol{y}}\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}.$$

   - 最初に球の内部における積分を考える．関数 ρ が滑らかであるため，

$$\begin{aligned}
\left|\iiint_{|\boldsymbol{y}|<\varepsilon} \frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\Delta_{\boldsymbol{y}}\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\right| &\le \sup_{\mathbb{R}^3}|\Delta\rho| \iiint_{|\boldsymbol{y}|<\varepsilon} \frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\,d\boldsymbol{y} \\
&\le C\int_0^\varepsilon \iint_{|\boldsymbol{y}|=r} \frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\,dS(\boldsymbol{y})\,dr \\
&\le C\int_0^\varepsilon \frac{1}{r}|S_r(0)|\,dr \le C\int_0^\varepsilon r\,dr \le C\varepsilon^2
\end{aligned}$$

     ここで $S_r(0)$ は半径 r の球面である.

   - 外部の積分にはグリーンの定理を施す.

$$\begin{aligned}
&-\iiint_{|\boldsymbol{y}|\ge\varepsilon} \frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\Delta_{\boldsymbol{y}}\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} \qquad (4.5)\\
&\qquad = \iiint_{|\boldsymbol{y}|\ge\varepsilon} \nabla\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\nabla_{\boldsymbol{y}}\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} - \iint_{|\boldsymbol{y}|=\varepsilon} \frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\nabla_{\boldsymbol{y}}\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{n}\,dS(\boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

右辺の二つ目の項について，球の単位法線ベクトルが $-\boldsymbol{y}/|\boldsymbol{y}|$ であることに気づいて，次のように評価できる．

$$\begin{aligned}\left|\iint_{|\boldsymbol{y}|=\varepsilon}\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\nabla_{\boldsymbol{y}}\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{n}\,dS(\boldsymbol{y})\right| &= \left|\iint_{|\boldsymbol{y}|=\varepsilon}\frac{-\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^2}\cdot\nabla_{\boldsymbol{y}}\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dS(\boldsymbol{y})\right| \\ &\le \sup_{\mathbb{R}^3}|\nabla\rho|\iint_{|\boldsymbol{y}|=\varepsilon}\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\,dS(\boldsymbol{y}) \\ &\le \frac{C}{\varepsilon}|S_\varepsilon(0)| \le C\varepsilon\end{aligned}$$

式 (4.5) の右辺の最初の項は更にグリーンの定理を用いて，次のように変形する．

$$\begin{aligned}\iiint_{|\boldsymbol{y}|\ge\varepsilon}\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\nabla_{\boldsymbol{y}}\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} &= -\iiint_{|\boldsymbol{y}|\ge\varepsilon}\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} \\ &\quad+\iint_{|\boldsymbol{y}|=\varepsilon}\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\cdot\boldsymbol{n}\,dS(\boldsymbol{y}) \\ &= \iint_{|\boldsymbol{y}|=\varepsilon}\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{-\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^3}\cdot\frac{-\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|}\,dS(\boldsymbol{y}) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{|\boldsymbol{y}|=\varepsilon}\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dS(\boldsymbol{y}) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\varepsilon}\rho(\boldsymbol{y})\,dS(\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

$\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ では $\Delta(1/|\boldsymbol{y}|)=0$ ということを用いた．以上の計算結果を合わせると，

$$\Delta u(\boldsymbol{x})=\frac{4\pi}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\varepsilon}\rho(\boldsymbol{y})\,dS(\boldsymbol{y})+O(\varepsilon)$$

ということがわかった．ここで，わざと半径 ε の球面の面積（つまり，$4\pi\varepsilon^2$）で割った形にした．そうすると，以上の積分は「$\boldsymbol{x}$ を中心とする半径 ε の球面での ρ の平均値（かける 4π）」に当る．ρ が連続であるので，$\varepsilon\to0$ のとき，この値が $4\pi\rho(\boldsymbol{x})$ に近づく．つまり，$\varepsilon\to0$ の極限により，

$$\Delta u=4\pi\rho$$

という **Poisson 方程式**が得られた．

$\boldsymbol{x}$ が ρ の台から離れているときも，つまり $\rho(\boldsymbol{x})=0$ のとき，$\Delta u=0=4\pi\rho(\boldsymbol{x})$ が成り立つので，上の式は全ての点で成り立つことになる． ■

以上の考察をまとめると，与えられた密度分布 $\rho(x)$ に対し，

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}*\rho(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(y)}{|x-y|}\,dy$$

という関数（ニュートンポテンシャルの定数倍）を定義すると，

$$-\Delta u=\rho\qquad\text{in }\mathbb{R}^3$$

が成り立つことがわかった．要するに，与えられた関数 f を右辺に持つ全空間での 3 次元ポアソン方程式の解が見つかったことになる．

これからは次の 2 つのことを目指す：

- 一般次元のポアソン方程式の解を見つける
- 有界領域での問題（すなわち，境界値問題）の解き方を考える

4.2 ラプラス方程式の基本解

次元を n とする．まず，上の $1/|x|$ に相当する一般次元のラプラス方程式の解を求める．この解を見ると，原点に対して対称であることがわかる．さらに，ラプラス方程式が回転について不変であることを考慮すると，解を原点に対して対称な形で求めることが自然である．すなわち，

$$u(x) = v(r), \qquad r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

という形で解が書けると仮定して，v を求める．

> ラプラス方程式の回転に対する不変性の証明は問題4.1で問われている．この主張の一般化は [3], p.67 を参照．そこで述べられているように，ラプラシアンが回転と平行移動と可換な作用素の環を生成していることはラプラシアンが物理学で遍在する主な理由である．

ラプラス方程式を v に対する方程式に書き直す．v が一変数関数であるから，常微分方程式になるはずである．そのため，まず r の x_i についての偏微分を計算しておく：

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}} 2x_i = \frac{x_i}{r}$$

従って，

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= v'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= v''(r)\frac{x_i}{r}\frac{\partial r}{\partial x_i} + v'(r)\frac{\partial (x_i/r)}{\partial x_i} = v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\Big(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\Big) \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} &= v''(r)\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{r^2} + v'(r)\Big(\frac{1 + \cdots + 1}{r} - \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{r^3}\Big) \\ &= v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r). \end{aligned}$$

関数 u がラプラス方程式を満たすとすると，v は

$$v'' + \frac{n-1}{r}v' = 0$$

という方程式を満たす．ここで，$v' \neq 0$ とすると，

$$\big(\log|v'|\big)' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r}$$

これを積分すれば，

$$\log|v'| = (1-n)\log r + C$$

つまり

$$v'(r) = \frac{\tilde{C}}{r^{n-1}}$$

を得る．もう一度積分すると，

$$v(r) = \begin{cases} \alpha \log r + \beta, & (n = 2) \\ \frac{\alpha}{r^{n-2}} + \beta, & (n \geq 3) \end{cases}$$

という解が求まる．ここで，α, β は任意の定数であるが，定数もラプラス方程式の自明な解になるので，簡単のため $\beta = 0$ とおく．

定義 4.1 (基本解) $x \neq 0$ に対して定義される関数

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & (n = 2) \\ \frac{1}{n(n-2)\beta_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & (n \geq 3) \end{cases}$$

をラプラス方程式の**基本解**とよぶ．ただし，β_n は $\mathbb{R}^n$ の単位球の体積である． ■

3 次元と同じように，基本解と右辺の関数の合成積によってポアソン方程式を解くことができる．そのとき定数が合うように，基本解の定数を決めているわけである．

定理 4.2 (ポアソン方程式の解) $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ の台がコンパクトであるとする．関数 u を

$$u(x) = \Phi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y) f(y)\, dy \tag{4.6}$$

で定義したとき，$u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ であり，$-\Delta u = f$ が $\mathbb{R}^n$ において成り立つ．

証明

重力ポテンシャルが満たす方程式を導くときと同じ方法で示すことができる．

$$u(x) = \Phi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x-y)\,dy$$

と書くことにより，

$$\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{h}\,dy$$

を得る．右辺の f を含む分数が $h \to 0$ のとき $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)$ に一様収束するので，

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\,dy, \qquad i = 1,\dots,n.$$

同様な理由で

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)\,dy, \qquad i,j = 1,\dots,n \tag{4.7}$$

が得られ，右辺の量が連続であるから，$u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ が従う．
u がポアソン方程式を満たすという計算は 3 次元の場合と変わらない．(4.7) の積分を特異点の周りの半径 ε の小さな球の内部と外部にわけて，内部での積分が $O(\varepsilon)$ であることを確かめ，外部の積分でグリーンの定理を 2 回用いる．そうすると，境界の積分から $O(\varepsilon)$ の項と f の半径 ε の球面での平均値が出てくる． □

基本解 Φ は原点の近傍で 0 になるような関数に対し $\int \Delta_x \Phi(x-y)f(y)\,dy = 0$ を満たし，そうでない関数に対して $\int -\Phi(x-y)\Delta f(y)\,dy = f(x)$ をみたす（ここで形式的にグリーンの定理を 2 回適用すれば，$\int -\Delta_x \Phi(x-y)f(y)\,dy = f(x)$ を得る．）そのため，

$$-\Delta\Phi = \delta_0$$

と書くことがある．ここの δ_0 は原点に 1 の質量を与えるデルタ関数である．これは普通の意味での関数ではないが，関数の概念を拡張した「超関数の理論」で厳密に扱われている．

> 右辺関数に関する仮定 $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ を大幅に弱くすることができる．例えば，超関数の意味での解を考える場合，$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ でも十分である．詳しくは [4], p.54 または [3], p.76 を参照.

4.3 演習問題

問題 4.1 ラプラス方程式 $\Delta u = 0$ が回転に対して不変であることを示せ．すなわち，任意の n 行 n 列の直交行列 R に対し，

$$v(x) = u(Rx), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

とするとき，関数 v が $\Delta v = 0$ を満たすということである．
（直交行列とは，転置行列を R^T と表すときに，$R^T R = RR^T = E$（単位行列）を満たす正方行列のことである.）

問題 4.2 ([5], p.102) n-次元の重調和方程式 $\Delta^2 u = 0$（すなわち，$\Delta(\Delta u) = 0$）の原点に対して対称な解をすべて求めよ．これらの解のうち，基本解とよべるものはどれか？

問題 4.3 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ がコンパクトな台をもつ 2 回微分可能な関数であるとする．$n \geq 2$ に対しラプラス方程式基本解を Φ とする．そのとき，

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

で定義した関数 $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ はポアソン方程式 $\Delta u = f$ の解であることを示せ．
（この問題は，定理4.2の証明を詳細に与えることが趣旨である．）

問題 4.4 2 変数関数 f が連続な関数であるとし，C_r が中心 (X, Y)，半径 r の円であるとする（すなわち，$C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-X)^2 + (y-Y)^2 = r^2\}$ ）．連続性の定義を用いて，C_r の周上の f の平均値が $r \to 0$ のとき $f(X, Y)$ に収束することを精密に示せ：

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} f\, ds = f(X, Y).$$

問題 4.5 ([3], p.82) 基本解の定義における $n \geq 3$ のときの式が $n = 1$ のときの基本解（すなわち，d^2/dx^2 の基本解）を与えることを確認せよ．

問題 4.6 ([3], p.83) 関数

$$\frac{e^{-c|x|}}{4\pi|x|}$$

が $\mathbb{R}^3$ における $-\Delta + c^2$ $(c \in \mathbb{R})$ の基本解であることを示せ．

References

[1] L. C. Evans: Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.

[2] R. Feynman, R. Leighton, M. Sands: The Feynman Lectures in Physics, Vol. II, Addison-Wesley, 1966. （http://www.feynmanlectures.info で無料で閲覧できる）

[3] G. B. Folland: Introduction to Partial Differential Equations, Princeton University Press, 1995.

[4] D. Gilbarg, N.S. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, 2001.

[5] F. John: Partial Differential Equations, Springer, 1982.

4 ラプラス方程式

概要
この講義ではラプラス方程式の解である調和関数の性質を調べる．特に，平均値の定理，最大値原理と調和関数の正則性に着目する．

Laplace 方程式の解の基本的な性質を紹介する．似たような性質は他の方程式（特に，一般の楕円型方程式や放物型方程式）についても成り立つ．楕円型の一般論を詳しく勉強したい方は Gilbarg & Trudinger の本 [3] を参照して下さい．

4.4 平均値定理

平均値定理（Mean value formula）は，言葉で言えば，

「u が開集合 Ω において調和関数であれば，任意の点 $x \in \Omega$ での解の値 $u(x)$ は Ω に収まるような x を中心とする任意の球の上での平均値に等しい.」（球を球面で置き換えても成り立つ.）

横棒のついた積分記号は平均値を意味する，すなわち

$$\fint_D f(x)\,dx = \frac{1}{|D|}\int_D f(x)\,dx.$$

ただし，$|D|$ は集合 D の n-次元ルベーグ測度を表す．また，中心 x，半径 r の球を $B(x,r)$ という記号で表すとする．

上の文章を式で書くと，

定理 4.3 (ガウスの平均値定理) $u \in C^2(\Omega)$ が調和関数であるとする．そのとき，

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y) = \fint_{B(x,r)} u(y)\,dy \tag{4.1}$$

が任意の球 $B(x,r) \subset \Omega$ に対して成り立つ.

証明

関数 ϕ を次のように定義する：

$$\phi(r) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y) = \fint_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\, dS(z).$$

この関数 ϕ は微分が 0 になり，r について定数関数であることを証明する．そして，その定数は $u(x)$ であることを確かめる．
以下の計算でグリーンの定理を用いる．

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= \fint_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz)\cdot z\, dS(z) \\
&= \fint_{\partial B(x,r)} \nabla u(y)\cdot \frac{y-x}{r}\, dS(y) \\
&= \fint_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS(y) \\
&= \frac{r}{n}\fint_{B(x,r)} \Delta u(y)\, dS(y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$y \in \partial B(x,r)$ に対し $\frac{y-x}{r}$ が球面 $\partial B(x,r)$ への外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ であることを用いた．
従って，ϕ は定数であるが，その値を $r \to 0$ とすることにより計算する：

$$\phi = \lim_{r\to 0}\phi(r) = \lim_{r\to 0}\fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y) = u(x).$$

よって，定理は球面の場合に示された．球の場合は，極座標を用いればよい：

$$\int_{B(x,r)} u\, dy = \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,s)} u\, dS\right) ds = u(x)\int_0^r |\partial B(x,s)|\, ds = u(x)\,|B(x,r)|. \quad \square$$

逆の含意も成り立つ．

定理 4.4 (平均値定理の逆) $u \in C^2(\Omega)$ が

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y)$$

を任意の球 $B(x,r) \subset \Omega$ に対して満たすなら，u は調和関数である．

証明

$\Delta u(x) > 0$ をみたす点 $x \in \Omega$ があれば，Δu の連続性より，x を中心とする球 $B(x,r)$ において $\Delta u > 0$ となるような r が存在する．しかし，上で計算した結果を使うと，

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{n}\fint_{B(x,r)} \Delta u(y)\, dy > 0$$

となるので，矛盾が得られる．$\Delta u(x) < 0$ のケースも同様に処理される． $\square$

4.5 調和関数の性質

有界な開領域 Ω における調和関数の様々な性質を平均値定理より導くことができる．

4.5.1 最大値原理と一意性

最大値原理は，大雑把に言えば「調和関数のある有界領域での値はこの領域の境界での値の最小値と最大値の間に入る」となる．正確には，

定理 4.5 (最大値原理) $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ が調和関数であるとする．

(i) （*maximum principle*）そのとき，次が成り立つ

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

(ii) （*strong maximum principle*）さらに，Ω が連結領域で，$u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u$ を満たす $x_0 \in \Omega$ が存在すれば，u は Ω において定数関数である．

証明

> *(ii)* の方が一般的であるので，*(ii)* だけ証明すればよい．$u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u = M$ をみたす $x_0 \in \Omega$ が存在するとする．$B(x_0, r)$ が Ω に収まるような球であれば，
>
> $$M = u(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u\,dy \leq M$$
>
> が成り立つ．従って，$B(x_0, r)$ で $u \equiv M$ にならなければならない．$\{u = M\}$ という集合は Ω の中で開集合になり，u の連続性より閉集合にもなる．Ω が連結領域なので，$\Omega = \{u = M\}$ を得る． □

> (i) も興味深い証明がある．最大値の点では $\partial^2 u/\partial x_i^2 \leq 0$ であるから $\Delta u > 0$ の可能性が排除される．$\Delta u \geq 0$ も起こり得ないことを示すために u の代わりに，ラプラシアンが正になる関数 $u(x) + \varepsilon|x|^2$ を考えればよい．詳しくは [4], p.103 を参照．また，より一般的な作用素への拡張の簡単な例は [2], p.73–74 にある．

最小値に対しても同じ定理が成り立つ．

定理 4.6 (最小値原理) $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ が調和関数であるとする．

(i) そのとき，次が成り立つ．

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$$

(ii) さらに，Ω が連結領域で，$u(x_0) = \min_{\bar{\Omega}} u$ を満たす $x_0 \in \Omega$ が存在すれば，u は Ω において定数関数である．

> 最大値原理について詳しく学びたい方は，[5] を参照して下さい．楕円型方程式に限らない理論がわかりやすく解説されている．

最大値原理の応用として，一意性（uniqueness）が示される．

定理 4.7 (一意性) $g \in C(\partial\Omega)$，$f \in C(\Omega)$ とする．そのとき，境界値問題

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad in\ \Omega \\ u &= g \qquad on\ \partial\Omega \end{aligned}$$

の解が高々一つ存在する．

証明

> u_1 と u_2 がそれぞれ解であるとすると，その差 $u = u_1 - u_2$ が
>
> $$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$
>
> という条件をみたす．最大値原理により，$\max_{\bar{\Omega}} u = \min_{\bar{\Omega}} u = 0$，つまり $u \equiv 0$ を得る． □

4.5.2 正則性

ここで，C^2-級の調和関数がどれぐらい滑らかであるかについて調べる．このような考察を正則性理論（regularity theory）とよぶ．平均値の公式を満たす関数であれば，無限回微分可能になることがわかる．ラプラス方程式に出てこない微分も存在することが言えるという意味で興味深い結果である．

定理 4.8 (正則性) $u \in C(\Omega)$ が全ての球 $B(x,r) \subset \Omega$ に対し，平均値の公式（すなわち，$u(x)$ が球面 $\partial B(x,r)$ での u の平均値に等しいという性質）を満たすとき，

$$u \in C^\infty(\Omega)$$

となる．

u の境界までの連続性について何もわかっていないことに注意する．この定理を証明するには，関数を滑らかな関数で近似する（「軟化」する）理論について勉強しておく必要があるので，以下の付録にまとめた．

証明

付録で説明される軟化子 η を用いて，Ω_ε で $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ と定義する．付録の証明によると，$u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ であるが，実は，Ω_ε において $u \equiv u^\varepsilon$ が成り立つことが以下の計算によって言える．従って，$u \in C^\infty(\Omega)$ が得られる．

$$\begin{aligned}
u^\varepsilon(x) &= \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(x,\varepsilon)} \eta\big(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\big)u(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \eta\big(\frac{r}{\varepsilon}\big)\left(\int_{\partial B(x,r)} u\,dS\right)dr \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}u(x)\int_0^\varepsilon \eta\big(\frac{r}{\varepsilon}\big)|\partial B(x,r)|\,dr \\
&= u(x)\int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)\,dy = u(x). \quad \square
\end{aligned}$$

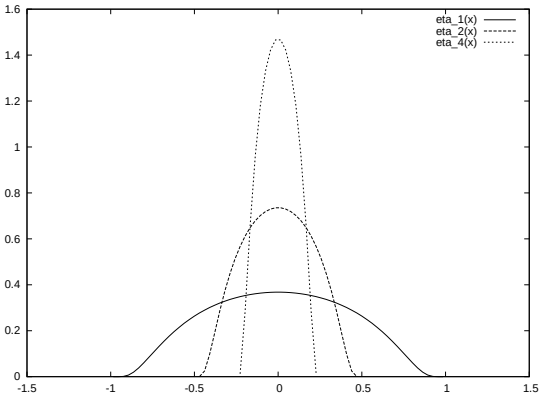
付録 I（軟化子，mollifier）

- 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対し，$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ と定義する．
- 次の関数を**軟化子** (mollifier) と呼ぶ：

$$\eta(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{-1}{1-|x|^2}} & \text{if} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{if} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

ここで，C は $\int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1$ となるように定められる．

このように定義される関数 η は C^∞-級である．



次の操作により，軟化子のサポートを狭くしていく：

$$\eta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta(\frac{x}{\varepsilon}).$$

（上の図には $\varepsilon = 1, \varepsilon = 1/2$ と $\varepsilon = 1/4$ のときの軟化子のグラフを示した.）

- f と g の**合成積** (convolution) は次のように定義される：

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy$$

（ただし，上の積分が収束すると仮定している）．

- 局所的積分可能な関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ の**軟化** (mollification) f^ε は軟化子との合成積として定義される：

$$f^\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon * f(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)f(x-y)\,dy, \qquad x \in \Omega_\varepsilon.$$

η_ε の台が $B(0,\varepsilon)$ であるから，上の式で積分範囲をこのように限定できる．

付録 II（軟化の性質）

(i) $f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$

(ii) $\varepsilon \to 0$ のとき $f^\varepsilon \to f$ a.e.

(iii) $f \in C(\Omega)$ のとき，$f^\varepsilon \to f$ が Ω のコンパクト部分集合上で一様収束する．

(iv) $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, $p \in [1,\infty)$ のとき，$f^\varepsilon \to f$ は $L^p_{loc}(\Omega)$ で収束する．

証明

(i) $x \in \Omega_\varepsilon$ を選ぶ．$x + he_i$ が Ω_ε の中に入るように h を小さくとる．

$$\begin{aligned}\frac{f^\varepsilon(x+he_i)-f^\varepsilon(x)}{h} &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_\Omega \frac{1}{h}\left[\eta\Big(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\Big)-\eta\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)\right] f(y)\,dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_U \frac{1}{h}\left[\eta\Big(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\Big)-\eta\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)\right] f(y)\,dy\end{aligned}$$

ここで，η の台がコンパクトだから，Ω での積分をあるコンパクトな集合 $U \subset\subset \Omega$ での積分に直した．このコンパクト集合 U の上では $h \to 0$ のとき

$$\frac{1}{h}\left[\eta\Big(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\Big)-\eta\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)\right] \to \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)$$

一様に収束するので，

$$\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_U \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big) f(y)\,dy = \int_\Omega \frac{\partial\eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) f(y)\,dy.$$

同様に，任意の多重指数 α に対し $D^\alpha f^\varepsilon(x)$ が存在し，

$$D^\alpha f^\varepsilon(x) = \int_\Omega D^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\,dy$$

が成り立つことが確かめられる．この右辺が任意の α に対し（変数 x の）連続な関数であるから，$f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ が従う．

(ii) Lebesgue の定理の主張は

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|\,dy = 0 \qquad a.e.\ x \in \Omega \tag{4.2}$$

である．Lebesgue の定理が成り立つ点 x に対して，

$$\begin{aligned}|f^\varepsilon(x)-f(x)| &= \left|\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)[f(y)-f(x)]\,dy\right| \\ &\le \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(x,\varepsilon)} \eta\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)|f(y)-f(x)|\,dy \\ &\le C\fint_{B(x,\varepsilon)} |f(y)-f(x)|\,dy \to 0, \qquad \varepsilon \to 0.\end{aligned}$$

(iii) $f \in C(\Omega)$ のとき，$U \subset\subset \Omega$ を固定する．$U \subset\subset V \subset\subset \Omega$ を満たす V が存在し，V で f は一様連続である．(4.2) の極限は $x \in U$ に対し一様であり，(ii) での計算により $f^\varepsilon \to f$ は U 上で一様である． □

4.5.3 局所的評価と解析性

調和関数の全ての微分を局所的に評価することによって，調和関数が解析関数であることが証明できる．よって，調和関数は ”多項式に近い ”非常にきれいな関数であることが分かる．

まず，次の記号を導入する：

$$\beta_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \quad \dots \quad \mathbb{R}^n\text{の単位球の体積}$$
$$\|u\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|\,dx \quad \dots \quad u\text{ の }L^1\text{-ノルム}$$

定理 4.9 (微分の評価) u は Ω において調和関数で，α は大きさ $|\alpha| = k$ の多重指数であるとき，

$$|D^\alpha u(x_0)| \le \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \tag{4.3}$$

が任意の球 $B(x_0, r) \subset \Omega$ に対して成り立つ．ここで，n は Ω の次元で，

$$C_0 = \frac{1}{\beta_n}, \qquad C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\beta_n}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

証明

数学的帰納法で証明する．

1. $k=0$ のとき，平均値定理により明らかである．

2. $k=1$ のとき，Laplace 方程式を x_i について微分すると，u_{x_i} が調和関数であることがわかる．従って，u_{x_i} に対し平均値定理が成立し，グリーンの定理を用いると，

$$|u_{x_i}(x_0)| = \Big|\fint_{B(x_0,r/2)} u_{x_i}\,dx\Big| = \Big|\frac{2^n}{\beta_n r^n}\int_{\partial B(x_0,r/2)} u n_i\,dS\Big| \le \frac{2n}{r}\max_{\partial B(x_0,r/2)}|u|.$$

最後の $\max|u|$ を評価するために，$x \in \partial B(x_0,r/2)$ に対し，$B(x,r/2) \subset B(x_0,r) \subset \Omega$ であることに注意し，

$$|u(x)| \le \frac{1}{\beta_n}\Big(\frac{2}{r}\Big)^n \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

を得る（ここで，$k=0$ のときの結果を用いた）．以上をまとめると，

$$|u_{x_i}(x_0)| \le \frac{2^{n+1}n}{\beta_n}\frac{1}{r^{n+1}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}.$$

3. $k \ge 2$ であり，(4.3) が大きさ $(k-1)$ 以下の多重指数に対して成り立つとする．$|\alpha|=k$ の多重指数 α に対し，$D^\alpha u = (D^\beta u)_{x_i}$ を満たす β（$|\beta|=k-1$）と i が存在する．$k=1$ のときと同様の計算により，

$$|D^\alpha u(x_0)| \le \frac{nk}{r}\max_{\partial B(x_0,r/k)}|D^\beta u|$$

が分かる．また，$x \in \partial B(x_0,r/k)$ であれば，$B(x,\frac{k-1}{k}r) \subset B(x_0,r) \subset \Omega$ であるから，$(k-1)$ に対する仮定を使うと，

$$|D^\beta u(x)| \le \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\beta_n(\frac{k-1}{k}r)^{n+k-1}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}.$$

これを前の式に代入し整理すれば，$|\alpha|=k$ のときの (4.3) が得られる． □

定理 4.10 (解析性) u が Ω において調和関数であれば，Ω において解析的である．

証明

関数が解析的であるとは，各点の近傍でベキ級数で表現できるという意味である．x_0 を任意に選び，x_0 の近傍で u がその x_0 でのテーラー展開に等しいことを示す．

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{4}\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega) \\ M &= \frac{1}{\beta_n r^n}\|u\|_{L^1(B(x_0,2r))} < \infty \end{aligned}$$

とおく．$x \in B(x_0, r)$ に対し，$B(x, r) \subset B(x_0, 2r) \subset \Omega$ であるから，定理4.9より

$$\max_{B(x_0,r)} |D^\alpha u| \le M \left(\frac{2^{n+1}n}{r}\right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|}.$$

ところが，$|\alpha|^{|\alpha|} \le e^{|\alpha|}|\alpha|!$ が成り立つ（$e^x|_{x=|\alpha|}$ のテーラー展開より）．さらに，多項定理

$$n^k = (1 + \cdots + 1)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$$

より，$|\alpha|! \le n^{|\alpha|}\alpha!$ が分かる．以上を合わせると，

$$\max_{B(x_0,r)} |D^\alpha u| \le M \left(\frac{2^{n+1}n^2 e}{r}\right)^{|\alpha|} \alpha!. \tag{4.4}$$

x_0 での u のテーラー級数は次の通りである：

$$\sum_\alpha \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha.$$

この級数は $|x - x_0| < r/(2^{n+2}n^3e)$ を満たす x について収束することを示す．このような x に対して剰余項 $R_N(x)$ が $N \to \infty$ のとき 0 に近づくということを示せばよい．

$$R_N(x) = u(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} \tag{4.5}$$

ここで $t \in [0, 1]$ は x によって決まる．(4.4) を用いると，$R_N(x)$ を次のように評価できる：

$$|R_N(x)| \le M \sum_{|\alpha|=N} \left(\frac{2^{n+1}n^2e}{r}\right)^N \left(\frac{r}{2^{n+2}n^3e}\right)^N \le \frac{Mn^N}{(2n)^N} = \frac{M}{2^N} \to 0, \quad N \to \infty.$$

問題 3.5 の考察により，u が x_0 の近傍で解析関数であるという結論に至る． □

> 領域 Ω におけるラプラス方程式の解がその境界上の値だけで決まることから，コーシーデータが解析関数の場合でもラプラス方程式に対するコーシー問題は一般には可解ではない．また，調和関数の解析性より，コーシーデータが解析関数でなければ，ラプラス方程式のコーシー問題は解をもたないことがわかる（[4], p.97 を参照）．

これまでの結果の応用として有界な解についての定理を述べる．

定理 4.11 (Liouville（リウヴィル）の定理) 関数 $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が有界な調和関数ならば，u は定数関数である．

証明

勝手な $x_0 \in \mathbb{R}^n$ を固定すると，任意の $r > 0$ に対し定理4.9より

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{\sqrt{n}C_1}{r^{n+1}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \leq \frac{\sqrt{n}C_1\beta_n}{r}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

ところで，r が任意なので，$r \to \infty$ とすれば，$\nabla u(x_0) = 0$ を得る．これがすべての点 x_0 で正しいので，u は定数関数である． □

> $|u(x)| \leq C(1 + |x|)^N$ を満たす関数へのこの定理の拡張については [2], p.74 を参照.

定理 4.12 (解の公式) 関数 $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ がコンパクトな台をもつとし，次元を $n \geq 3$ とする．そのとき，

$$-\Delta u = f \qquad in\ \mathbb{R}^n$$

の有界な解に対し定数 C が存在し，

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y)f(y)\,dy + C, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

の形で書ける．

証明

$|x| \to \infty$ のとき，$\Phi(x)$ がゼロに近づくので，

$$\tilde{u} := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y)f(y)\,dy$$

という関数は有界である．さらに，基本解に関する節で示したように，$-\Delta u = f$ の解でもある．もし，他の関数 u が有界な解であれば，$w := u - \tilde{u}$ が有界な調和関数のため定数関数になる． □

注： $n = 2$ のときの基本解 $\Phi(x)$ が無限遠方で発散するので，$\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x - y)f(y)\,dy$ が有界でない可能性がある．

4.5.4 ハルナックの不等式

平均値定理より，Laplace 方程式には平均する効果があることを示唆している．従って，領域の境界から離れていれば，Laplace 方程式の解は各点で近い値をとるであろうということが直観的にわかる．この事実を正確に述べているのは，ハルナックの不等式（Harnack's inequality）である．

定理 4.13 (Harnack 不等式) 連結な開集合 $U \subset \Omega$ に対し，$\bar{U}$ がコンパクトであるとする（これを $U \subset\subset \Omega$ という記号で表す）．そのとき，U にのみ依存する定数 C が存在し，

$$\sup_U u \leq C \inf_U u \tag{4.6}$$

が全ての**非負の**（Ω における）**調和関数** u について成り立つ.

証明

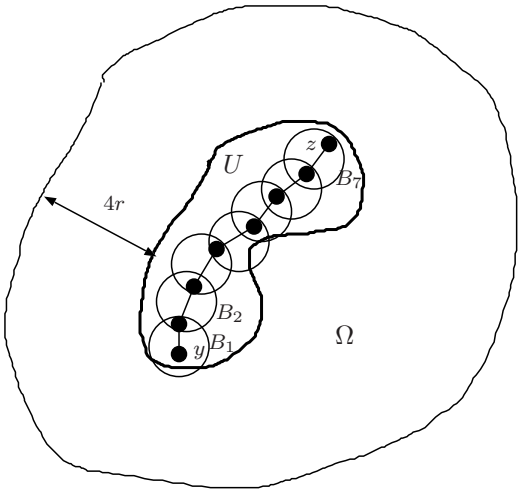
(4.6) が

$$\frac{1}{C}u(z) \le u(y) \le Cu(z) \qquad \forall y, z \in U$$

と同値であることに注意する.
$r = \frac{1}{4}\mathrm{dist}(U, \partial\Omega) > 0$ とおく. $y \in U$ と $z \in U$ を $|y - z| \le r$ を満たすように任意に選ぶと,

$$u(y) = \fint_{B(y,2r)} u\,dx \ge \frac{1}{|B(y,2r)|}\int_{B(z,r)} u\,dx = \frac{1}{2^n}\fint_{B(z,r)} u\,dx = \frac{1}{2^n}u(z).$$

これより, $2^n u(z) \ge u(y) \ge \frac{1}{2^n}u(z)$ という関係式が r 以下の距離にある全ての $y, z \in U$ に対して成り立つ. U が連結であるので, U を半径 $r/2$ の有限個のボール $\{B_i\}_{i=1}^N$ で覆って, 隣同士が一部重なり合う（$B_{i-1} \cap B_i \ne \emptyset$, $i = 2, \dots, N$）ようにできる.



よって,

$$u(y) \ge \frac{1}{2^{nN}}u(z) \qquad \forall y, z \in U.$$

4.6 演習問題

問題 4.7 関数 $v \in C^2(\bar{\Omega})$ が

$$-\Delta v \le 0 \qquad \text{in } \Omega$$

を満たすならば, v が**劣調和関数**であるという.

v が Ω において劣調和関数ならば,

$$v(x) \le \fint_{B(x,r)} v(y)\,dy$$

が全ての球 $B(x,r) \subset \Omega$ に対して成り立つことを示せ.

問題 4.8 u が調和関数であれば，$v = |\nabla u|^2$ が劣調和関数になることを示せ.

問題* 4.9 ([2], p.73) $u \in C^2(\Omega), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ のとき，次が成り立つことを示せ：

$$\Delta u(x) = \lim_{r\to 0} \frac{2n}{r^2}\Big[\fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y) - u(x)\Big].$$

（ヒント：x を中心とする u の 2 次テーラー展開を考え，それぞれの項の積分を計算するとき対称性を考慮する.）

問題 4.10 ([2], p.71) $\{u_k\}$ が Ω での調和関数の列で，Ω のコンパクト集合において関数 u に一様収束するならば，u が Ω において調和関数であることを示せ.

問題 4.11 次の定理を示せ.

定理

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ が調和関数であるとする.
(i) そのとき，次が成り立つ.

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$$

(ii) さらに，Ω が連結領域で，$u(x_0) = \min_{\bar{\Omega}} u$ を満たす $x_0 \in \Omega$ が存在すれば，u は定数関数である.

問題 4.12 Ω は開領域とする． $g \geq 0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ は連続関数で，$g(x_0) > 0$ をみたす点 $x_0 \in \partial\Omega$ が存在するとする．そのとき，境界値問題

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega \\ u &= g \qquad \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

の解が Ω の全ての点で正になることを示せ.

問題* 4.13 Ω を滑らかな境界をもつ領域とする．また，Γ を Ω の境界 $\partial\Omega$ の任意の部分開集合とする（$\partial\Omega$ の一部だけでもよい）．関数 u が次の条件を満たすとき，u が Ω において恒等的に 0 であることを示せ.

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \qquad \text{on } \Gamma \end{aligned}$$

（ここで，$\partial u/\partial n$ は法線微分である.）

問題* 4.14 ([2], p.73) 複素調和関数に対する次の最大値原理を証明せよ.「u が $\overline{\Omega}$ で連続で，Ω で複素調和関数であれば，$\overline{\Omega}$ における $|u|$ の最大値は $\partial\Omega$ で達成される.」（ヒント：$|u|$ が点 x_0 で最大値 M をもつならば，$u(x_0) = e^{i\theta}M$ となる．$v \coloneqq \mathrm{Re}(e^{-i\theta}u)$ を考える.）

問題* 4.15 ([4], p.101) $n = 3$-次元空間において定数 c に対し $Lu = \Delta u + cu$ の作用素を導入する．次の問いに答えよ.

(1) 原点に対して対称な $Lu = 0$ の解をすべて求めよ.

(2) 関数

$$K(x,y) = -\frac{\cos(\sqrt{c}|x|)}{4\pi|x|}$$

が L の基本解であることを確認せよ.

(3) $\sin(\sqrt{c}\rho) \neq 0$ をみたすような球 $B(y,\rho)$ において $Lu = 0$ の解 u が平均値の性質

$$u(y) = \frac{\sqrt{c}\rho}{\sin(\sqrt{c}\rho)} \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{\partial B(y,\rho)} u(x)\, dS(x)$$

を満たすことを示せ．ただし，c が負のとき，係数を $\sqrt{-c}\rho/\sinh(\sqrt{-c}\rho)$ と読み替える必要がある．

（ヒント：次の基本解を用いる：

$$G(x,y) = K(x,y) + k\frac{\sin(\sqrt{c}|x|)}{|x|}. \quad)$$

(4) $c < 0$ ならば，$\partial\Omega$ 上で消えるような $Lu = 0$ の解 $u \in C^2(\overline{\Omega})$ が Ω において恒等的にゼロであることを示せ．$c > 0$ ならば，球面上でゼロであるが球の内部でゼロでない解が存在することを示せ.

(5) Ω において $Lu = 0$ をみたす関数 u が解析関数であることを示せ.

問題* **4.16** ([4], p.102) $\Delta u(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ならば,

$$\Delta\left(|x|^{2-n} u(\tfrac{x}{|x|^2})\right) = 0$$

が $x/|x|^2$ が u の定義域に属するようなすべての x に対し成り立つことを示せ.

問題* **4.17** ([4], p.105) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| > 1\}$ とする．関数 $u \in C^2(\overline{\Omega})$ が $\Delta u = 0$ と $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$ をみたすとする．そのとき,

$$\max_{\Omega} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$$

が成り立つことを示せ.

問題* **4.18** ([4], p.105) $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ を

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + c(x)u = 0$$

の解とする．ただし，$c(x) < 0$ in Ω と仮定する．$u = 0$ on $\partial\Omega$ ならば，$u = 0$ in Ω が成り立つことを証明せよ.（ヒント：$\max u \leq 0$ と $\min u \geq 0$ を示せばよい.）

問題* **4.19** ([4], p.105) 2 次元の楕円型方程式

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + 2du_x + 2eu_y = 0$$

に対し，最大値原理（定理4.5(i)）を証明せよ．ただし，a, b, c, d, e は $ac - b^2 > 0, a > 0$ をみたす $C(\overline{\Omega})$-級関数である.（ヒント:まず，最大値が得られる点において $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 \geq 0, u_{xx} \leq 0, u_{yy} \leq 0$ が成り立つことを利用して $Lu > 0$ をみたす u に対する最大値原理を示す．この結果を

$$v(x,y) = u(x,y) + \varepsilon e^{M((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)}$$

という関数に適用する．ただし，(x_0, y_0) は $\overline{\Omega}$ に属さない点として，M を十分大きくとる.）

問題* 4.20 ([4], p.106) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2;\ x_2 > 0\}$ とおく．$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ が $\overline{\Omega}$ において上に有界な調和関数ならば，

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$$

が成り立つことを示せ.（ヒント：調和関数 $u(x_1, x_2) - \varepsilon \log\left(x_1^2 + (x_2+1)^2\right)$ に $x_1^2 + (x_2+1)^2 < a^2, x_2 \geq 0$（$a$ 十分大）という領域で最大値原理を適用し，$\varepsilon \to 0$ とする.）

問題 4.21 関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (1,2] \\ 3-x & x \in [2,3] \\ 0 & x \in (-\infty,1] \cup [3,\infty) \end{cases}$$

の軟化

$$f^{\varepsilon}(x) = \eta_{\varepsilon} * f(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_{\varepsilon}(y) f(x-y)\, dy$$

を $\varepsilon = 1, \varepsilon = 0.2, \varepsilon = 0.05$ に対し，一つの図にまとめて図示せよ.

ここで，

$$\eta(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{-1}{1-|x|^2}} & \text{if} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{if} \quad |x| \geq 1 \end{cases}, \qquad \eta_{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

とし，C は $\int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1$ となるように定める.

（数値積分のプログラムを作りコンピュータを用いてプロットするか，Maple など数学ソフトを使ってプロットするか，それぞれの関数の大小関係や一致するところなどの詳しい解析を行い手で描くか，どちらの方法でもかまわない.）

問題 4.22 Γ 関数は次のように定義されている：

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx.$$

Γ 関数の以下の性質を示せ.

1. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
2. $\Gamma(1) = 1$
3. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$

References

[1] L. C. Evans: Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.

[2] G. B. Folland: Introduction to Partial Differential Equations, Princeton University Press, 1995.

[3] D. Gilbarg, N.S. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, 2001.

[4] F. John: Partial Differential Equations, Springer, 1982.

[5] M.H. Protter, H.F. Weinberger: Maximum Principles in Differential Equations, Springer, 1999.

4 ラプラス方程式

概要

この講義ではラプラス方程式を有界領域で考えたときに現れる境界値問題を解く方法を探る．グリーン関数を導入すれば，シンプルな形をした領域で解を具体的に求めることができることがわかる．

4.7 グリーン関数

本節の目標はポアソン方程式を解くことである．全空間におけるポアソン方程式の解が基本解を用いて得られることが既にわかったので，これから有界領域における境界値問題

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega \tag{4.1}$$

$$u = g \qquad \text{on } \partial\Omega \tag{4.2}$$

を解くことを目指す．ここで，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は開領域で，$\partial\Omega \in C^1$ とする．

基本解 Φ を利用して，任意に選んだ $x \in \Omega$ の点での u の値を Δu と境界上の u の値を用いて表現できないかについて考えてみる．この二つの情報が (4.1), (4.2) により既知であるから，もしそのように表現できれば，問題が解けたことになる．

$u \in C^2(\bar{\Omega})$ を仮定する．全空間のポアソン方程式の解の公式を参考にして，$\int u(y)\Delta\Phi(y-x)\,dy$ からスタートする．しかし，$\Delta\Phi(y-x)$ が点 $y=x$ で可積ではないので，以前と同じように x の周りの小さな球 $B(x,\varepsilon)$ を考え，その球を除いた領域 $\Theta_\varepsilon = \Omega \setminus B(x,\varepsilon)$ で積分を計算していく．

まず，グリーンの定理より

$$\int_{\Theta_\varepsilon} u(y)\Delta\Phi(y-x)\,dy = -\int_{\Theta_\varepsilon} \nabla u(y)\nabla\Phi(y-x)\,dy + \int_{\partial\Theta_\varepsilon} u(y)\nabla\Phi(y-x)\cdot\boldsymbol{n}\,dS(y)$$

ここで，$\boldsymbol{n}$ は Θ_ε への外向き単位法線ベクトルである．右辺の最初の項が扱いにくいので，$\int \Phi(y-x)\Delta u(y)\,dy$ に対するグリーン定理を用いてその項を扱いやすいものに替える．

$$\int_{\Theta_\varepsilon} \Phi(y-x)\Delta u(y)\,dy = -\int_{\Theta_\varepsilon} \nabla\Phi(y-x)\nabla u(y)\,dy + \int_{\partial\Theta_\varepsilon} \Phi(y-x)\nabla u(y)\cdot\boldsymbol{n}\,dS(y)$$

以上の二つの式を引き算すると，

$$\int_{\Theta_\varepsilon} \Big(u(y)\Delta\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\Delta u(y)\Big)\,dy = \int_{\partial\Theta_\varepsilon} \Big(u(y)\nabla\Phi(y-x)\cdot\boldsymbol{n} - \Phi(y-x)\nabla u(y)\cdot\boldsymbol{n}\Big)\,dS(y) \tag{4.3}$$

が得られる．さらに，$x \neq y$ のとき $\Delta\Phi(y-x) = 0$ ということを考慮して

$$\int_{\Theta_\varepsilon} \Phi(y-x)\Delta u(y)\,dy = \int_{\partial\Theta_\varepsilon} \Big(\Phi(y-x)\nabla u(y)\cdot\boldsymbol{n} - u(y)\nabla\Phi(y-x)\cdot\boldsymbol{n}\Big)\,dS(y) \tag{4.4}$$

を得る．

$\partial\Theta_\varepsilon$ が二つの部分，すなわち $\partial\Omega$ と $\partial B(x,\varepsilon)$ からなることに注意して，得られた式で $\varepsilon \to 0$ とする．このとき，右辺の 2 項の $\partial B(x,\varepsilon)$ 上の積分を考えればよい．

$$\Big| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \Phi(y-x) \nabla u(y) \cdot \boldsymbol{n}\, dS(y) \Big|$$

の項についてだが，基本解 Φ の定義より $|\Phi| \le C\varepsilon^{-n+2}$（$n \ge 3$ のとき），$u \in C^2(\Omega)$ であるから $|\nabla u| < C$，さらに $\partial B(x,\varepsilon)$ の面積が $C\varepsilon^{n-1}$ であることを考慮すると，この項が $\varepsilon \to 0$ のとき 0 に収束することが分かる（$n = 2$ も同様である）．

一方，$\nabla\Phi(y-x)\cdot\boldsymbol{n}$ を $\partial B(x,\varepsilon)$ 上で具体的に計算すると，

$$\nabla\Phi(y-x)\cdot\boldsymbol{n}(y) = \frac{1}{n\beta_n}\frac{1}{|y-x|^{n-1}}\frac{y-x}{|y-x|}\cdot\frac{y-x}{|y-x|} = \frac{1}{n\beta_n}\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} = \frac{1}{|\partial B(x,\varepsilon)|}$$

が得られるので，

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\nabla\Phi(y-x)\cdot\boldsymbol{n}\, dS(y) = \fint_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\, dS(y) \to u(x) \qquad (\varepsilon \to 0)$$

が従う．

この結果と $\partial\Omega$ 上の積分が残っていることを式 (4.4) で使って，$\varepsilon \to 0$ とすると，

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Big(\Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial n}(y) - u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial n}(y-x) \Big)\, dS(y) - \int_\Omega \Phi(y-x)\Delta u(y)\, dy \tag{4.5}$$

を得る．この等式は勝手な関数 $u \in C^2(\bar\Omega)$ と勝手な点 $x \in \Omega$ に対して成り立つ．

Ω の境界上の u の値と，Ω の中の Δu の値が与えられているから，もし $\partial u/\partial n$ の境界上の値を知っていれば，上の式によりポアソン問題 (4.1), (4.2) の解が得られる．残念ながら，この法線微分は未知であるが，補助的問題

$$\Delta\phi^x = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{4.6}$$

$$\phi^x(y) = \Phi(y-x) \quad \text{on } \partial\Omega \tag{4.7}$$

を解くことにより u の法線微分を含む項を処理できる．なぜかというと，$\int \phi^x \Delta u$ に (4.3) と同じグリーンの定理を用いて計算すると，

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \phi^x(y)\Delta u(y)\, dy &= \int_{\partial\Omega} \Big(u(y)\frac{\partial\phi^x}{\partial n}(y) - \phi^x(y)\frac{\partial u}{\partial n}(y) \Big)\, dS(y) \\ &= \int_{\partial\Omega} \Big(u(y)\frac{\partial\phi^x}{\partial n}(y) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial n}(y) \Big)\, dS(y) \end{aligned}$$

を得る．ここから未知であった項 $\int \Phi(y-x)\partial u/\partial n$ を出して，u に対する公式 (4.5) に代入すると，

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u(y)\Big(\frac{\partial\Phi(y-x)}{\partial n} - \frac{\partial\phi^x(y)}{\partial n} \Big)\, dS(y) - \int_\Omega \big(\Phi(y-x) - \phi^x(y) \big)\Delta u(y)\, dy$$

になる．もし ϕ^x が計算できれば，上の式の右辺が全て既知のものであり，ポアソン方程式の解が求まったことになる．

定義 4.14 (グリーン関数) 境界値問題 *(4.6), (4.7)* の解を ϕ^x とする．そのとき，関数

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \phi^x(y), \qquad x,y \in \Omega,\ x \neq y$$

を領域 Ω に対する**グリーン関数**（*Green's function*）とよぶ.

この定義を上の $u(x)$ に関する式で使うと，以下の定理が得られる．

定理 4.15 (ポアソン方程式の境界値問題の解) 領域 Ω に対するグリーン関数を G とする．そのとき，$u \in C^2(\bar{\Omega})$ が *(4.1), (4.2)* の解であれば，次の関係式が成り立つ

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y)\frac{\partial G}{\partial n}(x,y)\,dS(y) + \int_\Omega f(y)G(x,y)\,dy \qquad x \in \Omega.$$

これで解の公式が求まったが，領域のグリーン関数を構成できることが前提となっている．このグリーン関数の構成が可能なのは，領域が単純な形をしているときのみである．これから，領域が半空間と球の場合のグリーン関数を考える．

> $n = 2$ の場合，ラプラス方程式は等角写像に対して不変であるため，円盤でラプラス方程式が解ければ，等角写像で円盤に変換できるようなすべての領域で解けることになる（[4], p.106）.

注 グリーンの定理を適用することによって，グリーン関数が対称であることがわかる（問題 4.31を参照）．すなわち，

$$G(x,y) = G(y,x) \qquad x,y \in \Omega,\ x \neq y.$$

4.7.1 ポアソンの公式

これまでグリーン関数についてわかったことを整理する．境界値問題

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega \tag{4.8}$$
$$u = g \qquad \text{on } \partial\Omega \tag{4.9}$$

を解こうとしている．領域 Ω に対する グリーン関数

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \Phi(y-x) - \phi^x(y) \qquad (x \neq y) \\ \Phi &: \text{基本解（}C/|y-x|^{n-2}\text{ の形）} \\ \phi^x &: \begin{cases} \Delta\phi^x = 0 & \text{in } \Omega \\ \phi^x(y) = \Phi(y-x) & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{の解} \end{aligned}$$

が見つかったとする．基本解 Φ が知られているので，これはつまり，ϕ^x が求まったということを意味する．そのとき，$u \in C^2(\bar{\Omega})$ が (4.8), (4.9) の解であれば，

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y)\frac{\partial G}{\partial n}(x,y)\,dS(y) + \int_\Omega f(y)G(x,y)\,dy \qquad x \in \Omega \tag{4.10}$$

が成り立つ.

グリーン関数の具体的な応用例として，球におけるポアソン方程式 を解く．すなわち，境界値問題

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } B(0,r) \tag{4.11}$$
$$u = g \qquad \text{on } \partial B(0,r) \tag{4.12}$$

を解くことを目指す.

まず，$r=1$ として考える．球に対するグリーン関数を求めるために，補助的問題

$$\Delta \phi^x = 0 \qquad \text{in } B(0,1) \tag{4.13}$$
$$\phi^x = \Phi(y-x) \quad \text{on } \partial B(0,1) \tag{4.14}$$

を解かなければならない．この解 ϕ^x が求まれば，球 $B(0,1)$ に対するグリーン関数は

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \phi^x(y)$$

と定義され，(4.11), (4.12) の $r=1$ のときの解は

$$u(x) = -\int_{\partial B(0,1)} g(y) \frac{\partial G}{\partial n}(x,y)\, dS(y) + \int_{B(0,1)} f(y) G(x,y)\, dy \qquad x \in B(0,1) \tag{4.15}$$

となる.

グリーン関数の構成の主なアイデアは，$B(0,1)$ の内部にある $\Phi(y-x)$ の特異点 $y=x$ を球面に対して反転させて，球の外側に移すことである．反転の具体的な定義は次のものである.

$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ の $\partial B(0,1)$ に対する**双対点** $\tilde{x}$ は

$$\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$$

で定義される.（これは原点と点 x を結ぶ直線上にある点で，x が $B(0,1)$ の内部の点であれば，$\tilde{x}$ は球の外側にくる.）　写像 $x \mapsto \tilde{x}$ を $\partial B(0,1)$ についての**鏡像**という.

グリーン関数の構成のポイント：

- $\Phi(y)$, $y \neq 0$ が調和関数であるから $y \mapsto \Phi(y-\tilde{x})$ も $y \neq \tilde{x}$ に対し調和関数であり，$\Phi(|x|(y-\tilde{x}))$ は $y \in B(0,1)$ において調和関数である（ただし，$x \in B(0,1)$）.
- $y \in \partial B(0,1)$ に対し，$|x||y-\tilde{x}| = |x-y|$ であるから，$\partial B(0,1)$ 上で $\Phi(|x|(y-\tilde{x}))$ は $\Phi(y-x)$ と一致する.

二つ目の点は

$$|x|^2|y-\tilde{x}|^2 = |x|^2\Big(|y|^2 - \frac{2y\cdot x}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2}\Big) = |x|^2 - 2y\cdot x + 1 = |x-y|^2$$

により確認される．従って，

$$\phi^x(y) = \Phi(|x|(y-\tilde{x})), \qquad y \in B(0,1)$$

とおくと，この関数は (4.13),(4.14) を満たしている．

定義 4.16 球 $B(0,1)$ に対するグリーン関数は次で定義される：

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(|x|(y-\tilde{x})), \qquad x,y \in B(0,1),\ x \neq y.$$

そこで，境界値問題

$$-\Delta u = 0 \qquad \text{in } B(0,1) \tag{4.16}$$
$$u = g \qquad \text{on } \partial B(0,1) \tag{4.17}$$

を具体的に解いてみよう．(4.15) より解は

$$u(x) = -\int_{\partial B(0,1)} g(y) \frac{\partial G}{\partial n}(x,y)\, dS(y)$$

と書ける．$y \in \partial B(0,1)$ を用いて計算すると，

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(y-x) - \frac{\partial}{\partial y_i}\Phi(|x|(y-\tilde{x})) = \frac{1}{n\beta_n}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^n} - \frac{1}{n\beta_n}\frac{y_i|x|^2-x_i}{|x-y|^n}.$$

よって，

$$\frac{\partial G}{\partial n}(x,y) = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) = \frac{-1}{n\beta_n}\frac{1}{|x-y|^n}\sum_{i=1}^n y_i\big((y_i-x_i) - y_i|x|^2 + x_i\big) = \frac{-1}{n\beta_n}\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$$

と計算できるので，解は

$$u(x) = \frac{1-|x|^2}{n\beta_n}\int_{\partial B(0,1)} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, dS(y)$$

である．この式を単位球に対する**ポアソンの公式**（Poisson's formula for ball）とよぶ．

また，$B(0,1)$ の代わり，半径 $r>0$ の球を考えたとき，ポアソンの公式は

$$u(x) = \frac{r^2-|x|^2}{n\beta_n r}\int_{\partial B(0,r)} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, dS(y)$$

となる．ここで，

$$K(x,y) = \frac{r^2-|x|^2}{n\beta_n r}\frac{1}{|x-y|^n}, \qquad x \in B(0,r),\ y \in \partial B(0,r)$$

を球 $B(0,r)$ に対する**ポアソン核**（Poisson's kernel）とよぶ．つまり，

$$u(x) = \int_{\partial B(0,r)} K(x,y) g(y)\, dS(y) \tag{4.18}$$

> この公式を用いて，調和関数の微分について次のような評価が得られる：
>
> $$|u_{x_i}(x)| \leq \frac{n}{\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)} \sup_{\Omega} |u|.$$
>
> 高階微分に対して同様な評価が成り立つので，調和関数の完備性とコンパクト性に関する結果が従う．[4], p. 109 を参照.

これは解が存在するという仮定で成立するが，解の存在をまだ証明していない．以下では，このように定義した関数 u が実際に解になることを示す.

定理 4.17 (球に対するポアソンの公式) $g \in C(\partial B(0,1))$ のとき，*(4.18)* で定義した関数 u は $C^\infty(B(0,r))$ に属し，

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \qquad \textit{in } B(0,r) \\ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B(0,r)}} u(x) &= g(x_0) \qquad \forall x_0 \in \partial B(0,r) \end{aligned}$$

を満たす.

ここで， $B(0,r)$ は境界を含まない開球を意味する．また，極限では球の境界にある点 x_0 に対し，球の内部から x_0 に近づく点列 $\{x_n\}$ について極限をとっている.

証明

$x \in B(0,r)$, $y \in \partial B(0,r)$ に対して $K(x,y)$ が滑らかな関数であるから，

$$D^\alpha u(x) = \int_{\partial B(0,r)} D^\alpha K(x,y) g(y)\, dS(y).$$

よって，$u \in C^\infty(B(0,r))$．また，直接の計算より $\Delta_x K(x,y) = 0$ が確かめられるので，

$$\Delta u(x) = \int_{\partial B(0,r)} \Delta_x K(x,y) g(y)\, dS(y) = 0.$$

あとは，境界条件が成り立つことを確認する．$\varepsilon > 0$ を固定する．g が連続であるから，$|y - x_0| < \delta$ を満たす全ての $y \in \partial B(0,r)$ に対し $|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$ が成り立つような $\delta > 0$ が存在する．$|x - x_0| < \delta/2$ であれば，$|u(x) - g(x_0)| < 2\varepsilon$ が成り立つことを示す．

$$\int_{\partial B(0,r)} K(x,y)\, dS(y) = 1 \qquad \forall x \in B(0,r) \tag{4.19}$$

を用いて，次のように評価していく：

$$\begin{aligned}
|u(x) - g(x_0)| &= \Big| \int_{\partial B(0,r)} K(x,y) g(y)\, dS(y) - g(x_0) \Big| \\
&= \Big| \int_{\partial B(0,r)} K(x,y)(g(y) - g(x_0))\, dS(y) \Big| \\
&\le \int_{\partial B(0,r)\cap B(x_0,\delta)} K(x,y)|g(y) - g(x_0)|\, dS(y) \\
&\quad + \int_{\partial B(0,r)\setminus B(x_0,\delta)} K(x,y)|g(y) - g(x_0)|\, dS(y).
\end{aligned}$$

この不等式の右辺の第 1 項を A とし，第 2 項を B とおく．A の場合は，y が $B(x_0,\delta)$ の範囲を動くので，$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$ が成り立つ．よって，(4.19) をさらに使うと，

$$A \le \varepsilon \int_{\partial B(0,r)\cap B(x_0,\delta)} K(x,y)\, dS(y) \le \varepsilon$$

B の場合，$|x - x_0| < \delta/2$ と $|y - x_0| > \delta$ が成り立つので，

$$|y - x_0| \le |y - x| + |x - x_0| \le |y - x| + \delta/2 \le |y - x| + \tfrac{1}{2}|y - x_0|$$

と評価できて，$\frac{1}{2}|y - x_0| \le |y - x|$ が分かる．従って，

$$\begin{aligned}
B &\le 2 \max_{\partial B(0,r)} |g(y)| \int_{\partial B(0,r)\setminus B(x_0,\delta)} K(x,y)\, dS(y) \\
&\le \frac{2^{n+1}}{n\beta_n r} \max|g| (r^2 - |x|^2) \int_{\partial B(0,r)\setminus B(x_0,\delta)} |y - x_0|^{-n}\, dS(y)
\end{aligned}$$

最後の積分が有限だから，x が x_0 に近づくとき，$|x|^2$ が r^2 に近づき，δ を必要に応じてさらに小さくすれば，B を ε より小さくすることができる．よって，$|u(x) - g(x_0)| < 2\varepsilon$ が示された． □

[2], p.95–109 は $g \in L^p$ のケースも扱っている．また，球面調和関数を用いた解の構成方法も解説されている．

注 同じような考察により，半空間

$$\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_n > 0\}$$

に対するグリーン関数が構成できる．この場合は点 x の反転は

$$\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$$

で定義され，グリーン関数は

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x})$$

となる．よって，境界値問題

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ u &= g && \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+ \end{aligned}$$

の解はポアソン公式

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\beta_n} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, dS(y), \qquad x \in \mathbb{R}^n_+$$

により与えられる．詳細は [1], p.36 や [2], p.91 を参照.

> 以上ではラプラス方程式の解の存在を球と半空間の場合にしか示していない．一般の領域の場合，存在定理の証明方法がいくつも見つかっている．代表的な 2 つの方法（球に対するポアソンの公式に頼る Perron の方法と Hilbert 空間の性質を用いた方法）が [4], p.111–124 で紹介されている．また，層ポテンシャルを用いた方法は [2], p.116 で解説されている．

4.8 演習問題

問題 4.23 球の場合の考察を参考にしながら，半空間における調和関数のポアソン公式を導き，得られた公式が実際に解を与えることを証明せよ．

問題 4.24 次元が $n = 1$ のとき，領域 $\Omega = (0,1)$ に対する $\frac{d^2}{dx^2}$ のグリーン関数を求めよ．

問題 4.25 $n = 2$ とする．反転を繰り返すことで第一象限 $x_1 > 0, x_2 > 0$ に対するグリーン関数を求めよ．

問題* 4.26 ([4], p.110) $B = B(0,a) \subset \mathbb{R}^n$, $B_+ = \{x \in B;\ x_n > 0\}$ とおく．関数 $u \in C(\overline{B}_+)$ が B_+ において調和関数で，$x_n = 0$ において消えるとする．u を $\overline{B}$ 全体に x_n の奇関数として拡張する．このように拡張した関数が調和関数であることを示せ．
（ヒント：拡張によって得られた関数と ∂B 上の境界値を共通にする調和関数を考えて，この関数が x_n の奇関数で，B_+ において u と一致することを示す.）

問題* 4.27 ([4], p.110) $u(x_1, \ldots, x_n)$ が半空間 $\{x_n \geq 0\}$ において連続で有界であるとする．さらに，u が $x_n = 0$ において消え，$x_n > 0$ において調和関数であるとする．$u \equiv 0$ を示せ．
（ヒント：Liouville の定理を用いる.）

問題* **4.28** ([4], p.110) $f \in C^4(\mathbb{R})$ がフーリエ級数

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \Big)$$

により与えられる周期 2π の関数であるとする．

(1) 極座標 r, θ で与えられる関数

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \Big) r^n$$

が円盤 $x^2 + y^2 < 1$ においてラプラス方程式の解であり，境界値が f と一致することを示せ．

(2) $n = 2$ の場合のポアソンの公式を導出せよ．
（ヒント：上の式で a_n, b_n を f で表し，積分と和の交換を行う．）

問題 **4.29** ([4], p.111) $u \in C^2(|x| < a) \cap C^0(|x| \le a)$ が $u \ge 0, \Delta u = 0$ を $|x| < a$ において満たすとする．そのとき，$|\xi| < a$ に対し，

$$\frac{a^{n-2}(a - |\xi|)}{(a + |\xi|)^{n-1}} u(0) \le u(\xi) \le \frac{a^{n-2}(a + |\xi|)}{(a - |\xi|)^{n-1}} u(0)$$

というハルナック不等式が成り立つことを示せ．

問題* **4.30** ([4], p.111) $u \in C^2(|x| \le r)$ が $|x| < r$ において調和関数であるとする．そのとき，

$$|u_{x_i}(0)| \le \frac{2\beta_{n-1}}{r\beta_n} \max_{|x|=r} |u(x)|$$

が成り立つことを示せ．この不等式の右辺の係数が最良であることを確かめよ．

問題 **4.31** Ω を滑らかな境界を持つ開領域とする．領域 Ω に対するグリーン関数が対称であることを示せ．
（ヒント： Ω のグリーン関数を G とし，$x, y \in \Omega,\ x \ne y$ を固定する．関数 $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ を $f(z) = G(x, z)$ と $g(z) = G(y, z)$ と定義すると，$f(y) = g(x)$ を示せばよい．$\Theta_\varepsilon = \Omega \setminus [B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon)]$ に対するグリーンの式

$$\int_{\Theta_\varepsilon} \Big(f\Delta g - g\Delta f \Big)\, dz = \int_{\partial\Theta_\varepsilon} \Big(f\nabla g \cdot \boldsymbol{n} - g\nabla f \cdot \boldsymbol{n} \Big)\, dS(z)$$

において，$\varepsilon \to 0$ とすれば，望まれる関係式が得られる．計算するとき，$\Delta f(z) = 0\ (z \ne x)$，$\Delta g(z) = 0\ (z \ne y)$，そして $f = g = 0$ on $\partial\Omega$ を用いる．）

問題 **4.32** 境界値問題

$$\text{(*)} \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B(0,1) \\ u = g & \text{on } \partial B(0,1) \end{cases}$$

の解はポアソンの公式

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{n\beta_n} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(y)}{|x - y|^n}\, dS(y)$$

で与えられる．

この事実を用いて，任意の $r>0$ に対する境界値問題

$$(**) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B(0,r) \\ u = h & \text{on } \partial B(0,r) \end{cases}$$

の解を求めよ（上のポアソンの公式に対応する公式を導け）.
（ヒント：h が与えられたとき，$g(x)=h(rx)$ とし，$B(0,1)$ に対するポアソンの公式で与えられる (*) の解を u とする．そのとき，$v(x)=u(\frac{1}{r}x)$ で定義される v が (**) の解になる.）

問題 4.33 ([1], p.85) $f\in C(B(0,r)), g\in C(\partial B(0,r))$ に対し u を境界値問題

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } B(0,r) \\ u &= g \qquad \text{on } \partial B(0,r) \end{aligned}$$

の解とする．平均値の定理の証明を参考にして，

$$u(0)=\fint_{\partial B(0,r)} g\,dS+\frac{1}{n(n-2)\beta_n}\int_{B(0,r)}\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}-\frac{1}{r^{n-2}}\right)f(x)\,dx$$

が $n\geq 3$ のときに成り立つことを示せ.

問題 4.34 ([1], p.86) $f\in C(B(0,1)), g\in C(\partial B(0,1))$ に対し u を境界値問題

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } B(0,1) \\ u &= g \qquad \text{on } \partial B(0,1) \end{aligned}$$

の解とする．n のみに依存する定数 C が存在し，

$$\max_{B(0,1)}|u|\leq C\big(\max_{\partial B(0,1)}|g|+\max_{B(0,1)}|f|\big)$$

が成り立つことを示せ.

問題 4.35 ([1], p.86) u を境界値問題

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ u &= g \qquad \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+ \end{aligned}$$

の解とする．ただし，g が有界で，$x\in\partial\mathbb{R}^n_+, |x|\leq 1$ において $g(x)=|x|$ を満たす関数である．そのとき，$\partial u/\partial x_n$ が $x=0$ の近傍で有界でないことを確認せよ.

問題 4.36 ([1], p.87) 半球 $B^+:=\{x\in\mathbb{R}^n;\ |x|<1,\ x_n>0\}$ に対し，$u\in C^2(\overline{B}^+)$ が B^+ において調和関数であるとする．さらに，$x\in\partial B^+\cap\{|x_n=0\}$ に対し $u(x)=0$ が成り立つとする．そのとき，$B(0,1)$ で定義される関数

$$v(x):=\begin{cases} u(x) & x_n\geq 0 \text{ のとき} \\ -u(x_1,\dots,x_{n-1},-x_n) & x_n<0 \text{ のとき} \end{cases}$$

が $B(0,1)$ において調和関数であることを示せ.

References

[1] L. C. Evans: Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.

[2] G. B. Folland: Introduction to Partial Differential Equations, Princeton University Press, 1995.

[3] D. Gilbarg, N.S. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, 2001.

[4] F. John: Partial Differential Equations, Springer, 1982.

4 ラプラス方程式

概要

この講義では楕円型方程式に対するエネルギーの最小化という観点から解の性質を考える．

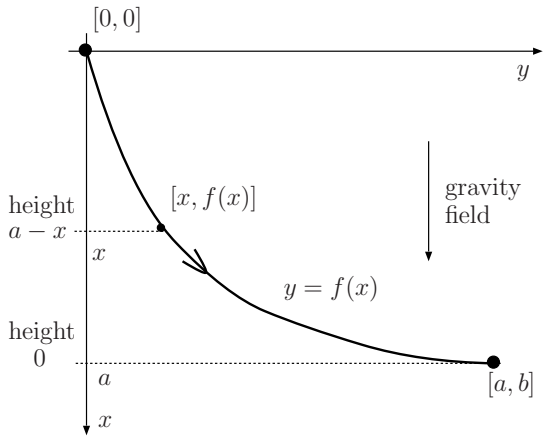
4.9 変分法について

ポアソン方程式の解析は，対応するエネルギー汎関数に着目した変分法（variational methods）というアプローチもある．この方法は，シンプルでエレガントな証明ができることが多いだけではなく，特異性や非線形性にも対処できるという意味で重要な解析手段である．

4.9.1 例：最速降下曲線

重力場のなかの質点の運動を考える．空気などの摩擦がないとする．目標は，平面上の 2 点 $[0,0]$ と $[a,b]$ を結ぶ曲線に沿って質点が動くとき，点 $[0,0]$ から点 $[a,b]$ まで最短の時間でたどりつくような曲線を求めることである．

x 軸と y 軸の位置と向きを次のように設定する．x 軸は垂直方向にあり，正の方向が下に向いているようにとる．また，y 軸は水平方向にあり，正の方向が右に向いているようにとる．そうすれば，質点が重力だけで $[0,0]$ から $[a,b]$ まで移動できるには，$a>0$ を仮定しなければならない．



求める曲線を関数 $f(x)$ のグラフとして表現する．質点が点 $[0,0]$ から初期速度 0 で動き始めるとすると，高さ $a-x$ における質点の速度 $v(x)$ をエネルギー保存則より計算できる：

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg(a-x) = mga$$

ここで m は質量で，式の左辺は高さ $a-x$ における質点の運動エネルギーと位置エネルギーを表し，右辺は初期の位置エネルギーを表している．この関係式より

$$v(x) = \sqrt{2gx}$$

が得られる．

次に，質点が曲線 f 上を動くということを用いて，速度の異なる表現のしかたを考える．質点が動いた距離 $s(x)$ は点 $[0,0]$ と点 $[x, f(x)]$ を結ぶ曲線 f の長さに等しい：

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (f'(\xi))^2}\, d\xi.$$

よって，$f \in C^1[0,a]$ を仮定すると，$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt}$ という関係より

$$\sqrt{2gx} = v(x) = \frac{ds}{dx}(x)\frac{dx}{dt} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\frac{dx}{dt}$$

が得られ，結局

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\sqrt{2gx}}$$

が分かる．この等式を積分すれば，質点が f の曲線に沿って動くときに高さ $a-x$ に到着するために必要な時間が求まる：

$$t(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\sqrt{2gx}}\, dx.$$

従って，質点が最短時間で点 $[a,b]$ にたどりつくような曲線を求める問題は以下の問題に変形された．

変分問題

$\tilde{f}(0) = 0,\ \tilde{f}(a) = b$ をみたし，

$$T(f) = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\sqrt{2gx}}\, dx$$

の最小値を与える $\tilde{f} \in C^1[0,a]$ を見つけよ．

条件 $\tilde{f}(a) = b$ が線形な空間を与えないので，$g(x) = f(x) - \frac{b}{a}x$ という変換を施す．すると，上の問題は次のようになる．

変分問題

$$\min_{g \in Y} T(g), \qquad T(g) = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + (g'(x) + \frac{b}{a})^2}}{\sqrt{x}}\, dx$$

ここで，Y は線形空間　$Y = \{g \in C^1[0,a],\ \ g(0) = g(a) = 0\}$　である．

この問題の解となる曲線を **最速降下曲線**（brachistochrone curve）とよぶ．英語名はギリシャ語の *brachistos*（最短）からきている．実は，後でわかるように，この曲線はサイクロイドと一致する．

最小化問題（minimization problem）は，まず汎関数 T の第一変分（first variation）（関数の微分に相当）を計算することにより解く．関数 $\varphi \in C_0^\infty(0,a)$ を任意に選ぶ．これは，φ は台がコンパクト，つまり境界点 0 と a の近傍で 0 になるという意味である．$g+\varepsilon\varphi$ という関数が全ての ε に対し Y に属するので，不等式 $T(g) \le T(g+\varepsilon\varphi)$ が成り立ち，$T(g+\varepsilon\varphi)$ の最小値が $\varepsilon = 0$ において得られることがわかる：

$$\frac{d}{d\varepsilon} T(g+\varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0} = 0.$$

さて，

$$T(g+\varepsilon\varphi) = \int_0^a \frac{\sqrt{1+(g'(x)+\varepsilon\varphi'(x)+\frac{b}{a})^2}}{\sqrt{x}}\,dx$$

より

$$\frac{d}{d\varepsilon} T(g+\varepsilon\varphi) = \int_0^a \frac{2\big(g'(x)+\varepsilon\varphi'(x)+\frac{b}{a}\big)\varphi'(x)}{2\sqrt{x}\sqrt{1+(g'(x)+\varepsilon\varphi'(x)+\frac{b}{a})^2}}\,dx$$

と計算できる．従って，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} T(g+\varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0} &= \int_0^a \frac{f'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1+(f'(x))^2}}\varphi'(x)\,dx \\
&= -\int_0^a \frac{d}{dx}\Big(\frac{f'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1+(f'(x))^2}}\Big)\varphi(x)\,dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

上の式は全ての $\varphi \in C_0^\infty(0,a)$ に対して成り立つので，以下のいわゆる **オイラー・ラグランジュ方程式** （Euler-Lagrange equation）を得る：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\right) = 0. \qquad \forall x \in (0,a)$$

この方程式は次のように積分できる：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} &= \sqrt{C}, \qquad C>0 \text{ 積分定数} \\
\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} &= \sqrt{Cx} \\
\frac{(f'(x))^2}{1+(f'(x))^2} &= Cx \\
f'(x) &= \sqrt{\frac{Cx}{1-Cx}} \\
f(x) &= \frac{1}{C}\Big[\arctan\sqrt{\frac{Cx}{1-Cx}} - \sqrt{Cx(1-Cx)}\Big] + k
\end{aligned}$$

条件 $f(0)=0$ より $k=0$ が従う．定数 C は 2 つ目の条件 $f(a)=b$ から決められる．すなわち，

$$\arctan\sqrt{\frac{aC}{1-aC}} - \sqrt{aC(1-aC)} = bC.$$

もし $b/a > \pi/2$ であれば，この解は $C=0$ に限る．そのとき f が定数関数となり，$b \neq 0$ とすれば不適である．よって，この場合は解が存在しない（少なくとも考えている C^1-級の関数の範囲では）．

一方では，$b/a < \pi/2$ のとき，$C \neq 0$ を満たす解がただ一つある．この場合，f のグラフはサイクロイドである． ■

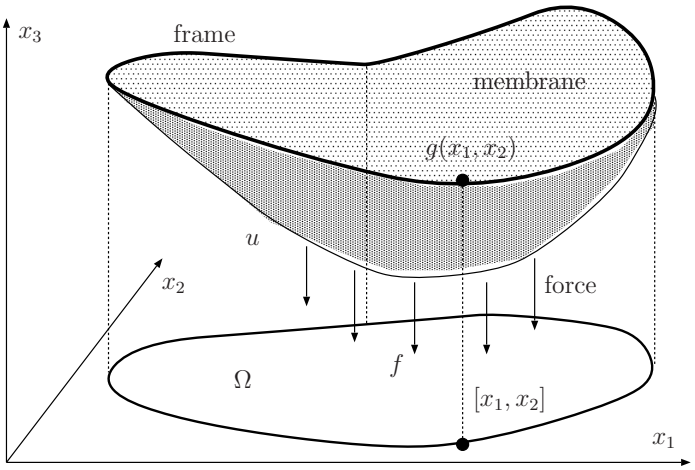
このように，汎関数 T の最小値を汎関数に対するオイラー・ラグランジュ方程式を導き解くことにより求めた．一方，反対方向に考えることもできる．つまり，偏微分方程式を解く問題が与えられたときその偏微分方程式がオイラー・ラグランジュ方程式になるような汎関数を構成することが考えられる．そうすることによって，変分法のテクニックを用いて解の存在や性質を証明することが簡単になることがよくある．また，数値計算においても最小化問題の形だと便利なときが多い．

4.9.2 ディリクレの原理

偏微分方程式と最小化問題の対応を利用した解析の例として，固定された枠の中に張られた弾性膜を考える．

> この設定での変分法による波動方程式の導出は [1], p.32 でなされている．

枠の形は，水平面 $x_3 = 0$ の点 $[x_1, x_2]$ からの枠への距離 $g(x_1, x_2)$ で表す．また，枠を平面 $x_3 = 0$ に射影することによりできる閉曲線を境界に持つ領域を Ω とする．膜の形状が関数 $u(x_1, x_2)$ で表されるとする．



膜に外力 $f(x_1, x_2)$ が働くとき，膜のエネルギーを

$$J(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - uf\right] dx_1\, dx_2$$

と表すことができる．

膜が釣り合いの状態 u にあるとき，エネルギー J は極値になる．すなわち，この場合，境界条件をみたす関数の集合

$$\mathcal{A} = \{w \in C^2(\bar{\Omega}) \mid w = g \text{ on } \partial\Omega\}$$

を導入すると，$u \in \mathcal{A}$ は次を満たす：

$$J(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} J(w).$$

この最小化問題とそのオイラー・ラグランジュ方程式の関係について次のことがわかる．

定理 4.18 (Dirichlet's principle) 次の二つの主張は同値である．

(1) $u \in C^2(\bar{\Omega})$ は $(*)$ $\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \textit{in } \Omega \\ u = g & \textit{on } \partial\Omega \end{array} \right\}$ の解である．

(2) $u \in \mathcal{A}$ は $J(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} J(w)$ を満たす．

証明

- (1) ⇒ (2) を示す： $w \in \mathcal{A}$ を任意に選んで，$J(u) \le J(w)$ を示せばよい．(*) より
$$0 = \int_\Omega (-\Delta u - f)(u - w)\, dx$$
グリーンの公式を用いると，
$$0 = \int_\Omega \big[\nabla u \cdot \nabla(u - w) - f(u - w)\big]\, dx.$$
(Ω の境界では $u - w = g - g = 0$ なので，境界の積分は出てこない．)
そこで，$|\nabla u \cdot \nabla w| \le |\nabla u|\,|\nabla w| \le \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla w|^2$ という不等式を用いて，
$$\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - uf\right]\, dx = \int_\Omega \left[\nabla u \cdot \nabla w - wf\right]\, dx \le \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2\, dx + \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf\right]\, dx.$$
これは，$J(u) \le J(w)$ そのものである．

- (2) ⇒ (1) を示す： $u \in \mathcal{A}$ が $J(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} J(w)$ を満たすとする．$u \in \mathcal{A}$ だから，(*) の境界条件は満たされる．後は，$-\Delta u = f$ を示せばよい．任意の $v \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し，
$$j(\tau) = J(u + \tau v), \qquad \tau \in \mathbb{R}$$
とおく．全ての $\tau \in \mathbb{R}$ に対し，$u + \tau v$ が $\mathcal{A}$ に属するから，関数 $j(\tau)$ は $\tau = 0$ において最小値を持つ．よって，$j'(0) = 0$.
j を書き下すと，次のようになる．
$$\begin{aligned} j(\tau) &= \int_\Omega \big[\frac{1}{2}|\nabla u + \tau \nabla v|^2 - (u + \tau v) f\big]\, dx \\ &= \int_\Omega \big[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \tau \nabla u \cdot \nabla v + \frac{\tau^2}{2}|\nabla v|^2 - (u + \tau v) f\big]\, dx. \end{aligned}$$
従って，
$$0 = j'(0) = \int_\Omega \big[\nabla u \cdot \nabla v - vf\big]\, dx = \int_\Omega (-\Delta u - f) v\, dx.$$
この等式は全ての $v \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して成り立つので，Ω において $-\Delta u = f$ を得る． □

[3], p.88 も参照.

解のエネルギー（この場合は微分の L^2-ノルム）を用いて，一意性も簡単に証明できる．

命題 4.19 (一意性) 定理*4.18*の *(*)* の問題に対し，$C^2(\bar{\Omega})$ の解が高々一つ存在する．

証明

2 つの解 u_1, u_2 が存在するとして，$w = u_1 - u_2$ とおく．すると，$\Delta w = 0$ であり，w は境界上で 0 になる．よって，

$$0 = -\int_\Omega w\Delta w\, dx = \int_\Omega |\nabla w|^2\, dx,$$

つまり，Ω では $\nabla w \equiv 0$ である．境界上では $w = 0$ であるから，Ω 全体で $w = 0$，すなわち $u_1 = u_2$ を得る． □

上でポアソン方程式を最小化問題に直す方法を紹介したが，異なる記述を考える理由は多くある．例えば，方程式で記述される問題の解の存在を言うにはかなり複雑な議論が必要になる（領域が球の場合でも，グリーン関数を用いた解の存在証明はシンプルではなかった）．しかし，変分問題で考えると,「関数が連続で強圧ならば最小値をもつ」という簡単な事実を汎関数 J に適用すればすぐに解の存在が言える．変分的記述が便利な他の例は次節で説明する拘束条件つきの問題である．この場合は，方程式で書くと非線形で非局所的な項が現れ扱いにくいが，最小化問題の枠組みでは単に制約がつくだけである．

4.9.3 拘束つき最小化問題

ここでは，偏微分方程式のレベルでは扱いにくい大域的な拘束条件が変分法の枠組みでどのように扱われるかについて紹介する．上の例と同じように，枠に張られた弾性膜を考える．今回は，膜の下に非圧縮流体が存在し，膜の囲む領域の体積が決まっている場合を調べる.（膜が垂直な壁を持つ容器の縁に張られていると想像してみればよい.）

この系のエネルギーを表すには，前回導入した膜の面積による弾性エネルギー $\int \frac{1}{2}|\nabla u|^2$ を再び用いる．さらに，膜の下にある流体の位置エネルギーも考慮するのが自然である．このエネルギーは流体の微小な円柱に対して次のように計算される：

$$E_p = m \cdot g \cdot h = (dx \cdot u \cdot \rho) \cdot g \cdot \frac{u}{2} = \frac{1}{2}\rho g u^2 dx.$$

ここで，dx は膜が存在する領域 Ω（容器の場合は容器の底に相当する）の微小部分，ρ は流体の密度，$u(x)$ は点 $x \in \Omega$ における膜の高さである．

よって，系のエネルギーを次のように書く：

$$J(u) = \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 + \tfrac{\rho g}{2}u^2\right)\, dx.$$

このエネルギーが最小となるような膜の形状 $u(x)$ を求める．流体の体積を V とすると，拘束条件

$$\int_\Omega u(x)\, dx = V$$

のもとで最小化することになる．簡単のため，領域 Ω の境界での膜の高さが 0 であると仮定しよう．そのとき，以下の最小化問題になる．

$$\min_{u\in\mathcal{A}} J(u), \qquad \text{where } \mathcal{A}=\left\{u\in H^1(\Omega);\ u=0 \text{ on } \partial\Omega,\ \int_\Omega u(x)\,dx=V\right\}$$

さて，u が minimizer（最小化関数）であるとして，オイラー・ラグランジュ方程式を導こう．この場合，$J(u)\le J(u+\varepsilon\varphi)$ がテスト関数 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ に対して成り立つとは限らない．それは，$\int\varphi=0$ でない限り，$u+\varepsilon\varphi$ が $\mathcal{A}$ に属せず，比較関数として利用できないからである．体積を保存するような比較関数を構成しなければならない．一つの可能性は，

$$V\frac{u+\varepsilon\varphi}{\int_\Omega(u+\varepsilon\varphi)\,dx}=\frac{u+\varepsilon\varphi}{1+\frac{\varepsilon}{V}\int_\Omega\varphi\,dx}, \qquad \varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

という関数である．ε が絶対値で十分小さければ分母が正になるので，この定義は意味がある．

関数 u が最小化関数であるから，

$$j(\varepsilon)=J\left(\frac{u+\varepsilon\varphi}{1+\frac{\varepsilon}{V}\int_\Omega\varphi\,dx}\right)$$

という関数は $\varepsilon=0$ において最小値を持つ．すなわち，$j'(0)=0$ である．関数 j の具体的な形を書く：

$$j(\varepsilon)=\int_\Omega\left\{\frac{1}{2}\frac{|\nabla u+\varepsilon\nabla\varphi|^2}{\left(1+\frac{\varepsilon}{V}\int_\Omega\varphi\,dx\right)^2}+\frac{\rho g}{2}\frac{(u+\varepsilon\varphi)^2}{\left(1+\frac{\varepsilon}{V}\int_\Omega\varphi\,dx\right)^2}\right\}dx.$$

その微分は

$$j'(\varepsilon)=\int_\Omega\left\{\frac{(\nabla u+\varepsilon\nabla\varphi)\nabla\varphi}{\left(1+\frac{\varepsilon}{V}\int_\Omega\varphi\right)^2}-\frac{|\nabla u+\varepsilon\nabla\varphi|^2}{\left(1+\frac{\varepsilon}{V}\int_\Omega\varphi\right)^3}\cdot\frac{\int_\Omega\varphi}{V}+\frac{\rho g(u+\varepsilon\varphi)\varphi}{\left(1+\frac{\varepsilon}{V}\int_\Omega\varphi\right)^2}-\frac{\rho g(u+\varepsilon\varphi)^2}{\left(1+\frac{\varepsilon}{V}\int_\Omega\varphi\right)^3}\cdot\frac{\int_\Omega\varphi}{V}\right\}dx$$

となる．従って，$\varepsilon=0$ での値を求めると，

$$\begin{aligned} j'(0) &= \int_\Omega\left\{\nabla u\nabla\varphi-|\nabla u|^2\frac{\int_\Omega\varphi\,dx}{V}+\rho gu\varphi-\rho gu^2\frac{\int_\Omega\varphi\,dx}{V}\right\}dx \\ &= \int_\Omega(-\Delta u+\rho gu)\varphi\,dx-\frac{1}{V}\int_\Omega\Big(\int_\Omega(|\nabla u|^2+\rho gu^2)\,dx\Big)\varphi\,dx \end{aligned}$$

を得る．これが全てのテスト関数 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ に対し 0 になるので，

$$-\Delta u+\rho gu=\frac{1}{V}\int_\Omega(|\nabla u|^2+\rho gu^2)\,dx$$

が成り立つ．上の等式の右辺に非局所的な項がある．この u に依存する定数を λ とし，体積条件に関するラグランジュ未定乗数と呼ぶ．この項は膜の下の体積が決まっていることに由来し，膜に働く外気圧として解釈できる．

まとめて言うと，最小化関数は存在するなら以下の方程式を満たすことが分かった：

$$-\Delta u+\rho gu=\lambda. \tag{4.1}$$

> 汎関数 J の下半連続性を使うと，最小化関数が実際に存在することが証明できる．[2], p.463 を参照.

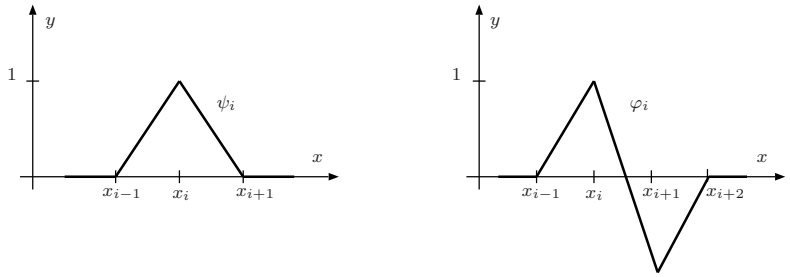
次に，上の問題を数値計算により解く方法をいくつか紹介する．

(1) 一つの方法として，方程式 (4.1) を直接有限要素法などで解くものがある．しかし，λ が解に非線形に依存するので，この方法は難しい．

(2) 他の方法は有限要素法で特別な基底関数を用いることである．このとき，まず解となる関数 u から体積 V をもつ任意の関数 u_0 を引いて，もとの問題を体積が 0 になるという条件をもつ問題に変形する．実際，$v = u - u_0$ とおくと，問題は次のように変形される．

$$\min_{v\in\mathcal{A}_0}\int_\Omega \left(\tfrac{1}{2}|\nabla v+\nabla u_0|^2+\tfrac{\rho g}{2}(v+u_0)^2\right)\,dx,\quad \text{where } \mathcal{A}_0=\left\{v\in H_0^1(\Omega);\ \int_\Omega v(x)\,dx=0\right\}.$$

ここで，標準的な「ピラミッド型」の基底関数の代わりに 0 の体積を持つ基底関数を用いる：



全ての基底関数の体積（積分）が 0 であるから，基底関数の線形結合である近似解も体積が 0 になることが保証される．

(3) もう一つの方法は拘束された最小化アルゴリズムを使う方法である．領域 Ω は有限要素法により格子に離散化され，基底関数 $\{w_i\}_{i=1}^N$ が決められる．近似解は

$$u_N(x)=\sum_{i=1}^N \alpha_i w_i(x)$$

という形をとる．そこで，課題は係数 $\alpha_1,\dots,\alpha_N$ を見つけることである．u_N を汎関数 J に代入すると，

$$J(u_N)=\int_\Omega\left\{\frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^N\alpha_i\nabla w_i(x)\right|^2+\frac{\rho g}{2}\Big(\sum_{i=1}^N\alpha_i w_i(x)\Big)^2\right\}dx=\bar{J}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N)$$

を得る．$\bar{J}$ が N 変数 $\alpha_1,\dots,\alpha_N$ の 2 次関数であることが分かる．$\bar{J}(\boldsymbol{\alpha})=\bar{J}(\alpha_1,\dots,\alpha_N)$ が拘束条件のもとで最小になるように $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_N)$ を見つけたい．体積の条件は

$$\int_\Omega u_N(x)\,dx=\int_\Omega\sum_{i=1}^N\alpha_i w_i(x)\,dx=\sum_{i=1}^N\alpha_i\int_\Omega w_i(x)\,dx=C_w\sum_{i=1}^N\alpha_i=V$$

と書ける．ここで，全ての基底関数 w_i が同じ形であるから，その積分が同一の定数 C_w になることに注意した．従って，離散化された体積保存条件は

$$\sum_{i=1}^N\alpha_i=V^*=\frac{V}{C_w}\tag{4.2}$$

となる．

線形な制約のもとで 2 次関数を最小化する問題に帰着されるので，数値計算では次のように進めればよい：

最急降下法（汎関数 $\bar{J}$ の拘束つき最小化）：

1. 初期近 $\boldsymbol{\alpha}^0$ を任意に選び，$j = 0$ とおく．
2. 汎関数 $\bar{J}$ の $\boldsymbol{\alpha}^j$ における最急降下の方向，つまりマイナス勾配 $-\nabla\bar{J}(\boldsymbol{\alpha}^j)$ を計算する．
3. 直線 $\boldsymbol{\alpha}^j - t\nabla\bar{J}(\boldsymbol{\alpha}^j),\ t \in \mathbb{R}, t > 0$ に沿っての汎関数 $\bar{J}$ の最小値を求める．これは，1 次元の最小化問題であるから，二分法などが使える．t_j を最小値が達成される点とする．すなわち，
$$\bar{J}\big(\boldsymbol{\alpha}^j - t_j\nabla\bar{J}(\boldsymbol{\alpha}^j)\big) = \min_{t\in\mathbb{R}} \bar{J}\big(\boldsymbol{\alpha}^j - t\nabla\bar{J}(\boldsymbol{\alpha}^j)\big).$$
4. $\boldsymbol{\alpha}^{j+1/2} = \boldsymbol{\alpha}^j - t_j\nabla\bar{J}(\boldsymbol{\alpha}^j)$ とおく．拘束条件がない場合，これで最急降下法の一つの反復が終了するが，ここでは体積の条件を満たさないといけないので，$\boldsymbol{\alpha}^{j+1/2}$ を体積保存平面に次のように射影する：
$$\boldsymbol{\alpha}^{j+1} = \boldsymbol{\alpha}^{j+1/2} + \mu_j(1, 1, \ldots, 1).$$
ここで，$(1, 1, \ldots, 1)$ は超平面 (4.2) への法線ベクトルで，μ_j は $\boldsymbol{\alpha}^{j+1}$ の体積が V^* になるように決定される．つまり，
$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{j+1} = V^*$$
が成り立つように μ_j を選ぶ．
5. 収束判定を行う．もし
$$\frac{|\bar{J}(\boldsymbol{\alpha}^{j+1}) - \bar{J}(\boldsymbol{\alpha}^j)|}{|\bar{J}(\boldsymbol{\alpha}^j)|} < \varepsilon$$
という条件が満たされず，最初に設定した最大の反復回数に達していない場合，$j = j + 1$ とし，ステップ 2. に戻る．それ以外の場合，終了する．

4.9.4 熱放射の定常問題

定義 4.20 (汎関数の微分) V をバナッハ空間とし，$v, w \in V$，そして汎関数 J が点 v の近傍で定義されるとする．極限
$$J'(v; w) = \lim_{t\to 0} \frac{J(u + tw) - J(u)}{t}$$
が存在し有限なとき，汎関数 J の点 v における **方向 w の（方向）微分** と呼ばれる．さらに，作用素 $J'(v; \cdot) : V \to \mathbb{R}$ が有界線形作用素のとき，J の点 v における**ガトー微分**（*Gâteaux derivative*）と呼ぶ．

次を満たす有界線形作用素 $J'(v)(\cdot) : V \to \mathbb{R}$ が存在するとき，
$$\lim_{w\to 0, w\in V} \frac{|J(u + w) - J(u) - J'(u)w|}{\|w\|} = 0,$$
この作用素を J の点 v における **フレシェ微分**（*Fréchet derivative*）と呼ぶ． ■

注

- フレシェ微分が存在するとき，ガトー微分も存在し 2 つの微分は $J'(v;w) = J'(v)(w)$ という意味で一致する．しかし，逆の主張は成立しない．
- 点 v におけるフレシェ微分の存在より J の点 v における連続性が従うが，ガトー微分に対し同じ主張は成り立たない． ■

物体が電磁波を発することによって表面から熱エネルギーを失うことが知られている．この現象を**熱放射**（輻射）と呼ばれ，乾式変圧器や回転電気機械の機能に大きな影響を与える．キルヒホッフの法則によると，失われる熱量が温度の 4 乗に比例する．これは非線形な境界条件

$$\alpha(u-u_0) + \boldsymbol{n}^T A\nabla u + \beta(u^4 - u_0^4) = \bar{g}$$

により記述される．ここで，u は物体の温度，u_0 は外気温，$\alpha \geq 0$ は対流熱伝達率，$\boldsymbol{n}$ は物体の表面への外向き単位法線ベクトル，A は熱伝導率を表す正定値対称行列，$\beta = \sigma f_{\mathrm{em}}$，ただし $\sigma = 5,669 \times 10^{-8}[\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}]$ はシュテファン=ボルツマン定数，$f_{\mathrm{em}} \in [0,1]$ は放射率関数，$\bar{g}$ は熱源の面積密度である．

古典問題（強い問題）

次の条件を満たす関数 $u \in C^2(\bar{\Omega}), u \geq 0$ を求める：

$$-\mathrm{div}\,(A\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega, \tag{4.3}$$

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_1, \tag{4.4}$$

$$\alpha u + \boldsymbol{n}^T A\nabla u + \beta u^4 = g \quad \text{on } \Gamma_2. \tag{4.5}$$

ここで，$\Omega \subset \mathbb{R}^2$， Γ_1, Γ_2 は空でない集合，f は熱源の体積密度，$\bar{u} \geq 0$ は指定された関数，$g = \bar{g} + \alpha u_0 + \beta u_0^4$ である．

上の問題に対する古典解が存在するとは限らないので，弱い問題を導出する．そのため，問題のパラメータが $A \in L^\infty(\Omega), f \in L^2(\Omega), \bar{u} \in H^1(\Omega), \alpha, \beta \in L^\infty(\Gamma_2), g \in L^2(\Gamma_2)$ を満たすと仮定する．以下の通り，定義しておく：

$$V = \{v \in H^1(\Omega);\ v = 0 \ \text{ on } \Gamma_1\} \qquad \text{（テスト関数の空間）}$$

$$U = \{v \in H^1(\Omega);\ v \geq 0 \text{ in } \Omega,\ v = \bar{u} \text{ on } \Gamma_1\} \qquad \text{（凸な集合）}$$

$$a(v,w) = \int_\Omega (\nabla v)^T A\nabla w\,dx + \int_{\Gamma_2} \alpha v w\,ds, \quad v,w \in H^1(\Omega) \qquad \text{（対称な双一次形式）}$$

$$F(v) = \int_\Omega fv\,dx + \int_{\Gamma_2} gv\,ds, \quad v \in H^1(\Omega) \qquad \text{（連続な一次形式）}$$

問題 (4.3)-(4.5) の解 $u \in U$ が存在するとし，$v \in U$ を任意の関数とする．式 (4.3) に $v-u$ をかけて，グリーンの定理を用いると，

$$\int_\Omega (\nabla u)^T A(v-u)\,dx - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}^T A(v-u)\,ds = \int_\Omega f(v-u)\,dx \qquad \forall v \in U,$$

つまり，

$$a(u, v-u) + \int_{\Gamma_2} \beta u^4 (v-u)\, ds = F(v-u) \qquad \forall v \in U$$

という関係式が得らる．

弱い問題

次の変分不等式を満たす関数 $u \in U$ を求めよ：

$$a(u, v-u) + \int_{\Gamma_2} \beta u^4 (v-u)\, ds \geq F(v-u) \qquad \forall v \in U. \tag{4.6}$$

ポテンシャル・エネルギーの汎関数を

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) + \frac{1}{5} \int_{\Gamma_2} \beta v^5\, ds - F(v), \qquad v \in H^1(\Omega)$$

によって定義する．第 2 項の有界性はトレースの定理により保証される．

J の点 $v \in H^1(\Omega)$ における方向 $w \in H^1(\Omega)$ の方向微分を計算する：

$$\begin{aligned}
J'(v;w) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(J(v+tw) - J(v)) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\frac{1}{2}a(v,v) + ta(v,w) + \frac{1}{2}t^2 a(w,w) - \frac{1}{2}a(v,v) \\
&\qquad + \int_{\Gamma_2} \beta\big(\tfrac{1}{5}v^5 + tv^4 w + 2t^2 v^3 w^2 + 2t^3 v^2 w^3 + t^4 v w^4 + \tfrac{1}{5}t^5 w^5 - \tfrac{1}{5}v^5\big)\, ds - tF(w)\Big) \\
&= a(v,w) + \int_{\Gamma_2} \beta v^4 w\, ds - F(w).
\end{aligned}$$

同様に，2 階の方向微分を計算できる：

$$J''(v;w,w) = a(w,w) + 4\int_{\Gamma_2} \beta v^3 w^2\, ds, \qquad v, w \in H^1(\Omega). \tag{4.7}$$

補題 4.21 汎関数 J は $H^1(\Omega)$ 上でノルム $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ について連続で，集合 U の上で強い意味で凸である．

証明

J の連続性を示すには，J のガトー微分がフレシェ微分になるということを示せばよい．すなわち，

$$\lim_{w\to 0, w\in H^1(\Omega)} \frac{|J(v+w)-J(v)-J'(v;w)|}{\|w\|_{H^1(\Omega)}} = 0 \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{4.8}$$

上で計算した J と J' の式，ヘルダー不等式とトレースの定理より，

$$\begin{aligned}
&|J(v+w)-J(v)-J'(v;w)| \le \frac{1}{2}a(w,w) + \int_{\Gamma_2} \beta|2v^3w^2 + 2v^2w^3 + vw^4 + \tfrac{1}{5}w^5|\,ds \\
&\le C_1\|w\|^2_{H^1} + C_2\Big(\|v\|^3_{L^5(\partial\Omega)}\|w\|^2_{L^5(\partial\Omega)} + \|v\|^2_{L^5(\partial\Omega)}\|w\|^3_{L^5(\partial\Omega)} + \|v\|_{L^5(\partial\Omega)}\|w\|^4_{L^5(\partial\Omega)} + \|w\|^5_{L^5(\partial\Omega)}\Big) \\
&\le C\big(\|w\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v\|^3_{H^1(\Omega)}\|w\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v\|^2_{H^1(\Omega)}\|w\|^3_{H^1(\Omega)} + \|v\|_{H^1(\Omega)}\|w\|^4_{H^1(\Omega)} + \|w\|^5_{H^1(\Omega)}\big) \\
&\le C(v)\|w\|^2_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

という評価が任意の $\|w\|_{H^1(\Omega)} \le 1$ に対して成り立つことを得る．したがって，(4.8) が成立し，J は連続である．
2 階微分の式 (4.7) より，定数 $C > 0$ が存在し次が成り立つことがわかる：

$$J''(v;w,w) \ge C\|w\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in U \ \ \forall w \in V.$$

これは，汎関数が U において強い意味で凸であることを意味する． □

注 非線形な境界項のため汎関数は全空間 $H^1(\Omega)$ においては凸ではない．非負の関数の集合に考察を制限した理由はそこにある．温度が 0[K] より下がることがないので自然な仮定である．しかし，それによって 2 つの非線形性が現れる：一つはシュテファン=ボルツマンの条件によるもので，もう一つは凸集合 U の定義における $v \ge 0$ という制約によるものである． ■

命題 4.22 変分問題

$$J(u) = \inf_{v\in U} J(v)$$

を満たす解 $u \in U$ がただ一つ存在する．

証明

形式 a の性質と J の連続性より，正の定数 C_1, C_2 が存在し，次が成り立つ：

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) + \frac{1}{5}\int_{\Gamma_2} \beta v^5\,ds - F(v) \ge C_1\|v\|^2_{H^1(\Omega)} - C_2\|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in U.$$

よって，汎関数 J が U において強圧である，すなわち，

$$J(v) \to \infty \qquad \text{for } \|v\|_{H^1(\Omega)} \to \infty, \quad v \in U.$$

$\bar{v} \in U$ が任意であれば，上の関係式より $r > 0$ が存在し，$\|v\|_{H^1(\Omega)} > r$ であれば $J(\bar{v}) < J(v)$ が成り立つ．したがって，有界でない集合 U についての J の最小化と，有界集合

$$\bar{U} = \{v \in U;\ \|v\|_{H^1(\Omega)} \le r\}$$

についての最小化は同値である．証明は，凸性に関する上の補題と下の補題より直ちに従う． □

補題 4.23 $\bar{U}$ が空でない，凸で有界な $H^1(\Omega)$ の部分閉集合であるとする．また，J が $\bar{U}$ の上で定義される連続で凸な汎関数であるとする．そのとき，

(a) $\inf_{v\in\bar{U}} J(v) > -\infty$

(b) 次を満たす $u \in \bar{U}$ が一つ以上存在する：

$$J(u) = \inf_{v\in\bar{U}} J(v)$$

(c) さらに，J が $\bar{U}$ の上で強い意味で凸ならば，*(b)* を満たす u がただ一つ存在する．

注 凸な部分集合 $U \subset H^1(\Omega)$ の上での凸でガトー微分可能な汎関数 J の最小化問題が次の変分不等式を満たす $u \in U$ を求める問題と同値であることが知られている：

$$J'(u; v-u) \geq 0 \qquad \forall v \in U.$$

よって，弱い問題 (4.6) に対し，ただ一つの解が存在することがわかる． ■

4.9.5 単調なポテンシャル作用素について

この節では，単調な作用素と凸な汎関数の関係について理解を深める．V という記号は内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ をもつヒルベルト空間を表す．

作用素 $A : V \to V$ が **ポテンシャル** 作用素であるというのは，汎関数 $J : V \to \mathbb{R}$ が存在し次が成り立つという意味である：

$$\langle Av, w\rangle = J'(v; w) \qquad \forall v, w \in V. \tag{4.9}$$

命題 4.24 $J : V \to \mathbb{R}$ がガトー微分可能であるとし，作用素 A を式 *(4.9)* により定義する．そのとき，汎関数 J が凸であるのは，A が単調のときとそのときのみである．さらに，J が狭義凸であるのは，A が狭義単調であるときとそのときのみである．

証明

（前半のみ）

- J が凸であると仮定する．$v_1, v_2 \in V$ が任意のとき，$w = v_1 - v_2$ そして

$$j(t) = J(v_2 + tw), \qquad t \in \mathbb{R}$$

とおく．そのとき勝手な $\lambda \in [0,1]$ と $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ に対し次が成り立つ：

$$\begin{aligned} \lambda j(t_1) + (1-\lambda) j(t_2) &= \lambda J(v_2 + t_1 w) + (1-\lambda) J(v_2 + t_2 w) \\ &\geq J\big(\lambda(v_2 + t_1 w) + (1-\lambda)(v_2 + t_2 w)\big) \\ &= j(\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2), \end{aligned}$$

すなわち，j という関数は凸である．したがって，j の微分

$$j'(t) = J'(v_2 + tw; w)$$

は非減少関数であり，

$$0 \leq j'(1) - j'(0) = J'(v_1; v_1 - v_2) - J'(v_2; v_1 - v_2) = \langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 \rangle$$

を得る．

- 逆に，A が単調であると仮定しよう．v_1, v_2 と j を上と同様に定義すると，全ての $t_2 \geq t_1$ に対し

$$\langle A(v_2 + t_2 w) - A(v_2 + t_1 w), (t_2 - t_1) w \rangle \geq 0$$

が成立する．このことより，j' が非減少関数であることが言える：

$$j'(t_2) = J'(v_2 + t_2 w; w) \geq J'(v_2 + t_1 w; w) = j'(t_1).$$

よって，j が凸で，

$$j(\lambda) \leq \lambda j(1) + (1-\lambda) j(0)$$

という式より J の凸性が得られる：

$$J(\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2) \leq \lambda J(v_1) + (1-\lambda) J(v_2). \quad \square$$

凸な集合の上での狭義凸な汎関数の最小値が存在するとは限らない．例えば，$J(v) = e^v$ を $\mathbb{R}$ において最小化する問題を考えればよい．最小値が存在するには，もう一つ，J の強圧性が必要である．これはすなわち $J(v) \to \infty$ when $\|v\|_V \to \infty$ という条件である．

補題 4.25 最後の定理の仮定が満たされるとする．そのとき，A が強い意味で単調であれば J は狭義凸で強圧になる．

例 区間 $\Omega = (0,1)$ において次の非線形な微分方程式を考える：

$$-u'' + \psi(u) = f.$$

境界条件 $u(0) = u(1) = 0$ を付加し，$f \in L^2(\Omega)$ であるとし ψ がリプシッツ連続であると仮定する．対応する作用素は

$$\langle Av, w\rangle = \int_0^1 (v'w' + \psi(v)w)\,dx, \qquad v, w \in V$$

により与えられる．ここで，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は空間 $V = H_0^1(\Omega)$ における内積である．Ψ を ψ の原始関数とし，

$$J(v) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(v')^2 + \Psi(v)\right) dx, \qquad v \in V$$

とおけば，作用素 A がポテンシャル作用素であることが容易に確かめられる．

さらに，関数 ψ が非減少関数であれば，Friedrichs 不等式より A の強い意味での単調性が従う：

$$\begin{aligned}\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2\rangle &= \int_0^1 (v_1' - v_2')(v_1' - v_2')\,dx + \int_0^1 (\psi(v_1) - \psi(v_2))(v_1 - v_2)\,dx \\ &\geq \int_0^1 (v_1' - v_2')^2\,dx \geq C\|v_1 - v_2\|^2_{H^1(\Omega)}, \qquad v_1, v_2 \in V.\end{aligned}$$

よって，汎関数 J が狭義凸で強圧になり，その最小化関数がただ一つ決まる．上の微分方程式に対する一意の解の存在は単調な作用素に関する定理より得られる． ■

4.10 演習問題

問題 4.37 境界値問題

$$\begin{aligned}-\Delta u + au &= b \qquad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{on } \partial\Omega\end{aligned}$$

に対する Dirichlet の原理を書け．すなわち，この問題と同値な，汎関数の最小化問題（変分問題）を構成せよ．構成した変分問題が上の境界値問題と同値であることを示せ．ただし，$a, b \in \mathbb{R}$ は正の定数とする．

問題* 4.38 ([4], p.180) $a_0 < 0$ が存在し，$a < a_0$ ならば問題4.37で構成した汎関数が下から有界にならないことを示せ．

問題* 4.39 ([2], p.489) Ω を滑らかな境界をもつ $\mathbb{R}^n$ の開領域とする．u が表面積汎関数

$$A(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\,dx$$

を境界条件 $u = g$ on $\partial\Omega$ と体積保存条件

$$\int_\Omega u(x)\,dx = 1$$

のもとで最小にする滑らかな関数であるとする．u のグラフが平均曲率が一定になるような曲面であることを示せ．

問題* 4.40 点 $[0,0]$ に始まり点 $[1,0]$ に終わり，正方形 $[0,1]\times[0,1]$ から出ない平面内の曲線のうち，曲線の長さと曲線と x-軸に囲まれた領域の面積の差が最も小さいものを見つけよ．

問題* 4.41 汎関数 $J(u)=\int_0^1 (u')^2\,dx$ を体積保存関数

$$\mathcal{A}=\left\{u\in H_0^1(0,1);\ \int_0^1 u(x)\,dx=1\right\}$$

のなかで最小化する問題に対し，1 次要素を用いる有限要素法を考える．区間 $(0,1)$ を長さの等しい 3 つの部分区間に分けて，近似解を基底関数 w_1,w_2 の線形結合として次のように書く：

$$u_2(x)=\alpha_1 w_1(x)+\alpha_2 w_2(x).$$

(1) 汎関数 $J(u_2)$ の離散化された形 $\bar{J}(\alpha_1,\alpha_2)$ を書け．

(2) 体積保存条件 $\int_0^1 u_2(x)\,dx=1$ の離散化された形を書け．

(3) $\bar{J}(\alpha_1,\alpha_2)$ の勾配を計算せよ．

(4) 近似解 u_2 を求めよ．すなわち，係数 α_1,α_2 を求めればよい．

References

[1] 金子晃: 偏微分方程式入門, 東大出版会, 1998.

[2] L. C. Evans: Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.

[3] G. B. Folland: Introduction to Partial Differential Equations, Princeton University Press, 1995.

[4] J. Rauch: Partial Differential Equations, Springer, 1997.

4 ラプラス方程式

概要
この講義では変分法を用いて液滴の形状を調べる方法について紹介する．

4.11 自由境界問題と変分法

変分法の適用の例として，固体上にある液滴や泡の形状を求める問題を紹介する．これは定常問題であるが，対応する発展問題は多方面への応用がある．雨粒がくっつかずにスムーズに滑り落ちるような車のフロントガラスの素材開発や，人体を切ることなく指定した体内の場所に薬剤を運んでくれる「ナノ機械」と言われる微小な液滴の制御方法の開発を例として挙げる．液滴に対する発展問題については，放物型方程式と双曲型方程式を扱う講義のときに再度触れる．

液滴は表面エネルギーを最小にするような形状をとる．この形状を表す関数が満たす偏微分方程式を導出できる．しかし，液滴が固体上でどのような領域を占めるかについては，解を求めないとわからない．つまり，形状を表す関数に対する偏微分方程式をどのような領域で解けばよいか決まっておらず，このような問題を自由境界問題と呼ぶ．

ここでは，表面エネルギーに関する変分問題と偏微分方程式に関する自由境界問題の関係や，このような問題における変分法の利点について初等的なことを述べる．

モデリングのところから始めると，液滴は実際には流体で出来ているものであり，内部の流体の運動も考慮しなければならない．一方では，表面張力も重要な要素である．そこで，液滴の表面に流体自体と化学的に異なる性質をもつ膜が形成されることを考慮し，液滴をその表面を表す膜と内部の流体という二つの部分に分けて，それぞれの部分に対しモデル方程式を立てる連成問題（図 1）をモデルとして採用する．さらに，問題を簡単にするために，ここでは流体の部分を無視する．この近似は小さい液滴の場合に適用できるが，石鹸膜の泡を対象としてもかまわない．

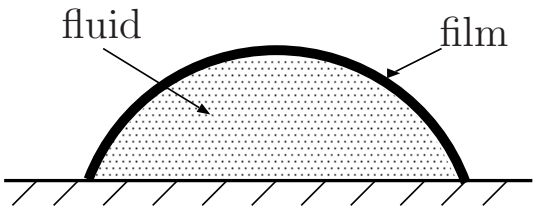


Figure 1: 連成モデル．

膜のモデル方程式を導くために，系の表面エネルギーを書き，その最小化問題を考える．まず，γ_{SG} を固体の表面張力，γ_{LG} を流体の表面，そして γ_{SL} を固体と流体の間の界面張力とする．

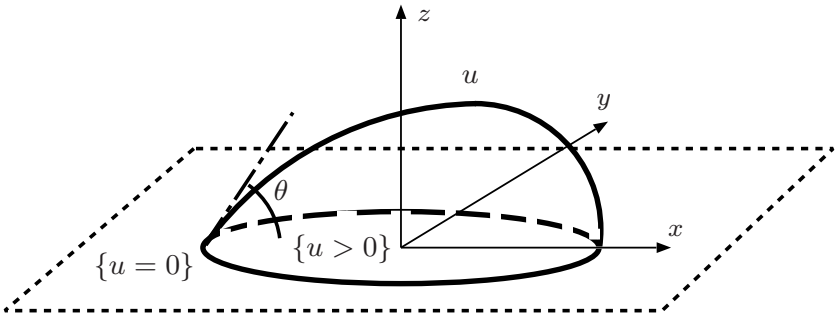


Figure 2: 平面上の液滴の設定.

液滴の接触角が $\frac{\pi}{2}$ 以下であると仮定すると，液滴の形状をスカラー関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ のグラフで表現できる．ここで，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は液滴が境界に接触しないような十分大きい領域である（図 2）．また，固体は簡単のために超平面とし，関数 u の 0-等高面と一致するとする．そのとき，$\partial\Omega$ 上では斉次の Dirichlet 境界条件を指定するのが自然である．

液滴が平面に接する領域 $\{u > 0\} \equiv \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$ の境界を自由境界とよぶ．集合 $\{x \in \mathbb{R}^n;\ u(x) > 0\}$ の特性関数を $\chi_{u>0}$ という記号で表し，表面張力の記号を次のように簡略化する：

$$\gamma_g = \gamma_{LG}, \qquad \gamma_s = \gamma_{LS} - \gamma_{SG}.$$

そのとき，系の表面エネルギーは

$$E(u) = \gamma_g \int_\Omega \left(\sqrt{1 + |\nabla u|^2}\right)\chi_{u>0}\, dx + \int_\Omega \gamma_s \chi_{u>0}\, dx \tag{4.1}$$

と書ける．

液滴の中の流体が非圧縮であるとすると，その体積 $V > 0$ は一定に保たれる．よって，液滴は体積保存条件

$$\int_\Omega u\chi_{u>0}\, dx = V, \tag{4.2}$$

のもとでエネルギー E を最小にするような形状 u をとる．

u が正でない領域での最小化関数の振る舞いに対して何も条件が課されていないため，$u \geq 0$ という条件を追加する．すると，(4.1) の (4.2) のもとでの最小化は汎関数

$$E = \gamma_g \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx + \int_\Omega (\gamma_g + \gamma_s)\chi_{u>0}\, dx, \tag{4.3}$$

の (4.2) のもとでの最小化と同値である．この最小化問題は [2] などで解析されている．当然，解析するときは最小化の対象となる関数のクラスを正確に定める必要がある．

γ_g と γ_s とが定数で，重力の影響がないとき，液滴の形は球冠となる．これは，Schwarz symmetrization と等周不等式を BV 関数の枠組みで用いれば証明できる．そのとき，物理でよく知られている接触角 θ に関するヤングの式

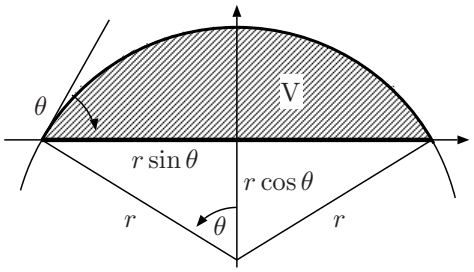
$$\gamma_s = -\gamma_g \cos\theta \tag{4.4}$$

を最小化により導くことができる．この条件を自由境界条件と言い，これを指定することによって自由境界の位置が決まる．

補題 4.26 γ_s が定数のとき，体積 V をもつ球冠のうち，エネルギー汎関数 *(4.1)* を最小にする球冠の接触角 θ は式 *(4.4)* を満たす．

証明

証明はテクニカルなので，次元 $n = 2$ の場合についてのみ簡単に述べる．下図のように，球の半径を r とし，球冠の角度を θ とおく．



すると，汎関数 (4.1) の値は

$$E(\theta, r) = 2\gamma_g \theta r + 2\gamma_s r \sin\theta. \tag{4.5}$$

球冠の面積が V と固定されているので，

$$\theta r^2 - r^2 \cos\theta \sin\theta = V.$$

ここから r を出して，(4.5) に代入すると，

$$E(\theta) = 2(\gamma_g \theta + \gamma_s \sin\theta)\sqrt{\frac{V}{\theta - \cos\theta \sin\theta}}$$

を得る．$\theta > 0$ においてこの関数は凸である．よって，$E(\theta)$ の最小値を与える角度 θ は次を満たす：

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{2\sqrt{V}(\gamma_g \cos\theta + \gamma_s)(\theta\cos\theta - \sin\theta)}{(\theta - \cos\theta\sin\theta)^{3/2}} = 0.$$

角度 θ が正ならば，$\theta\cos\theta - \sin\theta < 0$ が成り立つから，ヤングの式 (4.4) が従う． □

表面張力 γ_s が一様でないとき，液滴が球形ではなくなる．最小化関数が存在し，滑らかであると仮定すれば，次のより一般的な結果を得る．

命題 4.27 *(4.1)* の最小化関数が $\overline{\{u > 0\}}$ において滑らかならば，ヤングの式 *(4.4)* が $\partial\{u > 0\}$ 上で成り立つ．

証明

まず，最小化関数が $\{u>0\}$ において満たす方程式を導く．任意の関数 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \cap \{u>0\})$ を考え，その体積 $\int_\Omega \varphi\,dx$ を Φ という記号で表す．体積を保存する摂動として

$$u_\varepsilon = V\frac{u+\varepsilon\varphi}{V+\varepsilon\Phi}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\big(E(u_\varepsilon)-E(u)\big)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\gamma_g}{\varepsilon}\int_\Omega\Big(\sqrt{1+\frac{|\nabla u+\varepsilon\nabla\varphi|^2}{(1+\varepsilon\Phi/V)^2}}\chi_{u+\varepsilon\varphi>0}-\sqrt{1+|\nabla u|^2}\chi_{u>0}\Big)\,dx\\
&\qquad +\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \gamma_s(\chi_{u+\varepsilon\varphi>0}-\chi_{u>0})\,dx\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\gamma_g}{\varepsilon}\int_\Omega\Big(\sqrt{1+\frac{|\nabla u+\varepsilon\nabla\varphi|^2}{(1+\varepsilon\Phi/V)^2}}-\sqrt{1+|\nabla u|^2}\Big)\chi_{u>0}\,dx\\
&= \gamma_g\int_\Omega\frac{\nabla u\nabla\varphi-\frac{1}{V}|\nabla u|^2\Phi}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\chi_{u>0}\,dx\\
&= \gamma_g\int_\Omega\Big(\frac{\nabla u\nabla\varphi}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}-\lambda\varphi\Big)\,dx.
\end{aligned}$$

ただし，

$$\lambda = \frac{1}{V}\int_{\{u>0\}}\frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\,dx$$

とおいた．グリーンの定理を適用すれば，次の関係式を得る：

$$\gamma_g\int_\Omega\Big(\frac{\Delta u(1+|\nabla u|^2)-\nabla u^T D^2u\nabla u}{(1+|\nabla u|^2)^{3/2}}-\lambda\Big)\varphi\,dx=0\qquad\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega\cap\{u>0\}). \tag{4.6}$$

一方では，(4.1) のいわゆる inner variation も計算することができる．この変分は，

$$\tau_\varepsilon(x)=x+\varepsilon\eta(x),\qquad \eta\in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)$$

といった変数変換に対し，摂動

$$u_\varepsilon=\frac{V}{V_\varepsilon}u(\tau_\varepsilon^{-1}(x))$$

を用いる．上の変数変換のヤコビアンは

$$|D\tau_\varepsilon|=1+\varepsilon\,\mathrm{div}\eta+o(\varepsilon),\qquad \varepsilon\to 0$$

となり，定数 V_ε を摂動が体積を保存するように選ぶ．すなわち，

$$V_\varepsilon=\int_\Omega u(\tau_\varepsilon^{-1}(x))\,dx=\int_\Omega u(y)\,|D\tau_\varepsilon(y)|\,dy=V+\varepsilon\int_\Omega u\,\mathrm{div}\eta\,dx+o(\varepsilon),\quad \varepsilon\to 0.$$

今,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x) &= \frac{V}{V_\varepsilon}\sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j}(\tau_\varepsilon^{-1}(x))\frac{\partial(\tau_\varepsilon^{-1})_j}{\partial x_i}(x)\\ &= \frac{V}{V_\varepsilon}\sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j}(\tau_\varepsilon^{-1}(x))(D\tau_\varepsilon)^{-1}_{ji}(\tau_\varepsilon^{-1}(x))\\ &= \frac{V}{V_\varepsilon}\sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j}(\tau_\varepsilon^{-1}(x))\Big(\delta_{ij}-\varepsilon\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}(\tau_\varepsilon^{-1}(x))+o(\varepsilon)\Big)\end{aligned}$$

に注意して，変数変換 $y=\tau_\varepsilon^{-1}(x)$ を施すと,

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\big(E(u_\varepsilon)-E(u)\big)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\gamma_g}{\varepsilon}\int_\Omega\Big[\sqrt{1+\frac{V^2}{V_\varepsilon^2}\sum_i\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\varepsilon\sum_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}\Big)^2}(1+\varepsilon\,\mathrm{div}\eta)\\ &\qquad -\sqrt{1+|\nabla u|^2}\Big]\chi_{u>0}\,dx+\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega\big(\gamma_s(\tau_\varepsilon)(1+\varepsilon\,\mathrm{div}\eta)-\gamma_s\big)\chi_{u>0}\,dx\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\gamma_g}{\varepsilon}\int_\Omega\frac{2\varepsilon\,\mathrm{div}\eta+\frac{V^2}{V_\varepsilon^2}\Big(|\nabla u|^2-2\varepsilon\sum_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}\Big)(1+2\varepsilon\,\mathrm{div}\eta)-|\nabla u|^2}{2\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\chi_{u>0}\,dx\\ &\qquad +\int_\Omega\left(\frac{\gamma_s(\tau_\varepsilon)-\gamma_s}{\varepsilon}+\gamma_s(\tau_\varepsilon)\,\mathrm{div}\eta\right)\chi_{u>0}\,dx\\ &= \gamma_g\int_{\{u>0\}}\left(\frac{(1+|\nabla u|^2)\,\mathrm{div}\eta-\nabla u^T D\eta\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}-\lambda u\,\mathrm{div}\eta\right)dx+\int_{\{u>0\}}\mathrm{div}(\gamma_s\eta)\,dx\end{aligned}$$

が得られる．グリーンの定理と (4.6) の結果を合わせて使えば,

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(E(u_\varepsilon)-E(u)\right)\\ &= \gamma_g\int_{\{u>0\}}\Big(-\frac{\nabla u^T D^2u\eta}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}+\frac{\Delta u(\nabla u\cdot\eta)+\nabla u^T D^2u\eta}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\\ &\qquad -\frac{(\nabla u^T D^2u\nabla u)(\nabla u\cdot\eta)}{(1+|\nabla u|^2)^{3/2}}+\lambda(\nabla u\cdot\eta)\Big)\,dx\\ &\qquad +\int_{\partial\{u>0\}}\Big(\gamma_g\sqrt{1+|\nabla u|^2}(\eta\cdot\nu)-\gamma_g\frac{(\nabla u\cdot\eta)(\nabla u\cdot\nu)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}+\gamma_s(\eta\cdot\nu)\Big)\,dS\\ &= \int_{\partial\{u>0\}}\Big(\gamma_g\frac{(1+|\nabla u|^2)(\eta\cdot\nu)-(\nabla u\cdot\nu)(\nabla u\cdot\eta)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}+\gamma_s(\eta\cdot\nu)\Big)\,dS\end{aligned}$$

が正しいことがわかる．ここで，ν は $\partial\{u>0\}$ への外向き単位法線ベクトルを意味し，$\nu=-\nabla u/|\nabla u|$ という形に表される．したがって,

$$0=\int_{\partial\{u>0\}}\Big(\frac{\gamma_g}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}+\gamma_s\Big)(\nu\cdot\eta)\,dS\qquad\forall\eta\in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m).$$

つまり，弱い意味で

$$\gamma_s=-\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\gamma_g\qquad\text{on}\quad\partial\{u>0\}.$$

これはヤングの式 (4.4) に他ならない. □

ここで導いた自由境界条件とその証明のなかで示した $\{u>0\}$ で成り立つ偏微分方程式が次のセットとなって，もともとの最小化問題に対応する方程式を用いた記述を表す：

$$\operatorname{div}\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}+\lambda=0 \quad \text{in } \{u>0\}, \qquad \gamma_s=-\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\gamma_g \quad \text{on } \partial\{u>0\}.$$

スカラー関数の枠組みで表現できるように，上では $0<-\gamma_s<\gamma_g$，すなわち，$0<\theta<\pi/2$ を仮定した．数学的な結果を得るために，さらに γ_s の値が $-\gamma_g$ に近い（固体面が親水性である）ことを仮定する．そのような状況では，液滴の接触角が小さく，(4.6) などで現れる極小局面作用素を線形化してラプラシアンで近似できる（[2] も参照）．具体的に，$|\nabla u|$ が小さいとし，

$$\sqrt{1+|\nabla u|^2}\approx 1+\frac{1}{2}|\nabla u|^2 \tag{4.7}$$

と近似する．また，

$$\gamma:=1+\frac{\gamma_s}{\gamma_g} \quad \in (0,1)$$

とおくと，表面エネルギー (4.3) の近似は次のようになる：

$$\tilde{E}(u)=\gamma_g\left[\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx+\int_\Omega\gamma(x)\chi_{u>0}\,dx\right]. \tag{4.8}$$

この式で第 1 項にあった特性関数を省略した．条件 (4.2) のもとで (4.8) を最小にする関数が非負であることが示せるので，特性関数を省略してもかまわない．実際，(4.2) を満たす関数 v の非負の部分 $v^+:=v\chi_{v>0}$ は (4.2) を満たし，$\tilde{E}(v^+)\le\tilde{E}(v)$ が成り立つ．この事実は対応する偏微分方程式の最大値原理と関係する．

有名な論文 [1] では，体積保存条件の代わりに境界条件を課して，上のエネルギー汎関数の最小化問題を解析している．

自由境界問題

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を局所的にリプシッツな境界を持つ領域とする．$S\subset\partial\Omega$ の $(n-1)$-次元ハウスドルフ測度が正であるとする．境界値を与える関数 $g\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ が $\nabla g\in L^2(\Omega)$ を満たすとする．可測で非負な関数 γ に対し，次の最小化問題を考える：

$$\min_{v\in K}J(v), \qquad J(v):=\int_\Omega\left(|\nabla v|^2+\gamma^2\chi_{v>0}\right)dx.$$

ただし，

$$K:=\left\{v\in L^1_{\text{loc}}(\Omega);\ \nabla v\in L^2(\Omega),\ \ v=g \ \text{ on } \ S\right\}.$$

この問題の難しさは，汎関数が滑らかでない（連続でさえない）から変分を計算して，対応する偏微分方程式を導くことができないところにある．(形式的に変分を計算すると，特性関数の微分からデルタ関数のような特異項が方程式のなかに現れる．)

テスト関数の台を最小化関数 u の正の領域 $\{u>0\}:=\{x;\ u(x)>0\}$ に制限して，上のエネルギー汎関数の第 1 変分をとると，最小化関数 u が $\{u>0\}$ において調和関数であることがわかる．さらに，命題4.27と同じように inner variation をとると，自由境界 $\partial\{u>0\}$ 上では $|\nabla u|=\gamma$ が弱

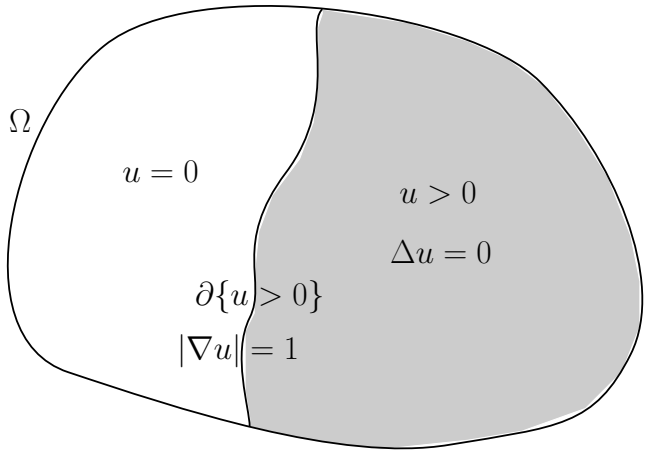


Figure 3: 自由境界問題の解

い意味で成り立つことが導かれる．最小化関数が非負であることを考慮すると，図3のような状況になる．

式で書くと，

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 && \text{in } \{u > 0\} \\ &u = 0 && \text{in } \{u \le 0\} \\ &|\nabla u| = \gamma,\ u = 0 && \text{on } \partial\{u > 0\}. \end{aligned}$$

以上は形式的な考察だったが，[1] では厳密な解析が行われている．この解析は例えば，次のような疑問に答える：

(1) 上の問題の最小化関数は，そもそも存在するのか？

これは汎関数の下半連続性より従う．

(2) 最小化関数 u は連続なのか？

自由境界をこめての Lipschitz 連続性が示される．最小化関数は弱微分が L^p-空間に入るような関数空間（ソボレフ空間）に属することしか最初はわからないので，正則性の証明は簡単ではない．

最小化関数の値が恒等的にゼロの領域から正の角度をもって正の領域に移り，微分が不連続になるから，Lipschitz 以上の正則性は期待できない．

このように示した u の連続性より，$\{u > 0\}$ が開集合であることが言えるので，そのなかに台をもつテスト関数を考える意味があることがはじめてわかる．

(3) 自由境界はどのようなものであるか？

滑らかな超曲面であることが期待されるが，実はそこまで強いことが言えない．$\partial\{u > 0\}$ が局所的に $(n-1)$-次元的なものであり（set of locally finite perimeter），ほとんどいたるところで法線ベクトルが定義できることが示される．

また，$(n-2)$ より低い次元を持つ部分を除いて，自由境界は $C^{1,\alpha}$-超曲面である（つまり，微分がヘルダー連続である）．

このような結果を出すには Geometric measure theory という理論を利用する．上に述べた自由境界上に現れるデルタ関数のような特異性をラドン測度として扱っているわけである．

4.12 演習問題

問題 4.42 $\gamma > 0$ を固定する．$a > 0$ をパラメータとした最小化問題

$$\min_{v \in K} J(v), \qquad \text{ただし，} \quad \begin{cases} J(v) \coloneqq \int_0^1 \left(\left(v'(x)\right)^2 + \gamma^2 \chi_{v>0} \right) dx \\ K \coloneqq \left\{ v \in L^1(0,1);\ v' \in L^2(0,1),\ \ v(0) = 0,\ \ v(1) = a \right\} \end{cases}$$

の minimizer $u(x) \in K$ が少なくとも一つ存在する．この minimizer について，次の問いに答えよ．

(1) K に属する関数が絶対連続であることを示せ．

(2) $\{u > 0\} \coloneqq \{x \in \mathbb{R};\ u(x) > 0\}$ が開集合で，そのなかで u が調和関数であることを示せ．

(3) 最小化関数 u が非負であることを示せ．

(4) 自由境界（つまり，u が恒等的にゼロである部分と正である部分の境目となる点）が存在しないか一点であるかのどちらかが成り立つことを確かめよ．自由境界が生じるための a に関する条件を求めよ．

(5) 最小化関数 u の具体的な形を式で書け．

(6) $v(0) = 0$ の境界条件の代わりに $v(0) = b$ という境界条件を考える．写像 $(a, b) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \mapsto u(x) \in K$ が連続であるか答えよ．

問題* 4.43 問題4.42と同じ状況を考える．ただし，最小化を面積保存条件

$$\int_0^1 u(x)\, dx = V > 0$$

のもとで行う．この制約つきの問題に対し，問題4.42の (1)-(6) の問いに答えよ．

References

[1] H.W. Alt, L.A. Caffarelli: *Existence and regularity for a minimum problem with free boundary*, J. Reine Angew. Math. 325, pp. 105–144, 1981.

[2] E. Giusti: Minimal surfaces and functions of bounded variation, Birkhäuser, 1984.

5 熱方程式

概要
この講義では放物型方程式の代表である熱方程式の解き方と解の性質について紹介する．

5.1 熱方程式の導出

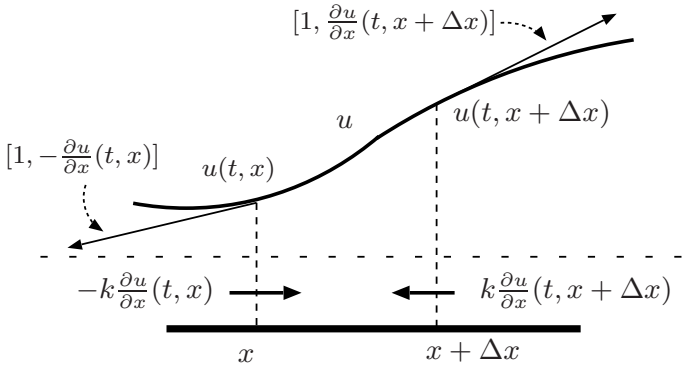
直線状の針金の温度分布の時間的変化を考える（[1], p.12）．

独立変数 (independent variable) ： 時刻 t, 針金上の位置座標 x
未知関数 (unknown function) ： の時刻 t における点 x での針金の温度 $u(t,x)$

針金の微小区間 $[x, x+\Delta x]$ をとって，熱量の保存則を適用する．すなわち,「時間 Δt の間に微小区間に流れ込む熱量の総和 H は区間の温度の上昇 Δu に比例する」というものである．針金の比熱を σ とし，針金の線密度を ρ とすれば，比熱の定義により次のように書ける：

$$H = \rho \Delta x \cdot \sigma \cdot \Delta u \tag{5.1}$$

ここで，$\Delta u = u(t+\Delta t, x) - u(t,x)$ である．



区間に流れ込む熱量は熱伝導の法則から決める：「ある瞬間における単位時間当たりの熱流量は，この瞬間の温度の勾配 $\frac{\partial u}{\partial x}$ に比例する」．熱伝導率を k とおき，区間の両端での流れ込む方向が逆であることに注意する（左端では x 軸と同じ方向で，右端では x 軸と反対方向）．時間 Δt の間に流れ込む熱量は

$$H = k\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x+\Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)\Delta t \tag{5.2}$$

となる．(5.1) より

$$\rho \Delta x \sigma \left(u(t+\Delta t, x) - u(t,x)\right) = k\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x+\Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)\Delta t.$$

両辺を $\Delta t \Delta x$ で割り，$\Delta t,\ \Delta x \to 0$ とすれば，

$$\rho\sigma \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

という方程式が得られた．これを **1 次元熱（伝導）方程式** (heat equation) とよぶ．

注 導出のとき特に仮定をしなかったが，使った物理法則が近似的なものであるため，この方程式はあくまでも現象の近似モデルにすぎない．

熱源 (heat source)　針金を途中で暖める状況を考える．単位時間・単位長さ当り湧き出す熱量を $f(t,x)$ とすれば，(5.2) に $f(t,x)\Delta x \Delta t$ が加わるので，偏微分方程式は

$$\rho\sigma \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

となる．

冷却　針金から空中に熱の放散があるときは，Newton の冷却の法則により，逃げ出す熱量は現在温度と外気温との差に比例するので，簡単のため外気温を 0 度とすれば，

$$\rho\sigma \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u$$

という方程式が得られる．

方程式の解を一意的に決定するには，初期時刻における状況や境界上の温度の変化を指定する条件が必要である．

初期条件 (initial conditions)　方程式が t について 1 階なので，初期値としては $t = 0$ における熱の分布のみ指定する：

$$u(0,x) \quad = \quad u_0(x) \qquad \text{針金の熱の初期分布}$$

境界条件 (boundary conditions)　境界における熱の流れ方を指定する．針金の位置が x 軸上の線分 $[a,b]$ を占めるとする．

- Dirichlet 境界条件（境界における解の値を指定する）

$$u(t,a) = v_a(t), \qquad u(t,b) = v_b(t)$$

例 針金の両端を氷で冷やしている状態を表す境界条件は

$$u(t,a) = u(t,b) = 0.$$

- Neumann 境界条件（境界における解の法線微分の値を指定する）

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,a) = w_a(t), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t,b) = w_b(t)$$

例 境界で熱の出入りがない状態を以下の断熱条件で表す：

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,a) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,b) = 0.$$

- Robin(Newton) 境界条件（Dirichlet 条件と Neumann 条件の中間）

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u\right)(t,a) = \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u\right)(t,b) = 0$$

  Newton の冷却の法則 $k\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma u$ により針金の両端が一般の物質に接する状況を表現する．

- 周期境界条件(periodic boundary condition) 針金を丸めて輪にしたとき，区間の両端を同一視することができる：

$$u(t,a) = u(t,b), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t,a) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,b).$$

以上のような導出を空間 1 次元の場合に詳しく行ったが，一般次元でも同様な考察ができる（[2], p.44）．u を熱や化学物質などの物理量の密度とし，その時間変化を考える．この変化を考える空間領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ の任意の部分領域 U をとると，U における物理量の変化率は符号を除いて境界 ∂U を通る全流量に等しい：

$$\frac{d}{dt}\int_U u(t,x)\,dx = -\int_{\partial U} \boldsymbol{F}\cdot\nu\,dS.$$

ただし，ν は ∂U への外向き単位法線ベクトルで，$\boldsymbol{F}$ は流束密度である．多くの場合，$\boldsymbol{F}$ は u の勾配に比例するので，$\boldsymbol{F} = -a\nabla u$ $(a > 0)$ と書ける．ガウスの定理を適用すると，上の式より

$$u_t = -\mathrm{div}\,\boldsymbol{F} = a\Delta u$$

を得る．$a = 1$ のときは，これは一般次元における熱方程式である．

変分法の節でわかったように，負のラプラシアンは Dirichlet 積分

$$\int |\nabla u|^2\,dx$$

の変分（勾配）として解釈できる．そういう意味では，熱方程式はこの Dirichlet エネルギーの勾配流（最急降下）に相当すると言える．つまり，ある初期条件からスタートして Dirichlet エネルギーができるだけはやく小さくなるように動く発展である．

ここでは，領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ と適切な初期条件と境界条件に対して，熱方程式

$$u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 \qquad (t,x) \in (0,\infty)\times\Omega$$

を満たす関数 $u : [0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}$ を求める問題について考える．基本的には，調和関数について成り立つ事実は（少し複雑な形なって）熱方程式の解に対しても成り立つ．そのため，ラプラス方程式の理論展開をそのまま追って，新しいアイデアを含まない証明は文献の参照に委ねる．

5.2 基本解と Cauchy 問題の解

熱方程式は t について 1 階微分，x について 2 階微分を含むので，$u(t,x)$ が解であれば，$u(\lambda^2 t, \lambda x)$ も任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して解になる．このことは $\frac{|x|^2}{t}$ という比が熱方程式において重要であることを示唆している．また，ラプラス方程式と同様に，原点に対して（空間変数で）対称な解に限定すると，

$$u(t,x) = v\Big(\frac{r^2}{t}\Big) = v\Big(\frac{|x|^2}{t}\Big)$$

という形で基本解を求めることになる（問題5.1を参照）．

別のアプローチはスケーリング $u(t,x) \mapsto \lambda^\alpha u(\lambda t, \lambda^\beta x)$ に対して不変な熱方程式の解を求める方法である．すなわち，

$$u(t,x) = \lambda^\alpha u(\lambda t, \lambda^\beta x) \qquad \forall \lambda > 0$$

を満たす u を探すことになるが，ここで $\lambda = \frac{1}{t}$ とすると，

$$u(t,x) = \frac{1}{t^\alpha} v\Big(\frac{x}{t^\beta}\Big) \qquad (v(y) = u(1,y))$$

の形を得る．これを熱方程式に代入し，v の原点に対する対称性を仮定し，さらに $\beta := \frac{1}{2}$, $\alpha := \frac{n}{2}$ とすれば，

$$v(r) = Ce^{-\frac{r^2}{4}}$$

と v を計算できる．u に戻すと，次の熱方程式の解が得られる：

$$u(t,x) = \frac{C}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}. \tag{5.3}$$

詳しくは [2], p.45 を参照.

定義 5.1 (熱方程式の基本解) 関数

$$\Phi(t,x) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t < 0 \end{cases}$$

は**熱方程式の基本解**とよばれる．

(5.3) での定数 C を $\int \Phi(t,x)\,dx = 1\ \forall t > 0$ となるように決めた（問題5.2を参照）．また，Φ が点 $(0,0)$ において特異性をもつことに注意する．

ラプラス方程式と同様に，基本解と初期値の合成積でコーシー問題

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u &= g \qquad \text{on } \{t=0\} \times \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{5.4}$$

の解が得られることを示すことができる．

定理 5.2 (Cauchy 問題の解) $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し，

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) g(y)\,dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \tag{5.5}$$

とおく．そのとき，$u \in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ であり，u はコーシー問題 *(5.4)* の解である．ただし，境界条件は次の意味で満たされる：

$$\lim_{(x,t)\to(x^0,0),x\in\mathbb{R}^n,t>0} u(t,x) = g(x^0) \qquad \forall x^0 \in \mathbb{R}^n.$$

証明はラプラス方程式の場合と本質的に変わらないので，省略する（[2], p.47）．

注 g が有界で連続，そして非負な関数のとき，$g(x^0) > 0$ が一点 x^0 でも成り立てば，式 (5.5) で与えられる解がすべての $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ において正になることがわかる．この事実を「熱方程式は無限の伝播速度をもつ」というふうに表現する．物理的に言えばこれは，初期温度が正になる領域があれば，どんなに離れた場所をとっても，どんなに小さな時刻でも瞬時にすべての点での温度が正になることを意味する．

次に，非斉次問題（nonhomogeneous problem）

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \qquad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ u &= 0 \qquad \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{5.6}$$

を考える．ここで，$f(t,x)$ は一般に t と x の関数である．

「デュアメルの原理」（Duhamel's principle）は，時刻 $t=s$ をスタートとして初期値を $f(s,\cdot)$ とした斉次問題

$$\begin{aligned} u_t(t,x;s) - \Delta u(t,x;s) &= 0 \qquad \text{in } (s,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ u(t,x;s) &= f(s,x) \qquad \text{on } \{t=s\}\times\mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{5.7}$$

の解 $u(t,x;s)$ を s について 0 から t まで足せば（積分すれば），非斉次問題の t における解が得られることを言っている．

問題 (5.7) の解は $u(t,x;s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s,x-y)f(s,y)\,dy$ であるから，非斉次問題 (5.6) の解の候補は

$$\begin{aligned} u(t,x) = \int_0^t u(t,x;s)\,ds &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s,x-y)f(s,y)\,dy\,ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(s,y)\,dy\,ds, \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{5.8}$$

となる．

定理 5.3 *f が $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ にコンパクトな台をもち，t について 1 回微分可能，x 変数について 2 回微分可能な関数であるとする（この微分可能性を満たす関数のクラスを以下では C_1^2 の記号で表す）．u を (5.8) で定義したとき，次が成り立つ．*

(1) $u \in C_1^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$

(2) $u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x), \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^n$

(3) $\lim_{(x,t)\to(x^0,0),x\in\mathbb{R}^n,t>0} u(t,x) = 0 \qquad \forall x^0 \in \mathbb{R}^n.$

証明

Φ が $(0,0)$ で特異性をもつので，積分と微分の交換が一般にはできない．ラプラス方程式と同様に，変数変換をすることでまず微分が f にかかるようにし，それから時間区間 $(0,t)$ を $(0,\varepsilon)$ と (ε,t) に分けて，$(0,\varepsilon)$ での積分が結果に影響しないことを示す．

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y) f(t-s,x-y)\,dy\,ds \tag{5.9}$$

と書いて，f に関する仮定を考慮すると，

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y) f_t(t-s,x-y)\,dy\,ds + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0,x-y)\,dy \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(t-s,x-y)\,dy\,ds \end{aligned}$$

が成り立つので，$u \in C_1^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ が示せた．
次に (2) を確かめる．

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y) \Big(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\Big) f(t-s,x-y)\,dy\,ds \\ &\qquad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0,x-y)\,dy \\ &= \Big(\int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^t\Big) \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y) \Big(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\Big) f(t-s,x-y)\,dy\,ds \\ &\qquad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0,x-y)\,dy \\ &=: J_\varepsilon + I_\varepsilon + K \end{aligned}$$

において，J_ε は，$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\,dy = 1$ を用いると $O(\varepsilon)$ であることがわかる：

$$|J_\varepsilon| \le \big(\|f_t\|_{L^\infty} + \|D^2 f\|_{L^\infty}\big) \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y)\,dy\,ds \le C\varepsilon.$$

また，I_ε では Φ の特異性が除かれているので，グリーンの定理を用いて，$\partial/\partial t - \Delta_x$ を Φ に移すことができる．Φ が熱方程式を満たすので，次を得る：

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\Big)\Phi(s,y)\Big] f(t-s,x-y)\,dy\,ds \\ &\qquad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon,y) f(t-\varepsilon,x-y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0,x-y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon,y) f(t-\varepsilon,x-y)\,dy - K \end{aligned}$$

以上をまとめると，

$$u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon,y) f(t-\varepsilon,x-y)\,dy = f(t,x) \qquad \text{for } t>0, x\in\mathbb{R}^n.$$

なお，(5.9) と $\int \Phi\,dy = 1$ より $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le t\|f\|_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} \to 0$ as $t\to 0$.
□

5.3 熱方程式に対する平均値定理

以降では，Ω を有界領域とする．式を簡単にするために次の記号を導入する．

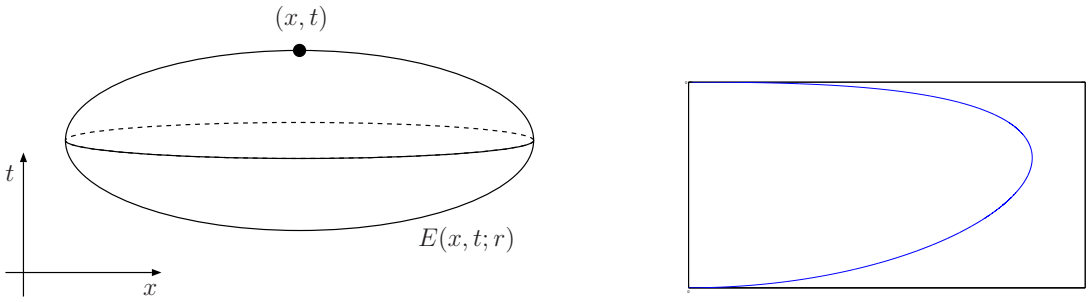
放物柱（parabolic cylinder）：　$\Omega_T = (0,T] \times \Omega$　（上面を含む）
放物型境界（parabolic boundary）：　$\Gamma_T = \overline{\Omega}_T - \Omega_T$　（底面と側面のみ）

調和関数に対する平均値定理は調和関数の値が球面上の平均値に等しいということを言っているが，よく見ると球面が基本解の等高面であるということに気が付く．つまり，「$\Phi(x) =$ 定数」という条件を満たす点 x の集合は球面である．

熱方程式の場合，調和関数と同じようなきれいな形の平均値定理はないが，調和関数と同様に基本解の等高面が関係していることがわかる．熱方程式の基本解 $\Phi(t,x)$ に対し

$$E(t,x;r) = \left\{ (s,y) \in \mathbb{R}^{n+1};\ s \le t,\ \ \Phi(t-s, x-y) \ge \frac{1}{r^n} \right\}$$

とおく．この集合の境界が基本解の等高面に当たるが，点 (x,t) はこの集合の上部の真ん中に位置する．



熱方程式の基本解の等高面の概略図と点 (t,x) を通る断面の正確な形状

定理 5.4 (熱方程式に対する平均値定理) $u \in C_1^2(\Omega_T)$ が熱方程式の解であるとする．そのとき以下の関係式が任意の $E(t,x;r) \subset \Omega_T$ に対して成り立つ：

$$u(t,x) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(t,x;r)} u(s,y) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\, dy\, ds.$$

注 右辺の量が t 以下の時刻での値にしか依存しないことは自然である．
証明はラプラス方程式と同様に行われる．すなわち，座標を平行移動して，

$$\phi(r) := \frac{1}{r^n} \iint_{E(0,0;r)} u(s,y) \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds$$

で定義された関数が $\phi'(r) = 0$ を満たすことを計算により示す．詳細は [2], p.53 を参照．

5.4 熱方程式の解の性質

5.4.1 熱方程式に対する最大値原理

定理 5.5 (熱方程式の最大値原理) $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ が Ω_T において熱方程式を満たすとする．

(i) (maximum principle)
そのとき,

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

(ii) (strong maximum principle)
さらに，Ω が連結領域で，$u(t_0, x_0) = \max_{\overline{\Omega}_T} u$ を満たす $(t_0, x_0) \in \Omega_T$ が存在すれば，u は $\overline{\Omega}_{t_0}$ において定数関数である．

注 (1) 最小値についても同様の定理が成り立つ．

(2) 最小値原理を用いて，熱方程式における伝播速度が無限であることが上と別の方法で言える．定理の u に対し，次の初期条件と境界条件を課す：

$$u = 0 \quad \text{on } [0,T] \times \partial\Omega, \qquad u = g \quad \text{on } \{t = 0\} \times \Omega.$$

すると，初期値 g が，Ω のどんなに小さい範囲でもよいが，正の値をとれば，解 u は Ω_T 全体で正になる．

(3) 強最大値原理によると，u が Ω_T の内部で最大値（または最小値）をもつとき，最大値（最小値）が得られる時刻まで定数関数である．つまり，初期値と境界値が定数なら解も定数関数であり，境界値に変化がない限り定数関数のままであるという t の「時刻」としての意味を裏付ける事実である．物理的な考察からすると当然のことであるが，数学的な観点から正確に言うには，偏微分方程式から証明しなければならない．

証明

考え方はラプラス方程式と同じであるが，少し複雑になる．(ii) のみ示せばよい．$u(t_0, x_0) = M := \max_{\overline{\Omega}_T} u$ を満たす点 $(t_0, x_0) \in \Omega_T$ があると仮定する．$r > 0$ を十分小さくとれば，$E(t_0, x_0; r) \subset \Omega_T$ となるので，そのような r に対して平均値の定理を適用すると，

$$M = u(t_0, x_0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(t_0,x_0;r)} u(s,y) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2}\, dy\, ds \le M.$$

最後の不等式は $\dfrac{1}{4r^n} \displaystyle\iint_{E(t_0,x_0;r)} \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2}\, dy\, ds = 1$ より従う．よって，

$$u(s,y) = M \qquad \forall (s,y) \in E(t_0, x_0; r).$$

そこで，$s_0 < t_0$ なる点 $(s_0, y_0) \in \Omega_T$ と (t_0, x_0) を結ぶ線分 L を考え，

$$s_{min} := \min\{s \ge s_0;\ u(t,x) = M \quad \forall (t,x) \in L \text{ such that } t \in [s, t_0]\}$$

と定義する．$s_{min} > s_0$ とすれば，矛盾が得られる．実際，u の連続性より $u(s_{min}, z_0) = M$ が成り立つ（ここで，z_0 は s_{min} に対応する L の空間座標である）．しかし，上の考察より，$u \equiv M$ in $E(s_{min}, z_0; r)$ が十分小さい r について正しいので，s_{min} が最小値ではないことになる．よって，$s_{min} = s_0$ より $u \equiv M$ on L.
$0 \le t < t_0$ をみたす任意の点 $(t, x) \in \Omega_{t_0}$ を Ω_{t_0} に含まれる有限個の線分を用いて点 (t_0, x_0) とつなげることができるので，$u(t,x) = M$ を得る． □

初期値境界値問題

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega_T \\ u &= g \qquad \text{on } \Gamma_T \end{aligned} \tag{5.10}$$

の解が二つあれば，その差に対して最大値（最小値）原理を適用すると，すぐに次の一意性の定理が得られる．

定理 5.6 (熱方程式の解の一意性) $g \in C(\Gamma_T)$，$f \in C(\Omega_T)$ とする．そのとき，境界値問題 *(5.10)* の解が高々一つ存在する．

> 全空間における熱方程式の初期値問題に対しても，「最大値が初期時刻で達成される」という最大値原理が証明でき，一意性が言えるが，そのとき解の $|x|$ が大きいときの増加に対して次のような追加条件を課す必要がある：
>
> 定数 A, a が存在し　　$u(t,x) \le Ae^{a|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T].$
>
> 実際，この条件を満たさない「物理的でない」解は無限に存在する（[3], p.211 の Tychonoff の解）．

5.4.2 熱方程式の解の正則性

境界条件と初期条件が滑らかでなくても，熱方程式の解が必ず滑らかになることを示す．

定理 5.7 (解の正則性) $u \in C_1^2(\Omega_T)$ が熱方程式の解ならば，$u \in C^\infty(\Omega_T)$ が成り立つ．

証明

> 上面の中心が (t,x) で半径 r，高さ r^2 の閉円筒を $C(t,x;r)$ という記号で表す：
>
> $$C(t,x;r) \coloneqq \{(s,y);\ s \in [t-r^2, t],\ |x-y| \le r\}.$$
>
> 点 $(t_0,x_0) \in \Omega_T$ を任意に選び，$C \coloneqq C(t_0,x_0;r) \subset \Omega_T$ となるように r を小さく選ぶ．また，C に含まれる円筒 $C'' \subset C' \subset C$ を次のように定義する：
>
> $$C' \coloneqq C(t_0,x_0;\tfrac{3}{4}r), \qquad C'' \coloneqq C(t_0,x_0;\tfrac{1}{2}r).$$
>
> Cut-off 関数 $\zeta(t,x)$ を滑らかな関数で，次の条件を満たすようにとる：
> - $0 \le \zeta \le 1, \quad \zeta \equiv 1$ on C'
> - C の放物型境界の近傍で $\zeta \equiv 0$
> - $\zeta \equiv 0$ in $([0,t_0] \times \mathbb{R}^n) \setminus C$
>
> まず，$u \in C^\infty(\Omega_T)$ であると仮定して，議論を進める．
>
> $$v(t,x) \coloneqq \zeta(t,x)u(t,x), \qquad t \in [0,t_0],\ x \in \mathbb{R}^n$$
>
> とおくと，

$$v_t = \zeta u_t + \zeta_t u, \qquad \Delta v = \zeta \Delta u + 2\nabla u \cdot \nabla \zeta + u\Delta\zeta.$$

よって，$v(0,x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n$，そして

$$v_t - \Delta v = \zeta_t u - 2\nabla\zeta \cdot \nabla u - u\Delta\zeta \qquad \text{in } (0,t_0)\times\mathbb{R}^n.$$

この右辺を $\tilde{f}$ として，

$$\tilde{v}(t,x) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y)\tilde{f}(s,y)\,dy\,ds$$

とおくと，定理5.3より

$$\begin{aligned} \tilde{v}_t - \Delta\tilde{v} &= \tilde{f} \qquad \text{in } (0,t_0)\times\mathbb{R}^n \\ \tilde{v} &= 0 \qquad \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

定理5.6の下の注に挙げた増加条件が満たされるので，一意性より $v \equiv \tilde{v}$.
今，$(t,x) \in C''$ をとると，

$$\begin{aligned} u(t,x) = v(t,x) &= \iint_C \Phi(t-s,x-y)\tilde{f}(s,y)\,dy\,ds \\ &= \iint_C \Phi(t-s,x-y)\Big[(\zeta_s - \Delta\zeta)u - 2\nabla\zeta\cdot\nabla u\Big](s,y)\,dy\,ds. \end{aligned}$$

$[\cdot]$ の項が Φ の特異点の近傍で恒等的に 0 になっていることに注意して，最後の項に発散の定理を施すと

$$u(t,x) = \iint_C K(t,x,s,y)u(s,y)\,dy\,ds, \qquad (t,x) \in C'' \tag{5.11}$$

を得る．ただし，

$$K(t,x,s,y) := \Phi(t-s,x-y)(\zeta_s(s,y) + \Delta\zeta(s,y)) + 2\nabla\Phi(t-s,x-y)\cdot\nabla\zeta.$$

$u \in C^\infty$ を仮定して，(5.11) を導いたが，$u \in C_1^2(\Omega_T)$ の場合は軟化した関数 $u^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u$ に対して，(5.11) と同様な関係式を出してから $\varepsilon \to 0$ とすれば，やはり (5.11) が得られる．
K は C' において $K \equiv 0$ を満たすから K は C において滑らかで，式 (5.11) より $u \in C^\infty(C'')$ が従う． □

ラプラス方程式と同様に，熱方程式の解の任意の微分を局所的に評価できる（[2], p.61 参照）.

補題 5.8 任意の組み $k,l \in \mathbb{N}_0$ に対し定数 C_{kl} が存在し，

$$\max_{C(t,x;r/2)} |D_x^k D_t^l u| \le \frac{C_{kl}}{r^{k+2l+n+2}} \|u\|_{L^1(C(t,x;r))}$$

が全ての Ω_T における熱方程式の解とすべての円筒 $C(t,x;r/2) \subset C(t,x;r) \subset \Omega_T$ について成り立つ.

> 熱方程式の解 $u(t,x)$ に対して，t を固定した写像 $x \mapsto u(t,x)$ が解析的であるが，x を固定した写像 $t \mapsto u(t,x)$ は一般には解析関数ではない.

5.4.3 熱方程式に対する Harnack 不等式

定理 5.9 (放物型 Harnack 不等式) 関数 $u \in C_1^2(\Omega_T)$ が Ω_T において熱方程式 $u_t - \Delta u = 0$ の解であり，　$u \geq 0$　*in* Ω_T　を満たすとする．また，連結な開集合 U が $U \subset\subset \Omega$ を満たすとする．そのとき，任意の $0 < t_1 < t_2 \leq T$ に対し，t_1, t_2, U にのみ依存する定数 C が存在し，

$$\sup_{x \in U} u(t_1, x) \leq C \inf_{x \in U} u(t_2, x) \tag{5.12}$$

が成り立つ．

注 証明は複雑なので，[2], p.370 に委ねる．調和関数に対する Harnack 不等式と比べると，(5.12) の右辺の inf が左辺の sup より先の時刻でとられていることがわかる．すなわち，平均化の効果が出るには，短くてもよいが時間が必要である．

5.5 エネルギー法

ラプラス方程式と同様に，熱方程式の解の一意性（定理5.6）は対応するエネルギーを考えることでも証明できる．二つの解があれば，その差 w が恒等的にゼロであることを言えばよい．w は

$$\begin{aligned} w_t - \Delta w &= 0 \qquad \text{in } \Omega_T \\ w &= 0 \qquad \text{on } \Gamma_T \end{aligned}$$

を満たす．

$$e(t) = \int_\Omega w^2(t,x)\,dx, \qquad t \in [0,T]$$

とおくと，

$$e'(t) = 2\int_\Omega w w_t\,dx = 2\int_\Omega w\Delta w\,dx = -2\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx \leq 0$$

を得る．よって，$e(t) \leq e(0) = 0$ が成り立つが，$e(t)$ の定義を見ると，必然的に $w \equiv 0$ in Ω_T が従う．

このテクニックを用いて，熱方程式に対して時間を逆向きに考えた一意性も成り立つことが証明できる．つまり，二つの関数 $u, \tilde{u} \in C^2(\overline{\Omega}_T)$ が熱方程式の解で同じ境界条件を満たす：

$$\begin{aligned} v_t - \Delta &= 0 \qquad \text{in } \Omega_T \\ v &= g \qquad \text{on } [0,T] \times \partial\Omega \end{aligned}$$

が $v = u$ と $v = \tilde{u}$ により満たされるとしたときに，

$$u(x,T) = \tilde{u}(x,T) \qquad \forall x \in \Omega$$

より

$$u \equiv \tilde{u} \qquad \text{in } \Omega_T$$

が従う．

これは，時刻 T における温度分布が同じで，それまでの境界条件が共通であれば，時刻 T までのすべての時間における温度分布が一致することを言っており，数学的に自明な事実ではない．

> 上で定義した $e(t)$ に対し $\ln e(t)$ という関数が凸であるという事実を用いた証明は [2], p.64 にある.

5.6 演習問題

問題 5.1 ([2], p.87) $n=1$ として，$u(t,x)=v(\frac{x^2}{t})$ とおく.

(1)
$$u_t = u_{xx} \qquad \text{と} \qquad 4zv''(z)+(2+z)v'(z)=0,\ \ z>0$$
が同値であることを示せ.

(2) (1) の常微分方程式の解が
$$v(z) = c\int_0^z e^{-s/4}s^{-1/2}\,ds + d$$
であることを示せ.

(3) (2) で求めた v に対し，$v(\frac{x^2}{t})$ を x について微分し，定数 c を適切に選べば熱方程式の基本解 Φ が得られることを確認せよ.

問題 5.2 熱方程式の基本解に対して
$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x)\,dx = 1 \qquad \forall t>0$$
が成り立つことを示せ.

問題 5.3 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を滑らかな境界をもつ領域とする．滑らかな関数 $u_0:\Omega\to\mathbb{R}$ に対し，次の熱方程式の初期値境界値問題を考える:
$$u_t(t,x)=\Delta u(t,x)\quad (t,x)\in(0,\infty)\times\Omega, \qquad u(0,x)=u_0(x)\quad x\in\overline{\Omega}.$$
ただし，境界条件として次の 2 種類を考える：

(1) 斉次 Dirichlet 条件：$u(t,x)=0, x\in\partial\Omega, t>0$

(2) 斉次 Neumann 条件：$\partial u/\partial n(t,x)=0, x\in\partial\Omega, t>0$（ここで，$n$ は $\partial\Omega$ への単位法線ベクトル）.

(1) を課したとき，解 u に対する $e(t)=\int_\Omega u^2(t,x)\,dx$ という量が時間 t の非増加関数であることを示せ．さらに，(2) を課したとき，解 u に対する $m(t)=\int_0^1 u(t,x)\,dx$ という量が時間 t に依存しない（時間とともに保存される）ことを示せ.

問題 5.4 $f\in C_1^2(\mathbb{R}^n)$ がコンパクトな台をもつとする．熱方程式の基本解を $\Phi(t,x)$ で表すと，
$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(\varepsilon,y)f(t-\varepsilon,x-y)\,dy = f(t,x) \qquad t>0, x\in\mathbb{R}^n$$
が成り立つことを示せ.

問題 5.5 ([2], p.87) u が $u_t-\Delta u$ を $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ において満たす滑らかな関数であるとする.

(1) すべての $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し，$u_\lambda(t,x) \coloneqq u(\lambda^2 t, \lambda x)$ も熱方程式の解であることを示せ.

(2) 上の結果を用いて，$v(t,x) \coloneqq x \cdot \nabla u(t,x) + 2tu_t(t,x)$ も熱方程式を満たすことを示せ.

問題 5.6 ([2], p.87) 次のコーシー問題

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + cu &= f \qquad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u &= g \qquad \text{on } \{t=0\} \times \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

の解の公式を求めよ．ここで，$c \in \mathbb{R}$.

問題* 5.7 ([2], p.87) $g \in C^1([0,\infty)), g(0) = 0$ とする．初期値境界値問題

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}_+ \\ u &= 0 \qquad \text{on } \{t=0\} \times \mathbb{R}_+ \\ u &= g \qquad \text{on } [0,\infty) \times \{x=0\} \end{aligned}$$

に対し，次の解の公式を導出せよ：

$$u(t,x) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} g(s)\, ds.$$

（ヒント：$v(t,x) \coloneqq u(t,x) - g(t)$ として，v を奇関数の反転として $\{x<0\}$ に拡張する.）

問題* 5.8 ([2], p.88) $v \in C_1^2(\Omega_T)$ が

$$v_t - \Delta v \le 0 \qquad \text{in } \Omega_T$$

を満たすとき，v が熱方程式の劣解（subsolution）であるという.

(1) 劣解 v に対して

$$v(t,x) \le \frac{1}{4r^n} \iint_{E(t,x;r)} v(s,y) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\, dy\, ds$$

が任意の $E(t,x;r) \subset \Omega_T$ について成り立つことを示せ.

(2) 従って，

$$\max_{\overline{\Omega}_T} v = \max_{\Gamma_T} v$$

が成立することを示せ.

(3) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を滑らかで凸な関数とする．熱方程式の解 u に対し $v \coloneqq \phi(u)$ と定義すれば，v が劣解であることを示せ.

(4) u が熱方程式の解であれば，$v \coloneqq |\nabla u|^2 + u_t^2$ が劣解であることを示せ.

References

[1] 金子晃: 偏微分方程式入門, 東大出版会, 1998.

[2] L. C. Evans: Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.

[3] F. John: Partial Differential Equations, Springer, 1982.

修正リスト：

1. （６月１２日）変数の順番 $(x,t) \to (t,x)$（数カ所）
2. （６月１２日）定理5.3の証明における I_ε と J_ε の定義の順番
3. （６月１２日）定理5.7の証明で cut-off 関数が滑らかであるという条件を追加
4. （６月１２日）問題5.3と5.4を追加
5. （６月１９日）定理5.7の証明の K の定義式で $-\Delta\zeta \to +\Delta\zeta$

6 波動方程式

概要
この講義では双曲型方程式の代表である波動方程式の解き方と解の性質について紹介する．

ここでは，適切な初期条件と境界条件のもとで，波動方程式（wave equation）

$$u_{tt} - \Delta u = f \qquad \text{in } (0,\infty)\times\Omega$$

について調べる．ただし，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が領域で，$u(t,x) : [0,\infty)\times\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ が未知関数である．ラプラシアン Δ は空間変数 x についてのものであるが，簡単のために波動オペレータを

$$\Box u = u_{tt} - \Delta u$$

という記号で表すことがある．

波動方程式の導出をこの講義ノートの節 1.2 で行った．物理的な意味についてもそこを参照してください．

6.1 1 次元の波動方程式

双曲型方程式の特徴を見るために，まず比較的簡単な空間 1 次元の波動方程式に対する初期値問題について考える：

$$u_{tt}(t,x) - c^2 u_{xx}(t,x) = 0 \qquad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R} \tag{6.1}$$

$$u(0,x) = g(x), u_t(0,x) = h(x) \qquad \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R}. \tag{6.2}$$

ただし，$c > 0$ とする．

この方程式に対する特性曲線は

$$x + ct = \text{const.}, \qquad x - ct = \text{const.}$$

という二つの直線の族である．それらを新しい座標系

$$\xi := x + ct, \qquad \eta := x - ct$$

とすると，(6.1) が

$$u_{\xi\eta} = 0$$

と変換される．

方程式を考える領域が凸であるから，上の式を簡単に積分できる．つまり，u_ξ が η に依らないので，それを $\tilde{A}(\xi)$ として書くと，

$$u(\xi,\eta) = \int \tilde{A}(\xi)\, d\xi + B(\eta) =: A(\xi) + B(\eta)$$

となる関数 $B(\eta)$ が存在する．もとの変数 t, x で書くと，

$$u(t,x) = A(x+ct) + B(x-ct).$$

したがって，(6.1) の一般解は $v_t - cv_x = 0$ の解 $A(x+ct)$ と，$v_t + cv_x = 0$ の解 $B(x-ct)$ の重ね合わせで得られる．このことは，波動オペレータの分解

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

によりも明らかである．よって，解 $u(t,x)$ のグラフは，変形することなく速度 c で反対方向に動く二つの波で構成される．

A, B の具体形を求めるために，初期条件 (6.2) を考慮する：

$$u(0,x) = A(x) + B(x) = g(x), \tag{6.3}$$

$$u_t(0,x) = cA'(x) - cB'(x) = h(x). \tag{6.4}$$

最初の式 (6.3) を x について微分して，連立方程式を解くと，

$$A(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x h(y)\,,dy + C_1, \qquad A(x) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x h(y)\,,dy + C_2$$

を得る（C_1, C_2 は積分定数）．(6.3) より $C_1 + C_2 = 0$ なので，

$$u(t,x) = A(x+ct) + B(x-ct) = \frac{1}{2}\Big[g(x+ct) + g(x-ct)\Big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy. \tag{6.5}$$

この式を**ダランベールの公式**（D'Alembert's formula）とよぶ．ここで，$g \in C^2(\mathbb{R}), h \in C^1(\mathbb{R})$ ならば，上式で定義される関数 $u(t,x)$ は初期値問題 (6.1)-(6.2) の解を表す．

公式 (6.5) は波動オペレータの分解を用いても導ける．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$$

と書いて，

$$v(t,x) \coloneqq \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x)$$

とおくと，

$$v_t(t,x) - cv_x(t,x) = 0 \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

という移流方程式が得られるので，$D(x) \coloneqq v(0,x)$ に対し

$$v(t,x) = D(x+ct).$$

よって，

$$u_t(t,x) + cu_x(t,x) = D(x+ct) \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}$$

という非斉次移流方程式を解けばよい．この解は

$$u(t,x) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} D(y)\,dy + E(x-ct)$$

である．ただし，$E(x) \coloneqq u(0,x) = g(x)$. 初期条件より D を計算すれば，やはり (6.5) の式が得られる．

1 次元の問題のため，次の定理の証明は直接の計算により従う．

定理 6.1 $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ として，u をダランベールの式 *(6.5)* で定義すれば，

(i) $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$

(ii) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ *in* $(0,\infty) \times \mathbb{R}$

(iii) すべての $x^0 \in \mathbb{R}$ に対し

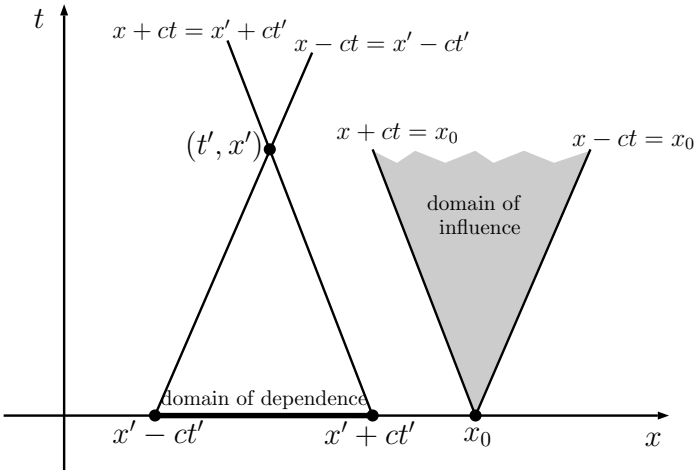
$$\lim_{(t,x)\to(0,x^0),t>0} u(t,x) = g(x^0), \qquad \lim_{(t,x)\to(0,x^0),t>0} u_(t,x) = h(x^0).$$

注 ラプラス方程式と熱方程式と異なる波動方程式の解の性質を二つ挙げる．

- ダランベールの式からわかるように，$g \in C^k(\mathbb{R})$ と $h \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ であれば，波動方程式の解は C^k-級関数になる．しかし，それ以上の正則性が望めない．つまり，ラプラス方程式と熱方程式とは対照的に，波動方程式は滑らかにする効果がないと言える．

- 点 (t',x') における解の値が初期値 g,h のどのような範囲での値に影響されるかを考える．点 (t',x') を通る 2 本の特性曲線（直線）を t の負の方向に延長すると，それらが x-軸と交わる 2 点が $x'-ct'$ と $x'+ct'$ である．解の公式 (6.5) を見ると，解の (t',x') での値 $u(t',x')$ は，初期値を与える関数 g,h の区間 $[x'-ct', x'+ct']$ での値により完全に決定される．この区間を点 (t',x') における解の**依存領域**（domain of dependence）という．

  一方では，ある初期時刻の点 $(0,x_0)$ における初期関数 g,h の値が解のどの範囲での値に影響を与えるかを考えると，この点 $(0,x_0)$ を通る 2 本の特性曲線が区切るくさび形の領域 $\{(t,x);\ x \in (x_0-ct, x_0+ct),\ t>0\}$ である．この V 字形の領域を**影響領域**（domain of influence）とよぶ．すなわち，摂動や信号が有限な速度 c で伝わることになり，熱方程式とは異なる状況である．



波動方程式の依存領域と影響領域.

ダランベールの式 (6.5) は g と h が滑らかな関数でなくても意味をもつ．よって，この式で与えられる $u(t,x)$ は C^2-関数でなくても，それを波動方程式のある意味での解，いわゆる**広義解**（weak

solution），として捉えることができる．広義解を次のようにも定義できる：

$$u(t,x) - u(t+\zeta, x+c\zeta) - u(t+\eta, x-c\eta) + u(t+\zeta+\eta, x+c\zeta-c\eta) = 0 \quad \forall \zeta, \eta \geq 0. \tag{6.6}$$

実際,

- $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ のすべての解は $A(x+ct) + B(x-ct)$, $A, B \in C^2(\mathbb{R})$ の形であり，簡単に確かめられるように，この形を持つ関数は必ず (6.6) を満たす.
- 一方では，(6.6) を満たす $u(t,x)$ が C^2 の正則性をもてば，テーラー展開することで，u が波動方程式 $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ の解であることがわかる.

以上をまとめると，波動方程式の解はすべて (6.6) を満たし，(6.6) を満たす関数 u が C^2-級であれば，波動方程式の解である．よって，式 (6.6) の解の集合は波動方程式の解の集合を含み，波動方程式が解をもたなくても，(6.6) が解をもつことがあり得る．このような式のことを**弱い方程式**（weak equation），その解を **広義解（または弱解）**（weak solution）という.

6.1.1 初期値境界値問題の解

実際の問題で現れる有界領域での問題の解き方を 3 つ紹介する.

反転による解法

$\Omega := \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$ における次の問題を考える：

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}_+ \\ u = g,\ \ u_t &= h && \text{on } \{t=0\} \times \mathbb{R}_+ \\ u &= 0 && \text{on } (0,\infty) \times \{x=0\}. \end{aligned}$$

ただし，g, h が $g(0) = h(0) = 0$ を満たす与えられた関数であるとする.

奇関数としての拡張

$$\tilde{u}(t,x) := \begin{cases} u(t,x), & t \geq 0, x \geq 0 \\ -u(t,-x), & t \geq 0, x \leq 0 \end{cases}, \quad \tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x), & x \geq 0 \\ -g(-x), & x \leq 0 \end{cases}$$

（$\tilde{h}$ も同様に）を行うと，上の問題は

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} &= 0 && \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ \tilde{u} = \tilde{g},\ \ \tilde{u}_t &= \tilde{h} && \text{on } \{t=0\} \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

に変形される．ダランベールの公式より,

$$\tilde{u}(t,x) = \frac{1}{2}\Big[\tilde{g}(x+ct) + \tilde{g}(x-ct)\Big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{h}(y)\,dy.$$

もとの関数 g, h で表すと，

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[g(x+ct)+g(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy & \text{if } x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}[g(x+ct)-g(ct-x)] + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} h(y)\,dy & \text{if } 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

となる．$h = 0$ とすれば，初期値は二つの波に分かれ，左に進む部分は（弦などが）固定されている左端 $x = 0$ で反射する，というふうに解釈できる．

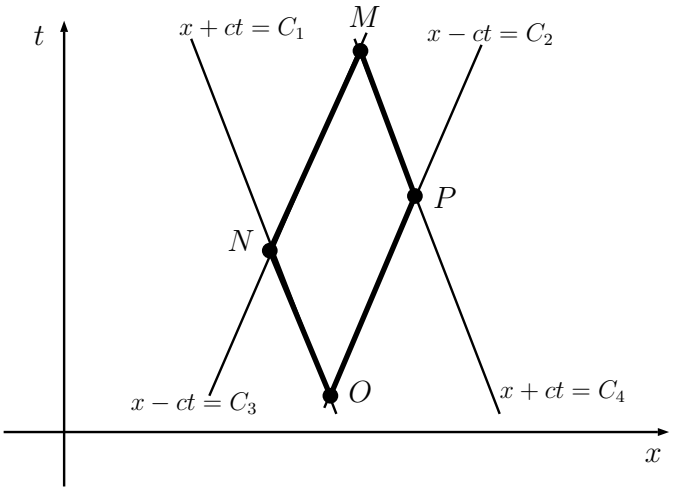
$g''(0) = 0$ であれば，$\tilde{g} \in C^2(\mathbb{R})$ となり，解も C^2-関数になるが，g がこの条件を満たさなければ，解が C^2-級でないことに注意する．

> 一般次元の半空間での問題については [2], p.141.

式 (6.6) による解法

式 (6.6) は幾何学的に考えると，xt-平面内で特性直線で囲まれる任意の平行四辺形 $MNOP$ に対して，対角線上の頂点での u の値を和が一致するという意味をもつ：

$$u(M) + u(O) = u(N) + u(P). \tag{6.7}$$

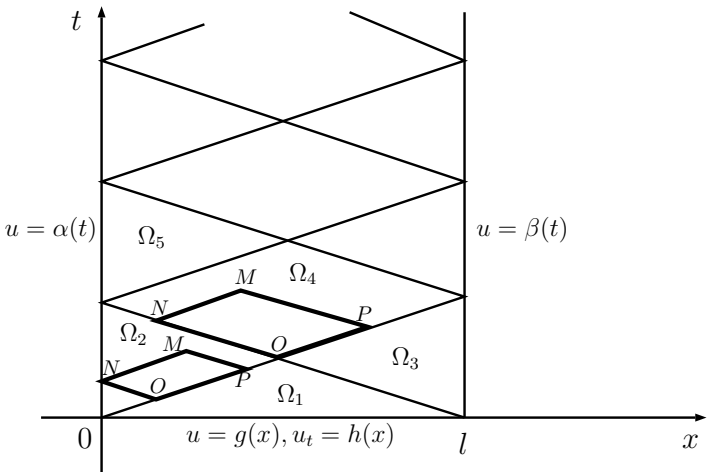


この考察を初期値境界値問題

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && \text{in } (0,\infty)\times(0,l) \\ u = g(x),\ \ u_t &= h(x) && \text{on } \{t=0\}\times(0,l) \\ u(t,0) = \alpha(t),\ \ u(t,l) &= \beta(t) && \text{for } t \in (0,\infty) \end{aligned}$$

を解くのに用いる．

解を求める帯状領域 $\Omega := \{(t,x);\ t > 0,\ x \in (0,l)\}$ を特性直線で部分領域 $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ に分ける．まず，点 $(0,0)$ と点 $(0,l)$ を通る直線を描き，そしてこれらの直線が境界線 $x = 0$ と $x = l$ と交わる点を通る直線をひく．これらの直線が再び境界線と交わるので，同じように線をひき続ける（図を参照）．



すると，上の問題の解を部分領域 $\Omega_i, i = 1, 2, \ldots$ において次のように順番に求めることができる．

- $\overline{\Omega}_1$ では解はダランベールの式 (6.5) により与えられる（境界値の影響範囲外であるため）．
- $\overline{\Omega}_2$ では領域 $\overline{\Omega}_1$ で求めた解と左端の境界条件より求めることができる．実際，$M = (t, x)$ を $\overline{\Omega}_2$ の任意の点とすると，二つの頂点 O, P が $\overline{\Omega}_1$ に属し，もう一つの頂点 N が境界線 $x = 0$ 上にあるような平行四辺形 $MNOP$（それぞれの辺が特性直線と平行であるもの）をとることができる．$u(O), u(P)$ は $\overline{\Omega}_1$ での解が知られているので既知である．また，$u(N)$ は境界条件より定まる．よって，M での解の値を (6.7) より計算できる．
- 同様にして，すべての部分領域での解を求める．

このように求めた解が C^2-級になるには，初期値と境界値の間の適合条件が必要になる．例えば，領域 Ω_2 内の点 M を P に近づける極限を考えると，$u(N) \to \alpha(0), u(O) \to g(0)$，そして (6.7) より $u(M) \to -g(0) + u(P) + \alpha(0)$．ここで，$u(M) \to u(P)$ となるためには，$\alpha(0) = g(0)$ という条件が必要である．同様にして，以下の**適合条件**（compatibility conditions）が導かれる：

$$\alpha(0) = g(0), \quad \alpha'(0) = h(0), \quad \alpha''(0) = c^2 g''(0),$$
$$\beta(0) = g(l), \quad \beta'(0) = h(l), \quad \beta''(0) = c^2 g''(l).$$

フーリエ級数による解法

6.2 演習問題

問題 6.1 ([2], p.45) g, h がコンパクトな台をもつならば，初期値問題

$$u_{tt}(t, x) - c^2 u_{xx}(t, x) = 0 \qquad \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}$$
$$u(0, x) = g(x), u_t(0, x) = h(x) \qquad \text{on } \{t = 0\} \times \mathbb{R}$$

の解 $u(t, x)$ が固定した t に対し x の変数についてコンパクトな台をもつことを示せ．

また，$u(t,x) = A(x+ct) + B(x-ct)$ の分解における関数 A, B がコンパクトな台をもつことができるのは，$\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\, d\xi = 0$ のときのみであることを証明せよ．

問題 6.2 ([2], p.45) $\alpha \neq -c$ とする．また，$g, h \in C^2(\mathbb{R})$ が $x = 0$ の近傍で恒等的にゼロになるような関数であるとする．

$$\begin{aligned} u_{tt}(t,x) - c^2 u_{xx}(t,x) &= 0 && \text{in } (0,\infty)\times(0,\infty) \\ u(0,x) = g(x), u_t(0,x) &= h(x) && \text{on } \{t=0\}\times(0,\infty) \\ u_t &= \alpha u_x && \text{for } (0,\infty)\times\{x=0\} \end{aligned}$$

の解 $u(t,x), t > 0, x > 0$ を求めよ．$\alpha = -c$ のとき解が一般には存在しないことを示せ．

問題 6.3 ([2], p.45) 作用素 L_1, L_2 を次のように定義する：

$$L_1 u \coloneqq a u_x + b u_y + c u, \qquad L_2 u \coloneqq d u_x + e u_y + f u.$$

ただし，a, b, c, d, e, f は $ae - bd \neq 0$ を満たす定数である．

(1) $L_1 w_2 = L_2 w_1$ ならば，方程式 $L_1 u = w_1, L_2 u = w_2$ が共通の解 u をもつことを示せ．
（ヒント：線形な変換により，$a = e = 1, b = d = 0$ の場合に帰着させる．）

(2) $L_1 L_2 u = 0$ の一般解は $u = u_1 + u_2$ という形をもつことを示せ．ただし，u_1, u_2 はそれぞれ $L_1 u_1 = 0, L_2 u_2 = 0$ を満たす．

問題 6.4 ([2], p.45)

$$\begin{aligned} u_{tt}(t,x) - c^2 u_{xx}(t,x) &= x^2 && \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = x, u_t(0,x) &= 0 && \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R} \end{aligned}$$

を解け．（ヒント：まず，時間によらない特殊解を求める．）

問題 6.5 ([2], p.45) 偏微分方程式

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \lambda^2 u$$

に対し，$u(t,x) = f(x^2 - c^2 t^2)$ という形をもつ解 u を $s = x^2 - c^2 t^2$ 冪級数の形で求めよ．ここで，λ は定数である．

References

[1] L. C. Evans: Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.

[2] F. John: Partial Differential Equations, Springer, 1982.

6 波動方程式

概要

この講義では双曲型方程式の代表である波動方程式の解き方と解の性質について紹介する．

フーリエ級数による解法

まずは，固有振動数を求める問題から始める．前節で弦の振動の方程式を導いたが，弦だけではなく様々な物体に対して似た形の振動方程式を得ることができる．あらゆる物には**固有の振動数**（単位時間に振れる回数）というものがあって，その振動数で揺すられるとその物は強く反応して激しく揺れるが（「共振」と言う），固有振動数から大きくずれた力を加えてもほとんど反応しない．

例えば，建物の場合，低くてがっちりした構造のものは固有振動数が大きく（つまり，固有振動数の逆数である固有周期が短い），速い振動に共振する．一方，いわゆる「柔構造」の高層ビルなどは固有振動数が小さく，ゆっくりした揺れに大きく反応するという一般的な傾向がある．それは主として建物の高さ・重さ・剛性によって違ってくる．固有振動数は地震の際の建物の被害の起きやすさの違いに大きく関係しているので非常に重要な量である．

物体の固有振動は最も影響が大きい**1 次モード**（振動数の一番小さい振動で，**基本振動**とも言う）と，振動の「山」の数が何倍かであるモードがある（楽器の場合は，これを倍音という）．構造物の振動に対する応答波形をフーリエ解析してみるとピークがどのモードであがっているかが見てとれて，どの周期の地震が危険であるかがわかる．大きな構造物の固有振動数を実験により調べることが難しいので，偏微分方程式に基づいた数値計算により決定される．

両端を固定した長さ l の弦の固有振動数を求めてみよう．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,l) \tag{6.1}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0 \qquad t \in (0,\infty) \tag{6.2}$$

この問題の解を**変数分離法**で求めてみる．これは解 u に特殊な形を仮定して方程式を満たすものを探す方法である．特殊な形として，x の関数と t の関数に分かれているものを考えるが，線形の方程式の場合は解を和に分解しても意味はないので，積の形を仮定するのが普通である．すなわち，

$$u(t,x) = U(t)V(x)$$

とおく．これを方程式に代入すると，

$$U''(t)V(x) = c^2 U(t)V''(x)$$

となる．ここで，U も V も一変数の関数であるから，dU/dt,dV/dx の代わりに簡単に U',V' と書くことにする．上式を整理すると（$U \neq 0, V \neq 0$ を仮定），

$$\frac{U''(t)}{c^2 U(t)} = \frac{V''(x)}{V(x)}$$

を得る．t のみの関数と x のみの関数が恒等的に等しいというのは，それらが定数であるときしかあり得ない．よってこれを λ と置き，

$$U''(t) = \lambda c^2 U(t) \tag{6.3}$$
$$V''(x) = \lambda V(x) \tag{6.4}$$

と二つの変数分離形の 2 階常微分方程式を得る．どちらも固有値問題の形をしている．

V に対する方程式を定数係数 2 階線形微分方程式として解くと，

$$V(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

という解を得る．(6.2) に対応した境界条件

$$V(0) = V(l) = 0 \tag{6.5}$$

を考慮すると，λ が正のとき $V(x) \equiv 0$ という自明解以外に解が存在しないことがわかる．λ が負のとき，解は

$$V(x) = C_3 \cos\sqrt{-\lambda}x + C_4 \sin\sqrt{-\lambda}x$$

と書ける．境界条件 (6.5) の一つ目を満たすために，$C_3 = 0$ としないといけない．さらに，$V(l) = 0$ をみたすために，

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

と置く必要がある．結局，

$$V(x) = C_4 \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \qquad n = 1, 2, \dots$$

を得る．

U の方程式において λ の形を用いて，同様に解くと，

$$U(t) = C_5 \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + C_6 \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) = C_7 \sin\left(\frac{n\pi c}{l}(t - C_8)\right)$$

となる．ここで $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ という公式を用いた．

V と U の式において $C_4 = 1, C_7 = 1, C_8 = 0$ とすれば，特殊解として

$$u(t, x) = \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

が得られる．この解に特徴的なことは，波形が時間とともに動いてゆかず，常に同じところで振動しているように見えることである．このような波を**定常波**と呼ぶ．これは解が t の関数と x の関数の積の形をしていることの物理的な解釈で，特に $x = lk/n, k = 0, 1, 2, \dots, n$ なる点は全く動かず，逆に $x = lk/2n, k = 1, 3, \dots, 2n-1$ なる点はいっぱいの大きさの振幅で振動する．前者を**節**，後者を**腹**という．

実際に与えられた長さ l の弦の問題の解として生じる定常波は，勝手な振動数は持ちえない．上の計算からわかるように，振動数は

$$\omega_n = \frac{c}{2l}n, \qquad n = 1, 2, \dots$$

である．これを長さ l に対する**固有振動数**と呼び，これに対応する振動をその**固有振動**と呼ぶ．

重ね合わせ

弦の問題で初期条件がなかったため，解が一つに定まらず，積分定数を含む様々な解が得られた．それは以下のものだった：

$$u(t,x) = \Big[a_n \cos\big(\frac{n\pi c}{l}t\big) + b_n \sin\big(\frac{n\pi c}{l}t\big)\Big] \sin\big(\frac{n\pi}{l}x\big), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

ここで，混合問題，すなわち境界条件と初期条件つきの問題を考える：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad t > 0,\ x \in (0,l) \tag{6.6}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \qquad x \in (0,l) \tag{6.7}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0 \qquad t > 0 \tag{6.8}$$

初期値がある特別な形をしていれば，上で計算した結果を使って，この問題を解くことができることに注意しよう．具体的には，もし，

$$\varphi(x) = C_1 \sin\big(\frac{n\pi}{l}x\big), \qquad \psi(x) = C_2 \sin\big(\frac{n\pi}{l}x\big)$$

であれば，

$$u(t,x) = \left[C_1 \cos\big(\frac{n\pi c}{l}t\big) + \frac{C_2}{n\pi c} \sin\big(\frac{n\pi c}{l}t\big)\right] \sin\big(\frac{n\pi}{l}x\big)$$

という関数が解になる．つまり，初期値が固有振動数をもつ三角関数であれば，解を容易に構成することができる．

さらに，波動方程式は線形だから，上で得た解を二つ以上の異なる振動数に対するものの線形結合を考えると，それも解になる．従って，初期関数が

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{N} a_n \sin\big(\frac{n\pi}{l}x\big) \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{n\pi c}{l} b_n \sin\big(\frac{n\pi}{l}x\big) \end{aligned} \tag{6.9}$$

という形を持つ関数であれば，混合問題の解は

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{N} \Big[a_n \cos\big(\frac{n\pi c}{l}t\big) + b_n \sin\big(\frac{n\pi c}{l}t\big)\Big] \sin\big(\frac{n\pi}{l}x\big) \tag{6.10}$$

となる．

(6.9) という形が非常に限定的であるから，実際には初期値がこの形をすることを期待できない．そこで，フーリエが思いついた解決策は次のものである．すなわち，もし任意の関数を $\{\sin(\frac{n\pi}{l}x)\}$ の無限級数として表すことができれば，(6.9) で N を無限大にした式

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\big(\frac{n\pi}{l}x\big) \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} b_n \sin\big(\frac{n\pi}{l}x\big) \end{aligned} \tag{6.11}$$

が成り立つので，(6.10) で $N \to \infty$ とすれば，解が得られるだろうという考えである：

$$u(t,x) =_? \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cos\big(\frac{n\pi c}{l} t\big) + b_n \sin\big(\frac{n\pi c}{l} t\big) \Big] \sin\big(\frac{n\pi}{l} x\big). \tag{6.12}$$

このやり方で方程式を解くができることはフーリエにより明らかにされたが，数学的に正確な裏付けを見つけるのに長い時間がかかった．

数学的な根拠をつけるために，以下の問題を解決しなければならない．

1. 任意の関数を三角関数による級数で表すことができるか？任意の関数ではだめなら，どんな関数について可能であるか？
2. 初期値 φ, ψ に対し (6.11) でのフーリエ係数 $\{a_n\}, \{b_n\}$ をどのように決めるか？
3. 級数 (6.12) はどういう意味で収束するか？
4. (6.12) が解であることを確かめるためにその偏微分を計算する必要があるが，どのような条件の下で級数を項別微分できるか？

これらの質問に答えるために，フーリエ級数の理論の基本的な結果を紹介する．

フーリエ係数の決定

任意の関数 $f : (0,l) \to \mathbb{R}$ があれば，それを三角関数の級数

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\big(\frac{2n\pi}{l} x\big) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\big(\frac{2n\pi}{l} x\big) \tag{6.13}$$

に展開する方法について考える（まずは形式的でよい）．

最初に，このような関数の展開の利点を述べておこう．(6.13) は「きれいな」三角関数を用いて任意の関数を表現しているが，ここで関数 f は滑らかでなくても連続でなくてもかまわない．一方では，テーラー展開のような展開法では展開する関数の微分を使うので，関数は非常におとなしいものでないといけない．

フーリエ係数 a_n, b_n を決定するために，三角関数が直交するという性質を利用し，(6.13) に $\cos\big(\frac{m\pi}{l} x\big)$ と $\sin\big(\frac{m\pi}{l} x\big)$ を順番にかけて，$(0,l)$ 上で積分する．そのときに無限級数の積分を計算することになるので，積分と級数の順番の交換が可能かどうかを考えないといけない．そこで，級数が一様に収束すると仮定すればよい．級数が一様に収束するとは，その部分和

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\big(\frac{2n\pi}{l} x\big) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\big(\frac{2n\pi}{l} x\big)$$

が $(0,l)$ において一様に収束するという意味である．つまり，次がが成り立つ．

$$\sup_{x \in (0,l)} |s_N(x) - f(x)| \to 0, \qquad \text{as } N \to \infty$$

計算する前に，次の結果を証明しておこう．

補題 6.2 (三角関数の直交性) 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\int_0^l \cos\left(\frac{2m\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)dx &= \begin{cases} l/2 & (m=n \text{ のとき}) \\ 0 & (m\neq n \text{ のとき}) \end{cases} \\
\int_0^l \sin\left(\frac{2m\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)dx &= \begin{cases} l/2 & (m=n \text{ のとき}) \\ 0 & (m\neq n \text{ のとき}) \end{cases} \\
\int_0^l \cos\left(\frac{2m\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)dx &= 0
\end{aligned}$$

証明

最初の式で $m \neq n$ の場合を考える.

$$\cos\left(\frac{2m\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{2(m+n)\pi}{l}x\right) + \cos\left(\frac{2(m-n)\pi}{l}x\right)\right]$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}
\int_0^l \cos\left(\tfrac{2m\pi}{l}x\right)\cos\left(\tfrac{2n\pi}{l}x\right)dx &= \tfrac{1}{2}\int_0^l \cos\left(\tfrac{2(m+n)\pi}{l}x\right)dx + \tfrac{1}{2}\int_0^l \cos\left(\tfrac{2(m-n)\pi}{l}x\right)dx \\
&= \tfrac{1}{4(m+n)}\sin\left(\tfrac{2(m+n)\pi}{l}x\right)\Big|_0^l + \tfrac{1}{4(m-n)}\sin\left(\tfrac{2(m-n)\pi}{l}x\right)\Big|_0^l \\
&= 0
\end{aligned}$$

を得る. 一方では, $m = n$ の場合,

$$\int_0^l \cos^2\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^l \left[1+\cos\left(\frac{4n\pi}{l}x\right)\right]dx = l/2$$

二つ目の式は

$$\sin\left(\tfrac{2m\pi}{l}x\right)\sin\left(\tfrac{2n\pi}{l}x\right) = \tfrac{1}{2}\left[\cos\left(\tfrac{2(m-n)\pi}{l}x\right) - \cos\left(\tfrac{2(m+n)\pi}{l}x\right)\right]$$

を用いて, 同じように計算される. 最後の式は, $l/2$ の点に対する対称性を考慮するだけで示せる. すなわち, $\sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)$ は $l/2$ に対して奇関数であり, $\cos\left(\frac{2m\pi}{l}x\right)$ は偶関数である. よって, その積は奇関数になり, $(0,l)$ での積分は零になる. □

さて, f の級数に $\cos\left(\frac{2m\pi}{l}x\right)$ をかけて, $(0,l)$ で積分すると,

$$\begin{aligned}
&\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{2m\pi}{l}x\right)dx \\
&\quad= \frac{a_0}{2}\int_0^l \cos\left(\frac{2m\pi}{l}x\right)dx + \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{l}x\right)dx \\
&\qquad+ \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{l}x\right)dx
\end{aligned}$$

を得る. 級数が一様に収束すると仮定しているので, 積分を和の中に入れることができて, 上の補題を用いると,

$$\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{2m\pi}{l}x\right)dx = a_m\frac{l}{2}$$

がわかる．f の級数に $\sin\left(\frac{2m\pi}{l}x\right)$ をかけて，$(0,l)$ で積分すると，同じように

$$\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{2m\pi}{l}x\right)dx = b_m\frac{l}{2}$$

が得られる．さらに，(6.13) を単に $(0,l)$ 上で積分すると，

$$\int_0^l f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_0^l dx = \frac{a_0 l}{2}.$$

フーリエ係数の公式

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right) \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)dx \\ b_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)dx \\ a_0 &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx \end{aligned} \tag{6.15}$$

この公式を使って，任意の関数 $f \in L^2(0,l)$ をフーリエ級数として表現できる．得られた級数が収束するか，そしてどのような意味で収束するかについてはまだ調べていない．(6.15) を用いて形式的に構成された級数 (6.14) が f に収束するかわからないため，式では「$=$」ではなく「$\approx$」としている．(6.14) の右辺を**関数 f に対するフーリエ級数** (Fourier series) と呼ぶ．

例 $l = 2\pi$ として，次の関数を考える：

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \le x \le \pi) \\ 2\pi - x & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$$

関数は周期 $l = 2\pi$ をもつ関数として拡張すれば，$(0,l)$ で収束するフーリエ級数はそれ以外のところでも拡張された周期関数に収束する．関数 f は偶関数なので，フーリエ級数の sin の係数はすべて 0 になる．残りの係数を計算する．

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \pi \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin(nx) + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}(\cos(n\pi) - 1) \end{aligned}$$

n が偶数（$n = 2k, k \in \mathbb{N}$）のとき，これは 0 になり，n が奇数（$n = 2k-1, k \in \mathbb{N}$）のときは $-4/\pi(2k-1)^2$ になるので，f のフーリエ級数は次のようになる：

$$f(x) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x.$$

例 $l=1$ として，次の関数を考える：

$$f(x)=\frac{1}{2}-x,\qquad x\in(0,1]$$

f を周期 $l=1$ をもつ関数として拡張する．拡張された関数は不連続であるが，それでもフーリエ級数を形式的に計算することができる．ただし，得られた級数は一様収束しないことが確かである（級数の部分和は連続な関数で，それが一様収束すれば極限が連続な関数になるから）．関数 f は奇関数なので，フーリエ級数の a_0 の係数と $\cos$ の係数はすべて 0 になる．残りの $\sin$ の係数を計算する．

$$\begin{aligned}
b_n &= 2\int_0^1 f(x)\sin(2n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 (\tfrac{1}{2}-x)\sin(2n\pi x)\,dx\\
&= \int_0^1 \sin(2n\pi x)\,dx - 2\int_0^1 x\sin(2n\pi x)\,dx = -2\int_0^1 x\sin(2n\pi x)\,dx\\
&= -2\int_0^1 \tfrac{1}{2n\pi}\cos(2n\pi x)\,dx + \left[\tfrac{x}{n\pi}\cos(2n\pi x)\right]_0^1 = 0+\tfrac{1}{n\pi}\cos(2n\pi)=\frac{1}{n\pi}
\end{aligned}$$

f のフーリエ級数は次のようになる：

$$f(x)\approx\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(2n\pi x).$$

以上の例でわかるように，滑らかでない関数や不連続な関数であっても，フーリエ級数を形式的に計算できる．その反面，級数の収束が一様になるとは限らない．例で紹介したような不連続な関数の場合，不連続な点の近傍では，フーリエ級数の N 次部分和が大きく振動して，部分和の最大値が関数自体の最大値より大きくなってしまう．この超過量は，高調波の周波数 (つまり，部分和の項数) が増えても無くならず，ある有限極限値に近づく．この現象をギブス現象という．これは，級数が各点で収束している（不連続な点では右からの関数値の極限と左からの関数値の極限の平均に収束する）ものの，一様には収束しないことを意味する．

フーリエ級数の収束

導入したフーリエ級数についての形式的な話を数学的な立場から整理しよう．関数 $f:(0,l)\to\mathbb{R}$ が与えられたとき，(6.15) で与えられる係数に対して f のフーリエ級数を

$$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\big(\frac{2n\pi}{l}x\big)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\big(\frac{2n\pi}{l}x\big)\tag{6.16}$$

とおく．関数 $s(x)$ は部分和

$$s_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos\big(\frac{2n\pi}{l}x\big)+\sum_{n=1}^{N}b_n\sin\big(\frac{2n\pi}{l}x\big)$$

の $N\to\infty$ のときの極限として定義される（この極限が存在するならば）．

ここで，s が周期 l をもつ周期関数であるから，以下の考察では関数 f が実数全体で定義される周期 l の周期関数であると考える．このとき，f が連続であるとは，f が $(0,l)$ において連続で，さらに $f(0)=f(l)$ を満たすという意味になる．

フーリエ級数の各点での収束について次の定理が成り立つ．

定理 6.3 (Jordan-Dirichlet criterion) f が $[0,l]$ において可積で有界変動の l-周期関数であるとする．そのとき，

(i) f に対するフーリエ級数は各点 $x \in [0,l]$ で $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ に収束する．

(ii) x が f の連続な点であれば，f の点 x でのフーリエ級数は $f(x)$ に収束する．

(iii) f が閉区間 $[a,b] \subset [0,l]$ で連続であれば（境界点をこめて），f のフーリエ級数は $[a,b]$ において関数 f に一様収束する．

注 (有界変動) 区間 $[0,l]$ に接点 $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_n = l$ を考える．関数 f が $[0,l]$ において有界変動であるというのは，

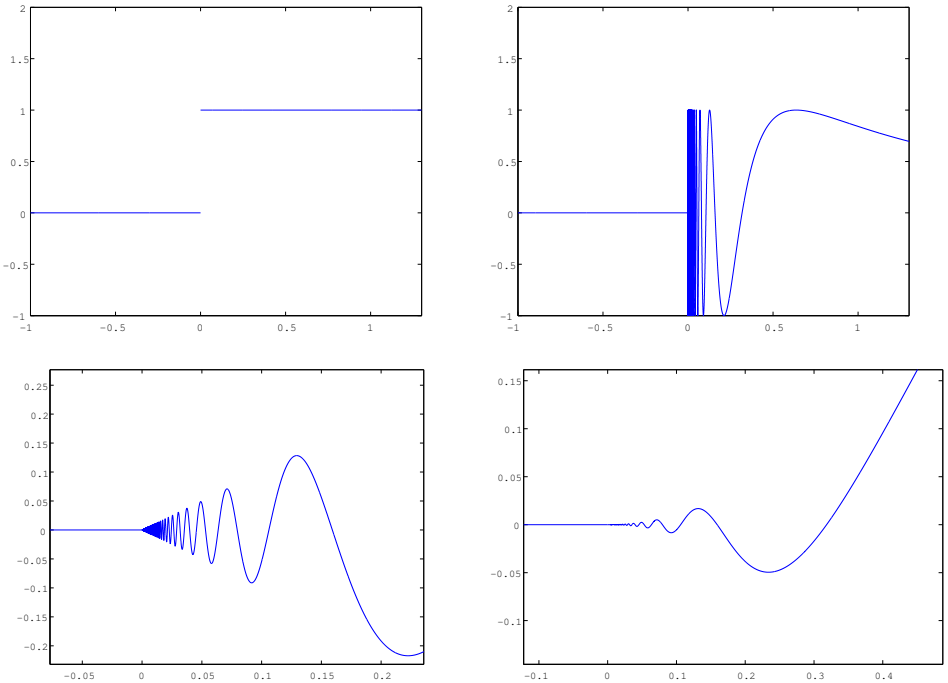
$$\sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

の値が接点をどのように選んでも有界であるという意味である（すなわち，全ての接点への分け方に対する上の量の上限が有界である）．有界変動の関数は連続になるとは限らない．逆に，連続な関数が有界変動であるとは限らない．

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = x f_2(x), \quad f_4(x) = x^2 f_2(x)$$

のうち，f_1 は不連続であるが有界変動である．f_3 は連続であるが有界変動ではない．f_4 は 0 の近傍で無限回振動しているが，有界変動である．

よくある有界変動の関数は区分的に多項式として定義される関数である．



f_1, f_2, f_3 と f_4 のグラフ

例 (i) より，f がジャンプするところがあれば f のフーリエ級数が f と等しくないことがわかる．例えば，$l = 1$ として，関数

$$f(x) = \frac{1}{2} - x, \qquad x \in (0, 1]$$

を（周期 1 の関数として）考えると，そのフーリエ級数が

$$s(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2k\pi x)$$

となる．この場合，$f(x)$ が $x = 0$ で不連続であるが，可積関数で有界変動であるから，$x = 0$ ではフーリエ級数が $(f(0+) + f(0-))/2 = (1/2 - 1/2)/2 = 0$ に収束する．$x \in (0, 1)$ においてフーリエ級数が $f(x)$ に収束する．しかし，f が不連続だから，一様収束はしない．これは 0 の点の近傍で邪魔な振動（ギブスの現象）が現れるということになる．

例 (iii) より，f が連続な周期関数であれば，そのフーリエ級数が $\mathbb{R}$ において f に一様収束することが分かる．例えば，$l = 2\pi$ として，次の関数

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \le x \le \pi) \\ 2\pi - x & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$$

を（周期 2π の関数として）考えると，そのフーリエ級数が

$$s(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x$$

となる．この関数（の周期的拡張）は可積で，有界変動で，$\mathbb{R}$ で連続だから，フーリエ級数が f に一様収束する．このとき，ギブスの現象が現れない．

例 関数 $f(x) = x^2$，$x \in (0, 2\pi)$ に対するフーリエ級数を求め，得られたフーリエ級数が f に収束するか調べよ．さらに，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ の和を計算せよ．

- フーリエ係数を計算すると，

  $$a_0 = \frac{8\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{4}{n^2}, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx \, dx = \frac{-4\pi}{n}$$

  となるので，フーリエ級数は

  $$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \Big)$$

- x^2 という関数が可積で有界変動であるから，Jordan-Dirichlet の定理よりフーリエ級数が各点で $(f(x+) + f(x-))/2$ に収束する．すなわち，$x \in (0, 2\pi)$ に対して，フーリエ級数がもとの関数に収束し，$x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ の点では $2\pi^2$ に収束する．

- 上の結果を $x = 0$ に対して用いると，

  $$2\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{4}{n^2} - 0 \Big)$$

  従って，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$.

一様収束は別の理由でも重要である．これからフーリエ級数の方法を用いて，波動方程式を解く．すなわち，初期値をフーリエ級数に展開して，解の候補をフーリエ級数の形で構成し，微分方程式に代入して解であることを確かめる．そのとき，極限と微分の交換をすることになるので，極限と積分の交換も含めて以下の定理を準備しておく．

定理（極限と積分の交換）

関数列 $s_N : [0,l] \to \mathbb{R}$ に対し，すべての $N \in \mathbb{N}$ に対し $\int_0^l s_N(x)\,dx$ がリーマン積分の意味で存在するとする．s_N が $[0,l]$ において s に**一様に収束する**ならば，$\int_0^l s(x)\,dx$ が存在し，次が成り立つ：

$$\int_0^l s(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^l s_N(x)\,dx$$

定理（極限と微分の交換）

関数 $s_N : [0,l] \to \mathbb{R}$ がすべての $N \in \mathbb{N}$ に対し各点 $x \in (0,l)$ において有限な微分 $s'_N(x)$ をもつとする．$s_N(x)$ が各点 x において $s(x)$ に収束するとする．さらに，s'_N が $(0,l)$ において（局所的）**一様収束する**とする．そのとき，次が成り立つ：

$$s'(x) = \lim_{N\to\infty} s'_N(x)$$

波動方程式を解く

1 次元の波動方程式に対する混合問題（初期値境界値問題）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad t > 0,\ x \in (0,l) \tag{6.17}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \qquad x \in (0,l) \tag{6.18}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0 \qquad t > 0 \tag{6.19}$$

を考える．

変数分離法でつぎのことを示した．もし，初期関数が

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{N} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \end{aligned}$$

という形を持つ関数であれば，混合問題の解は

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{N} \left[\alpha_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + \beta_n \frac{l}{n\pi c} \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

となる．

これからは，$N \to \infty$ の極限を数学的に正確に考えることを目標とする．

まず，$x \in [0,l]$ に対して定義されている初期関数 φ, ψ を sin 級数で表すために，φ, ψ を周期 $2l$ の奇関数として拡張すればよい．このように拡張した関数を $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ とおき，$\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ が $\mathbb{R}$ において連続で，$\varphi \in C^1([0,l]), \psi \in C^1([0,l])$ であると仮定する．このとき，

$$\alpha_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} \tilde{\varphi}(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx, \qquad \beta_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} \tilde{\psi} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \tag{6.20}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ \tilde{\psi}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \end{aligned} \tag{6.21}$$

と書ける．なぜかというと，$\tilde{\varphi}$ が $\mathbb{R}$ で連続であるから，Jordan-Dirichlet の定理よりそのフーリエ級数は $\mathbb{R}$ で $\tilde{\varphi}$ に一様収束する．よって，上の式で等号を書いてもよい．$\tilde{\psi}$ については同様である．

以下で必要になる Jordan-Dirichlet の定理の拡張を紹介しておく．

定理.

f が周期 $2l$ の連続な関数で，$[0,2l]$ において絶対連続であるとする．そのとき，f のフーリエ係数 a_n, b_n に対し $\sum |a_n| + |b_n|$ が収束する．

関数が絶対連続になる簡単な十分条件は，関数の微分が連続であるというものがある．この定理を用いると，上で φ と ψ においた仮定のもとで $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ と $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|$ が収束することが分かる．

さて，解の候補を

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + \beta_n \frac{l}{n\pi c} \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

とおく．この u が混合問題の解であることを確かめる．まず，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\alpha_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + \beta_n \frac{l}{n\pi c} \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| + \frac{l}{\pi c}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\beta_n|}{n} < \infty$$

に注意すると，Weierstrass の M-判定より上の級数が $\mathbb{R}^2$ において一様収束する．従って，$u(t,x)$ は連続な関数である．

条件 (6.17)-(6.19) が満たされていることを順番に確認しよう．

- $u(t,0) = u(t,l) = 0$ は $\sin 0 = \sin \pi n = 0$ より明らかである
- $u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot 1 + 0) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \tilde{\varphi}(x)$

- $u_t(0,x)$ について考える．u を与える級数を形式的に（すなわち，項ごとに）微分すると，

$$\bar{u}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[-\alpha_n \frac{n\pi c}{l} \sin\big(\frac{n\pi c}{l}t\big) + \beta_n \cos\big(\frac{n\pi c}{l}t\big) \Big] \sin\big(\frac{n\pi}{l}x\big)$$

を得る．この関数 $\bar{u}$ が u_t と一致することを示すために，$\bar{u}$ の一様収束性を調べる．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| -\alpha_n \frac{n\pi c}{l} \sin\big(\frac{n\pi c}{l}t\big) + \beta_n \cos\big(\frac{n\pi c}{l}t\big) \sin\big(\frac{n\pi}{l}x\big) \Big| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{l} n|\alpha_n| + |\beta_n|$$

ここで，$\sum n|\alpha_n| < \infty$ が必要になる．そのため，$\tilde{\varphi}'(x)$ が連続で，$\varphi \in C^2([0,l])$ であると仮定すればよい．その理由を探るために $\tilde{\varphi}'$ のフーリエ係数を計算する．$\tilde{\varphi}'$ が偶関数であるから，cos の係数のみになる．

$$\frac{1}{l}\int_0^{2l} \tilde{\varphi}'(x) \cos\big(\frac{n\pi}{l}x\big)\,dx = \frac{1}{l}\frac{n\pi}{l}\int_0^{2l} \tilde{\varphi}(x) \sin\big(\frac{n\pi}{l}x\big)\,dx = \frac{\pi}{l} n\alpha_n$$

$\tilde{\varphi}'$ が上の定理の仮定を満たしているから，$\frac{\pi}{l}\sum n|\alpha_n| < \infty$ を得る．

従って，Weierstrass の定理より $\bar{u}$ を与える級数が $\mathbb{R}^2$ で一様収束し，微分と無限和の交換ができる．すなわち，

$$u_t(t,x) = \bar{u}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[-\alpha_n \frac{n\pi c}{l} \sin\big(\frac{n\pi c}{l}t\big) + \beta_n \cos\big(\frac{n\pi c}{l}t\big) \Big] \sin\big(\frac{n\pi}{l}x\big)$$

これより

$$u_t(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (0 + \beta_n \cdot 1) \sin\big(\frac{n\pi}{l}x\big) = \tilde{\psi}(x)$$

とすぐに計算できる．

- 方程式が満たされることを確かめるために，u の t についての 2 階微分と x についての 2 階偏微分を計算しなければならない．u_t の場合の考察と同様に考えると，無限和と微分が交換できるためには，$\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R}), \tilde{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$，そして $\varphi \in C^3([0,l]), \psi \in C^2([0,l])$ と仮定すればよいことがわかる．そうすれば，u を与える級数を項ごとに t と x について 2 回微分できて，その結果となる級数がそれぞれ u_{tt} と u_{xx} に等しくなる．

以上，拡張した初期関数が $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R}), \tilde{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$ という条件を満たしていれば，上て u が混合問題の解になることがわかった．この条件がもとの関数 φ, ψ に対してどのような条件になるかを考える．

$\psi(0) \neq 0$ だとすると，ψ を奇関数として拡張して得られる $\tilde{\psi}$ が $x = 0$ の点で不連続になる．よって，$\psi(0) = 0$ という条件が必要になる．同様にして，$\psi(l) = 0$ という条件を得る．また，$\psi(0) = 0$ であれば，$\tilde{\psi}'$ も $x = 0$ で自動的に連続になる．これは，$x \in [-l, 0]$ に対して，$\tilde{\psi}(x) = -\psi(-x)$ が成り立ち，0 での右からの微分 $\tilde{\psi}'(0+) = \psi'(0+)$ と左からの微分 $\tilde{\psi}'(0-) = (-1)\cdot(-\psi'(-0-)) = \psi'(0+)$ が一致するからである．$x = l$ については同様に考えることができる．

定理 6.4 $\varphi \in C^3([0,l]), \psi \in C^2([0,l])$ が

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$$

を満たすとする．そのとき，混合問題 *(6.17)-(6.19)* の解 $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,l])$ が存在し，以下のフーリエ級数の形で書ける．

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) + \beta_n \frac{l}{n\pi c} \sin\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

ここで，α_n, β_n は *(6.20)* で与えられる．u の級数は一様収束し，その *2* 階までの項ごとの偏微分が一様に収束する．

注

- 定理の初期値に対する仮定を弱めることができる．仮定を弱めたときに一般に u を与える級数は C^2-関数に収束しない．そのとき，級数の和を**広義解**としてみなすことができる．一方，定理の仮定が満たされると，C^2 級のいわゆる**古典解**が得られる．
- u を与える級数の和を求めることができる．

  $$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}, \qquad \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$

  という公式を用いると，

  $$\begin{aligned}
  u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right) \right] \\
  &\qquad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{2} \frac{l}{n\pi c} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right) \right] \\
  &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right) \\
  &\qquad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{2} \frac{l}{n\pi c} \frac{n\pi}{l} \int_{x-ct}^{x+ct} \sin\left(\frac{n\pi s}{l}\right) ds \\
  &= \frac{1}{2}\tilde{\varphi}(x+ct) + \frac{1}{2}\tilde{\varphi}(x-ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi s}{l}\right) ds \\
  &= \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x+ct) + \tilde{\varphi}(x-ct)\right] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{\psi}(s)\, ds
  \end{aligned}$$

  これは波動方程式に対するダランベールの公式である．

> 一般次元における固有関数に基づいた解法については [2], p.140 でコメントが記載されている．

6.3 演習問題

問題 6.6 両端を上下に自由に動けるようにした長さ l の弦の振動問題

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0 \qquad x \in (0,l),\ \ t \in (0,\infty) \\
&\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = 0 \qquad t \in (0,\infty)
\end{aligned}$$

に対し，固有振動数を変数分離法を用いて求めよ．

問題 6.7 混合問題

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, && x \in (0,5),\ \ t > 0\\
&u(0,x) = 3\sin(\pi x), && x \in [0,5]\\
&\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = -\sin(\tfrac{2\pi}{5}x), && x \in [0,5]\\
&u(t,0) = u(t,5) = 0, && t \geq 0
\end{aligned}$$

の解 $u(t,x)$ を求めよ．

問題 6.8 関数 $f(x)$ を次のように定義する．

$$f(x) = -x^3 + x, \qquad x \in (-1,1)$$

関数 f を周期 2 の周期関数に拡張した関数のフーリエ級数を求めよ．また，得られた級数が $\mathbb{R}$ において一様収束する理由を述べよ．

問題 6.9 関数 $f(x)$ を次のように定義する：

$$f(x) = x, \qquad x \in [0,\pi].$$

(1) f を与えられた区間 $[0,\pi]$ において sin 関数のみのフーリエ級数で表せ．

(2) (1) のフーリエ級数を s_s とすると，全ての $x \in \mathbb{R}$ に対し，$s_s(x)$ の値を求めよ．さらに，s_s が一様収束する x の範囲を調べよ．

(3) f を与えられた区間 $[0,\pi]$ において cos 関数のみのフーリエ級数で表せ．

(4) (3) のフーリエ級数を s_c とすると，全ての $x \in \mathbb{R}$ に対し，$s_c(x)$ の値を求めよ．さらに，s_c が一様収束する x の範囲を調べよ．

(5) s_c を項ごとに微分した級数はどのような関数に収束するか調べよ．

問題 6.10 関数 $f(x) = x$, $x \in (-\pi,\pi)$ のフーリエ級数を用いて，

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

の和を求めよ．

問題 6.11 関数 $f(x) = \sin x$ に対し，区間 $(0,\pi)$ での変動を求めよ．すなわち，

$$\sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|, \qquad x_k \in (0,\pi),\ \ x_k \leq x_{k+1}$$

の上限を計算せよ．

問題 6.12 関数 $f(x) = x^2$, $x \in (-1,1)$ を周期 2 の関数に拡張した関数のフーリエ級数が $x \in \mathbb{R}$ において一様収束するか答えよ．

問題 6.13 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$ の和を求めよ．

問題 6.14 関数 $f(x) = x^2,\ \ x \in (0, 2\pi)$ に対するフーリエ級数を求め，得られたフーリエ級数が f に収束するか調べよ．さらに，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ の和を計算せよ．

（ヒント：フーリエ級数は次のようになる：　$\dfrac{4\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$.）

問題 6.15 $f(x)$ を周期 ℓ を持つ 2 回微分可能な偶関数とする． f のフーリエ級数の cos の係数を a_n とする． f の導関数のフーリエ級数の収束のはやさが f のフーリエ級数の収束のはやさより 1 オーダー低いことを示せ．すなわち，$\frac{df}{dx}$ のフーリエ係数を b_n とおくと，

$$b_n = Cna_n, \qquad C \in \mathbb{R} \text{ 定数}$$

が成り立つことを示せばよい．

問題 6.16 ([2], p.45) 混合問題

$$\begin{aligned}
&u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0, && x \in (0,\pi),\ \ t > 0 \\
&u(0,x) = 1, && x \in (0,\pi) \\
&u_t(0,x) = 0, && x \in (0,\pi) \\
&u(t,0) = u(t,\pi) = 0, && t \geq 0
\end{aligned}$$

の解 $u(t,x)$ を次の 2 つの方法を用いて求めよ：

(1) 第 10 回の講義で導いた平行四辺形の頂点における値の関係式を用いた解法

(2) フーリエ級数による解法

References

[1] L. C. Evans: Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.

[2] F. John: Partial Differential Equations, Springer, 1982.

6 波動方程式

概要

この講義では双曲型方程式の代表である波動方程式の解き方と解の性質について紹介する．

6.4 高次元の波動方程式

ここでは，空間の次元を $n \geq 2$ とし，初期値問題

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u = 0 \qquad & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u = g,\ \ u_t = h \qquad & \text{on } \{t=0\} \times \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{6.1}$$

を考えて，解を g, h で表した公式を導く．

手順として，解 u の球面上の平均値が満たす微分方程式を導出し，n が奇数であればこの微分方程式が 1 次元波動方程式に帰着できることを示して，ダランベールの公式を適用することで解の公式を得る．次元が偶数の場合，一旦，次元を一つ上げた問題を考えて，その解の公式において次元を元に下げる作業をする．

6.4.1 $n = 3$ の場合

解 u の球面上の平均値を次のように定義する：

$$U(x;r,t) \coloneqq \fint_{\partial B(x,r)} u(t,y)\, dS(y). \tag{6.2}$$

同様にして，

$$G(x;r) \coloneqq \fint_{\partial B(x,r)} g(y)\, dS(y), \qquad H(x;r) \coloneqq \fint_{\partial B(x,r)} h(y)\, dS(y).$$

補題 6.5 (Euler-Poisson-Darboux 方程式) $u \in C^m([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ $(m \geq 2)$ が *(6.1)* を満たすならば，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対し $U(x) \in C^m([0,\infty) \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ で，次を満たす：

$$\begin{aligned} U_{tt} - U_{rr} - \tfrac{n-1}{r} U_r = 0 \qquad & \textit{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}_+ \\ U = G,\ \ U_t = H \qquad & \textit{on } \{t=0\} \times \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{6.3}$$

証明

$r>0$ に対して，

$$\begin{aligned} U_r(x;r,t) &= \frac{\partial}{\partial r}\fint_{\partial B(0,1)} u(t,x+rz)\,dS(z) = \fint_{\partial B(x,r)} \nabla u(t,y)\cdot\boldsymbol{\nu}(y)\,dS(y) \\ &= \frac{r}{n}\fint_{B(x,r)} \Delta u(t,y)\,dy. \end{aligned} \tag{6.4}$$

これをもう一度 r について微分すると，

$$U_{rr}(x;r,t) = \fint_{\partial B(x,r)} \Delta u\,dS + \left(\frac{1}{n}-1\right)\fint_{B(x,r)} \Delta u\,dy.$$

同様にして，他の微分も計算できて，$U\in C^m([0,\infty)\times\overline{\mathbb{R}}_+)$ が示せる．
次に，u が (6.1) の解だから，

$$U_r(x;r,t) = \frac{r}{n}\fint_{B(x,r)} \Delta u(t,y)\,dy = \frac{r}{n}\fint_{B(x,r)} u_{tt}(t,y)\,dy = \frac{1}{n\beta_n r^{n-1}}\int_{B(x,r)} u_{tt}(t,y)\,dy.$$

これより，

$$r^{n-1}U_r = \frac{1}{n\beta_n}\int_{B(x,r)} u_{tt}(t,y)\,dy,$$

そして，これを r について微分して，

$$\left(r^{n-1}U_r\right)_r = \frac{1}{n\beta_n}\int_{\partial B(x,r)} u_{tt}(t,y)\,dS(y) = r^{n-1}\fint_{\partial B(x,r)} u_{tt}(t,y)\,dS(y) = r^{n-1}U_{tt}. \qquad \square$$

$n=3$ の場合，$m=2$ で十分であるので，ここでは $u\in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ とする．

$$\tilde{U} := rU, \qquad \tilde{G} := rG, \qquad \tilde{H} := rH$$

とおいた関数 $\tilde{U},\tilde{G},\tilde{H}$ が次の関係式を満たすことを確かめる．

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{tt}-\tilde{U}_{rr} &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+\times(0,\infty) \\ \tilde{U}=\tilde{G},\ \ \tilde{U}_t &= \tilde{H} && \text{on } \mathbb{R}_+\times\{t=0\} \\ \tilde{U} &= 0 && \text{on } \{r=0\}\times(0,\infty). \end{aligned} \tag{6.5}$$

実際，上の補題を $n=3$ に適用すれば，

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r\left(U_{rr}+\frac{2}{r}U_r\right) = rU_{rr}+2U_r = (U+rU_r)_r = \tilde{U}_{rr}.$$

(6.5) の 2 行目の初期条件は明らかで，3 行目の式は (6.2) で $r\to 0+$ とすることで得られる．

第 10 回の講義ノートで導いた半直線上の 1 次元波動方程式の解の公式を用いると，$0\le r\le t$ において

$$\tilde{U}(x;r,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{G}(t+r)-\tilde{G}(t-r)\right] + \frac{1}{2}\int_{-r+t}^{r+t}\tilde{H}(y)\,dy$$

を得る．$u(t,x)$ が $U(x;r,t)$ の $r\to 0+$ の極限と一致するので，上の結果より，

$$u(t,x) = \lim_{r\to 0+}\frac{\tilde{U}(x;r,t)}{r} = \lim_{r\to 0+}\left[\frac{\tilde{G}(t+r)-\tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r}\tilde{H}(y)\,dy\right] = \tilde{G}'(t)+\tilde{H}(t).$$

$\tilde{G}, \tilde{H}$ の定義を思い出すと，

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial B(x,t)} g(y)\, dS(y) \right) + t \fint_{\partial B(x,t)} h(y)\, dS(y). \tag{6.6}$$

ここで，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\fint_{\partial B(x,t)} g(y)\, dS(y) \right) = \fint_{\partial B(0,1)} \nabla g(x+tz)\cdot z\, dS(z) = \fint_{\partial B(x,t)} \nabla g(y)\cdot \frac{y-x}{t}\, dS(y)$$

であるから，結局，

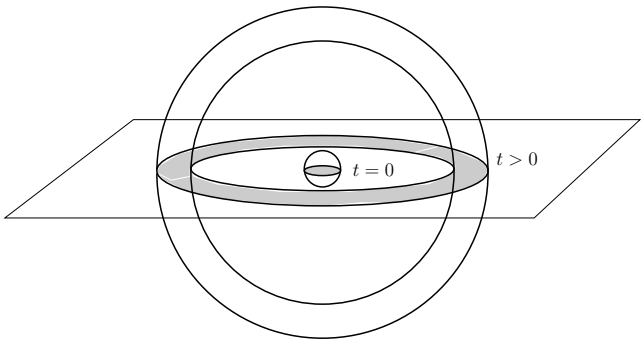
$$u(t,x) = \fint_{\partial B(x,t)} \Big[g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x) + t h(y) \Big]\, dS(y), \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^3. \tag{6.7}$$

この式を**キリヒホッフの公式**（Kirchhoff's formula）とよぶ.

注

- 解の正則性は $n=1$ の場合と比べて悪い．初期時刻で $u\in C^m$, $u_t\in C^{m-1}$ であっても，正の時刻では $u\in C^{m-1}$, $u_t\in C^{m-2}$ しかわからない．実際，初期時刻の特異性が「集中」し，より強い特異性を発生させるという現象が起こり得る（いわゆる focussing effect，$n=1$ の場合は起こらない，問題6.24も参照）．一方では，積分値の意味では解は悪くならない．実際，節6.6でわかるように，エネルギー
$$e(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left[u_t^2(t,x) + |\nabla u(t,x)|^2 \right]\, dx$$
は時間とともに一定である．

- キリヒホッフの公式より，点 (t,x) での解の依存領域は球面 $\partial B(x,t)$ である（ラプラシアンに係数 c^2 がついたときは $\partial B(x,ct)$ となる）．点 $(0,y)$ の影響領域は錐の面 $\{(t,x);\ |x-y|=ct\}$ となる．そのため，信号が「シャープに」伝わり，時間が経てばある点での摂動が完全になくなることがある（ホイヘンスの原理）．例えば，初期値 g,h の台が球 $B(0,\rho)$ に収まるとすると，時間が十分経てば，この球で解がゼロになり，解の台が二つの球面 $\partial B(0,\rho+ct)$ と $\partial B(0,-\rho+ct)$ の間に限られる．偶数次元における波動方程式や一般の双曲型方程式ではこのような現象が起こらず，ある点で発生して摂動はその点で永遠に残る．



初期値の台が小さな球の場合の解の台の広がり方

（$n=3$，灰色の部分は時刻 $t=0$ と $t>0$ における解の台の 2 次元断面を表す）

- 解の台が広がる一方，解が時間とともに $1/t$ のオーダーで減衰する（問題6.19）.

6.4.2 $n = 2$ の場合

2 次元の場合，Euler-Poisson-Darboux 方程式を 1 次元波動方程式に帰着させるような変換が存在しない．そこで，問題を 3 次元に上げて解き，得られた解の公式を 2 次元に落とす method of descent という方法を用いる．

$u \in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^2)$ が (6.1) の解であるとして，新しい関数 $\overline{u} \in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^3)$ を次で定義する：

$$\overline{u}(t,x_1,x_2,x_3) \coloneqq u(t,x_1,x_2).$$

同じように，$\overline{g}(t,x_1,x_2,x_3) \coloneqq g(t,x_1,x_2)$, $\overline{h}(t,x_1,x_2,x_3) \coloneqq h(t,x_1,x_2)$ とおくと，

$$\begin{aligned} \overline{u}_{tt} - \Delta\overline{u} &= 0 && \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^3 \\ \overline{u} = \overline{g},\ \ \overline{u}_t &= \overline{h} && \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

$x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \overline{x} = (x_1,x_2,0) \in \mathbb{R}^3$ という記号を導入すれば，キリヒホッフの公式 (6.6) より，

$$u(t,x) = \overline{u}(t,\overline{x}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t\fint_{\partial B(\overline{x},t)} \overline{g}(y)\,dS(y)\right) + t\fint_{\partial B(\overline{x},t)} \overline{h}(y)\,dS(y). \tag{6.8}$$

ただし，$B(\overline{x},t) = \{z\in\mathbb{R}^3;\ |z-\overline{x}| < t\}$. $\overline{g}$ が x_3 に依存しないので，右辺の最初の積分を

$$\fint_{\partial B(\overline{x},t)} \overline{g}(y)\,dS(y) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B(\overline{x},t)} \overline{g}(y)\,dS(y) = \frac{2}{4\pi t^2}\int_{B(x,t)} g(y)\sqrt{1+|\nabla\gamma(y)|^2}\,dy$$

と書き換えることができる．ここで，γ は中心 x，半径 t の球面の式，$\gamma(y) \coloneqq \sqrt{t^2-|x-y|^2}$, $y \in B(x,t)$ である．γ の微分を計算して整理すると，

$$\fint_{\partial B(\overline{x},t)} \overline{g}(y)\,dS(y) = \frac{t}{2}\fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,dy$$

となる．$\overline{h}$ に対して同じ計算をすれば，(6.8) が次の形になる：

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^2\fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,dy\right) + \frac{t^2}{2}\fint_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,dy.$$

ここで，右辺の t についての微分を

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(t^2\fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,dy\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(t\fint_{B(0,1)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}}\,dz\right) \\ &= \fint_{B(0,1)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}}\,dz + t\fint_{B(0,1)} \frac{\nabla g(x+tz)\cdot z}{\sqrt{1-|z|^2}}\,dz \\ &= t\fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,dy + t\fint_{B(x,t)} \frac{\nabla g(y)\cdot(y-x)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,dy \end{aligned}$$

と計算すれば，

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\fint_{B(x,t)} \frac{tg(y) + t\nabla g(y)\cdot(y-x) + t^2h(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,dy, \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^2 \tag{6.9}$$

という**ポアソンの公式**（Poisson's formula）が得られる．

注 2 次元の場合，(t,x) における解の値は初期値の円盤 $B(x,t)$ 全体での値に依存する．また，ある点 $x\in\mathbb{R}^2$ における初期値は錐 $\{(t,y);\ t>0,\ |x-y|<t\}$ 全体での解の値に影響を与える．よって，水面波のように，ある点で加えられた摂動の影響は先頭の波が通過してもいつまでも残る．

6.4.3 一般次元の場合

一般次元の解の公式の導出は上の考察と似ている．奇数次元ではうまく変換すれば半直線上の 1 次元波動方程式に帰着できるので，解の公式が得られる．一方では，偶数次元では method of descent を用いる．ここでは，結果だけ記す（詳細は [1], p.74 を参照）．

定理 6.6 (奇数次元における波動方程式の解) $n \in \mathbb{N}$ が 1 より大きい奇数として，$\gamma_n := 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (n-2)$ とおき，$m := \frac{n+1}{2}$ に対し $g \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$, $h \in C^m(\mathbb{R}^m)$ とする．そのとき，

$$u(t,x) = \frac{1}{\gamma_n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} g\,dS\right) + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} h\,dS\right)\right] \tag{6.10}$$

は次を満たす．

(1) $u \in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$,

(2) $u_{tt} - \Delta u = 0$ *in* $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$,

(3) すべての $x^0 \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\lim_{(t,x)\to(0,x^0),t>0,x\in\mathbb{R}^n} u(t,x) = g(x^0), \qquad \lim_{(t,x)\to(0,x^0),t>0,x\in\mathbb{R}^n} u_t(t,x) = h(x^0).$$

定理 6.7 (偶数次元における波動方程式の解) $n \in \mathbb{N}$ が偶数として，$\gamma_n := 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot n$ とおき，$m := \frac{n+2}{2}$ に対し $g \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$, $h \in C^m(\mathbb{R}^m)$ とする．そのとき，

$$\begin{aligned} u(t,x) = \frac{1}{\gamma_n}\Bigg[&\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^{n}\fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\,dy\right) \\ &+ \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^{n}\fint_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\,dy\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{6.11}$$

は次を満たす．

(1) $u \in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$,

(2) $u_{tt} - \Delta u = 0$ *in* $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$,

(3) すべての $x^0 \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\lim_{(t,x)\to(0,x^0),t>0,x\in\mathbb{R}^n} u(t,x) = g(x^0), \qquad \lim_{(t,x)\to(0,x^0),t>0,x\in\mathbb{R}^n} u_t(t,x) = h(x^0).$$

フーリエ変換による解法

フーリエ変換を用いた解法を簡単に説明する．ここで現れる積分が意味を持つためにどれだけのデータの正則性が必要かなどに関する考察を省略して，アイデアのみ形式的に紹介する．詳しい解析は [2], p.145 などを参照できる．

n-次元波動方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2\Delta u &= 0 && \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ u = 0,\ \ u_t &= h && \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R}^n \end{aligned}$$

を考える．コンパクトな台をもつ十分滑らかな関数 g のフーリエ変換は式

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} g(x)\,dx$$

で定義される．ただし，$i=\sqrt{-1}$，$x\cdot\xi = x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n$ はベクトルの内積である．x,ξ,g が実数値に制限するが，$\widehat{g}$ は一般には複素関数である．

逆変換は

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\,\widehat{g}(x)\,dx$$

となるが，次に導く微分の式より，この逆変換が $g\in C_0^s(\mathbb{R}^n)$, $s>n$ のときに正しいことがわかる．

g の微分のフーリエ変換を計算する：

$$\widehat{\partial_{x_k} g}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\frac{\partial}{\partial x_k}g(x)\,dx = -\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_k}e^{-ix\cdot\xi}g(x)\,dx = i\xi_k\widehat{g}(\xi).$$

この計算を繰り返せば，

$$\widehat{D^\alpha g} = (i\xi)^\alpha\,\widehat{g}$$

という公式が任意の多重指数 α について得られる．

g の微分が $\widehat{g}$ の $i\xi$ との積に変換されることを用いて，全空間での線形な偏微分方程式が簡単に解ける．波動方程式の場合，初期値問題を空間変数についてフーリエ変換すると，

$$\begin{aligned} \widehat{u}_{tt}(t,\xi) + c^2|\xi|^2\widehat{u}(t,\xi) &= 0 && \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ \widehat{u}(0,\xi) = 0,\ \ \widehat{u}_t(0,\xi) &= \widehat{h}(\xi) && \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R}^n \end{aligned}$$

という常微分方程式に関する初期値問題に帰着される．この解は

$$\widehat{u}(t,\xi) = \frac{\sin(c|\xi|t)}{c|\xi|}\widehat{h}(\xi)$$

であるから，逆変換の式を適用して形式的に

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\frac{\sin(c|\xi|t)}{c|\xi|}\widehat{h}(x)\,dx$$

という解の公式を得る．$h\in C_0^{n+3}(\mathbb{R}^n)$ であれば，これで与えられる u が波動方程式の初期値問題の解であることが確かめられる．

> 以上の解法では初期値 h を指数関数 $e^{ix\cdot\xi}$ に分解して解を求めたが，より一般的な plane wave に分解する方法の方が自然な場合もある．[2], p.158

6.5 非斉次問題

非斉次方程式に対する初期値問題

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f && \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ u = 0,\ \ u_t &= 0 && \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R}^n \end{aligned}$$

を考える．Duhamel の原理を適用する．すなわち，$s>0$ に対する問題

$$\begin{aligned} u_{tt}(\cdot;s) - \Delta u(\cdot;s) &= 0 && \text{in } (s,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ u(\cdot;s) = 0,\ \ u_t(\cdot;s) &= f(\cdot,s) && \text{on } \{t=s\}\times\mathbb{R}^n \end{aligned}$$

の解を $u(t,x;s)$ として，

$$u(t,x) = \int_0^t u(t,x;s)\,ds, \qquad t\ge 0,\ x\in\mathbb{R}^n \tag{6.12}$$

とおく．この関数が上の初期値問題の解であることを示す．

定理 6.8 $n\ge 2$ に対し $f\in C^{[n/2]+1}([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ であるとする．そのとき，*(6.12)* で定義される u は次を満たす．

(1) $u\in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$,

(2) $u_{tt}-\Delta u = f$ *in* $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$,

(3) すべての $x^0\in\mathbb{R}^n$ に対し

$$\lim_{(t,x)\to(0,x^0),t>0,x\in\mathbb{R}^n} u(t,x) = 0, \qquad \lim_{(t,x)\to(0,x^0),t>0,x\in\mathbb{R}^n} u_t(t,x) = 0.$$

証明

n が奇数なら，$[n/2]+1 = \frac{n+1}{2}$ となるので，定理6.6によりすべての $s\ge 0$ に対して $u(\cdot;s)\in C^2([s,\infty)\times\mathbb{R}^n)$．よって，$u\in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$. n が偶数のときは定理6.7を用いる．
方程式が満たされることを確認するために，u の微分を計算する．

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= u(t,x;t) + \int_0^t u_t(t,x;s)\,ds = \int_0^t u_t(t,x;s)\,ds \\ u_{tt}(t,x) &= u_t(t,x;t) + \int_0^t u_{tt}(t,x;s)\,ds = f(t,x) + \int_0^t u_{tt}(t,x;s)\,ds \\ \Delta u(t,x) &= \int_0^t \Delta u(t,x;s)\,ds = \int_0^t u_{tt}(t,x;s)\,ds \end{aligned}$$

より u が $u_{tt}-\Delta u = f$ の解であることがすぐに従う．また，$u(0,x)=u_t(0,x)=0$, $x\in\mathbb{R}^n$ も明らかである． □

例

$n=1$ のとき，ダランベールの公式より

$$u(t,x;s)=\frac{1}{2}\int_{x-t+s}^{x+t-s} f(s,y)\,dy.$$

よって，

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+s}^{x+t-s} f(s,y)\,dy, \qquad t\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^n.$$

$n=3$ のとき，キリヒホッフの公式より

$$u(t,x;s)=(t-s)\fint_{\partial B(x,t-s)} f(s,y)\,dS(y).$$

よって，

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_0^t (t-s)\left(\fint_{\partial B(x,t-s)} f(s,y)\,dS(y)\right)ds \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_{\partial B(x,t-s)}\frac{f(s,y)}{t-s}\,dS(y)\,ds = \frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_{\partial B(x,r)}\frac{f(t-r,y)}{r}\,dS(y)\,dr \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{B(x,t)}\frac{f(t-|y-x|,y)}{|y-x|}\,dy, \qquad t\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

最後の被積分関数を電磁気学では遅延ポテンシャル（retarded potential）とよぶ.

> 一般の曲面 S に対するコーシー問題の解き方については [2], p.136 で書かれている．解が存在するには，非特性条件のほかに，曲面 S が spacelike であるという条件が必要になる．

6.6 エネルギー法

波動方程式の場合も付随するエネルギーを基にした考察から解の様々な性質がわかる．ここでは，初期値境界値問題の解の一意性と有限伝播速度を例として挙げる．

定理 6.9 (波動方程式の解の一意性) $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を滑らかな境界を持つ有界領域とし，$\Omega_T:=(0,T]\times\Omega$, $\Gamma_T:=\overline{\Omega}_T\setminus\Omega_T$ とする．そのとき，

$$\begin{aligned} u_{tt}-\Delta u &= f && \text{in } \Omega_T \\ u &= g && \text{on } \Gamma_T \\ u_t &= h && \text{on } \{t=0\}\times\Omega \end{aligned}$$

を満たす $C^2(\overline{\Omega}_T)$-関数は高々一つ存在する．

証明

解が $u, \tilde{u}$ と二つあると仮定すると，$w := u - \tilde{u}$ は次の条件を満たす：

$$\begin{aligned} w_{tt} - \Delta w &= 0 && \text{in } \Omega_T \\ w &= 0 && \text{on } \Gamma_T \\ w_t &= 0 && \text{on } \{t = 0\} \times \Omega. \end{aligned}$$

エネルギー汎関数を

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_\Omega \left[w_t^2(t,x) + |\nabla w(t,x)|^2 \right] \, dx, \qquad t \in [0,T]$$

で定義すれば，e の時間微分は

$$e'(t) = \int_\Omega \left[w_t w_{tt} + \nabla w \cdot \nabla w_t \right] \, dx = \int_\Omega w_t (w_{tt} - \Delta w) \, dx = 0$$

と計算される．境界条件 $w = 0$ on Γ_T より $w_t = 0$ on $[0,T] \times \partial\Omega$ が成り立つから，上の計算では境界積分が出てこない．
$t \in [0,T]$ に対して $e(t) = e(0) = 0$ が従うので，$w_t \equiv 0$, $\nabla w \equiv 0$ を得る．しかし，w が初期時刻において恒等的にゼロとなっているから，$w \equiv 0$ in Ω_T. □

定理 6.10 (有限な伝播速度) $u \in C^2((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ が波動方程式 $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ を $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ において満たすとする．もしある $t_0 > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$u(0,x) \equiv u_t(0,x) \equiv 0 \qquad \textit{for } x \in B(x_0, ct_0)$$

ならば，

$$u \equiv 0 \qquad \textit{in } \mathcal{C} := \{(t,x);\ t \in [0,t_0],\ |x - x_0| \le c(t_0 - t)\}.$$

したがって，$B(x_0,t_0)$ の外側で起こされる摂動は $\mathcal{C}$ における解の値に影響がなく，情報の伝播速度が有限である．

証明

この事実をすでに定理6.6,6.7の公式をもって示したが，ここではエネルギーを用いたより簡単な証明を紹介する．

$$e(t) \coloneqq \frac{1}{2}\int_{B(x_0,c(t_0-t))} \left[u_t^2(t,x) + c^2|\nabla u(t,x)|^2\right]\, dx, \qquad t \in [0,t_0]$$

とすれば，

$$\begin{aligned} e'(t) &= \int_{B(x_0,c(t_0-t))} \left[u_t u_{tt} + c^2 \nabla u \cdot \nabla u_t\right]\, dx - \frac{c}{2}\int_{\partial B(x_0,c(t_0-t))} \left[u_t^2 + c^2|\nabla u|^2\right]\, dS \\ &= \int_{B(x_0,c(t_0-t))} u_t(u_{tt} - c^2\Delta u)\, dx + c^2 \int_{\partial B(x_0,c(t_0-t))} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t\, dS \\ &\qquad\qquad -\frac{c}{2}\int_{\partial B(x_0,c(t_0-t))} \left[u_t^2 + c^2|\nabla u|^2\right]\, dS \\ &= c\int_{\partial B(x_0,c(t_0-t))} \left[c\frac{\partial u}{\partial \nu} u_t - \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{c^2}{2}|\nabla u|^2\right] dS \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz の不等式とヤングの不等式（$ab \le \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2,\ \varepsilon > 0$）を用いて，

$$c\left|\frac{\partial u}{\partial \nu} u_t\right| \le c|\nabla u|\,|u_t| \le \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{c^2}{2}|\nabla u|^2$$

を得るので，$e'(t) \le 0$，すなわち $e(t) \le e(0) = 0, t \in [0,t_0]$ が従う．よって，$\mathcal{C}$ において，$u_t \equiv 0$，$\nabla u \equiv 0$，初期条件を考慮して $u \equiv 0$ が成り立つ． □

6.7 演習問題

問題 6.17 電場 $\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3)$ と磁場 $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$ がマクスウェル方程式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_t &= \operatorname{curl} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}_t &= -\operatorname{curl} \boldsymbol{E} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} &= \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0 \end{aligned}$$

を満たすとき，$u = E_i$ および $u = B_i, i = 1,2,3$ が $u_{tt} - \Delta u = 0$ を満たすことを示せ．

問題 6.18 ([1], p.88) $u \in C^2((0,\infty)\times\mathbb{R})$ が 1 次元波動方程式に対する初期値問題

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R} \\ u = g,\ \ u_t &= h && \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R} \end{aligned}$$

の解であるとする．ただし，g, h の台がコンパクトである．運動エネルギー $k(t)$ とポテンシャルエネルギー $p(t)$ を

$$k(t) \coloneqq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(t,x)\, dx, \qquad p(t) \coloneqq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t,x)\, dx$$

で定義したとき，次のことを示せ．

(1) $k(t) + p(t)$ が t に依らない，

(2) t_0 が存在し，$k(t) = p(t)\ \ \forall t > t_0$.

問題 6.19 ([1], p.89) g, h をコンパクトな台をもつ滑らかな関数とし，u が

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 && \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^3 \\ u = g,\ \ u_t &= h && \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

の解であるとする．そのとき，定数 C が存在し，

$$|u(t,x)| \le \frac{C}{t}, \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^3$$

が成り立つことを示せ．

問題 6.20 ([2], p.46) $Lu := u_{tt} - c^2 u_{xx}$ と定義すると，u, v が十分滑らかならば，$Lu = 0, Lv = 0$ より $L(u_t v_t + c^2 u_x v_x) = 0$ が従うことを示せ．
また，$Lu = Lv = 0$ for $(t,x)\in(0,\infty)\times(a,b)$，そして $u(t,a) = u(t,b) = v(t,a) = v(t,b) = 0$ ならば，

$$\frac{d}{dt}\int_a^b (u_t v_t + c^2 u_x v_x)\,dx = 0$$

が成り立つことを示せ．

問題 6.21 ([2], p.46) 初期値境界値問題

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 && t>0,\ x\in(0,l) \\ &u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x) && x\in(0,l) \\ &u(t,0) = u(t,l) = 0 && t>0 \end{aligned}$$

の解をフーリエ級数

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

の形で書いたとき，解のエネルギー

$$e(t) := \frac{1}{2}\int_0^l (u_t^2(t,x) + u_x^2(t,x))\,dx$$

をフーリエ係数 a_n, b_n を用いて表せ．

問題 6.22 ([2], p.46) 両端を 0 の高さで固定された弦を

$$u(0,x) = \frac{\pi}{2} - \left|\frac{\pi}{2} - x\right|, \qquad u_t(0,x) = 0 \qquad \text{for } x\in(0,\pi)$$

のように弾いたときの運動をフーリエ級数を用いて求め，そのエネルギーを計算せよ．

問題 6.23 ([2], p.46) $f, g, h \in C^2([0,\infty))$ が

$$\alpha(0) = g(0), \qquad \alpha'(0) = h(0), \qquad \alpha''(0) = c^2 g''(0)$$

を満たすとする．半直線上の初期値境界値問題

$$\begin{aligned} u_{tt}(t,x) - c^2 u_{xx}(t,x) &= 0 && t>0,\ x>0 \\ u(0,x) = g(x),\ \ u_t(0,x) &= h(x) && x>0 \\ u(t,0) &= \alpha(t) && t>0 \end{aligned}$$

の解を求め，C^2-級であることを確かめよ．

問題 6.24 ([2], p.132) (1) $n=3$ のとき，波動方程式 $u_{tt}-c^2\Delta u=0$ の原点に対して対称な解 u は，関数 A, B が存在し，

$$u(t,x)=\frac{A(r+ct)+G(r-ct)}{r}, \qquad r:=|x|$$

の形で書けることを示せ．

(2) g を偶関数とした初期条件

$$u(0,x)=0, \qquad u_t(0,x)=g(r)$$

を満たす解が次で与えられることを確かめよ：

$$u(t,x)=\frac{1}{2c|x|}\int_{|x|-ct}^{|x|+ct}\rho g(\rho)\,d\rho.$$

(3) (2) の g を

$$g(r)=\begin{cases}1, & \text{for } r\in[0,a]\\ 0, & \text{for } r>a\end{cases}$$

としたとき，解 u を具体的に求め，u_t の $t=0, |x|=a$ における不連続性が集中して u 自身が点 $(0,a/c)$ において不連続になることを確認せよ．

問題 6.25 ([2], p.132) $n=5$ のとき，波動方程式の解 u の球面上の平均 $U(x;r,t)$ に対して定義される関数

$$N(x;r,t):=r^2U_r(x;r,t)+3rU(x;r,t)$$

が 1 次元の波動方程式を満たすことを確かめ，適切な初期条件を満たす u を極限

$$u(t,x)=\lim_{r\to 0+}\frac{N(x;r,t)}{3r}$$

として求めよ．

問題 6.26 ([2], p.133) $n=3$ において弾性波の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_1^2\Delta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_2^2\Delta\right)u(t,x)=0$$

を考える．ただし，$c_1, c_2>0$ は異なる定数である．

(1) 方程式の解 u の球面上の平均 $U(x;r,t)$ が

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_1^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_2^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)(rU(x;r,t))=0$$

を満たすことを示せ．

(2) (1) の方程式の解 rU が

$$A_1(r+c_1)+A_2(r-c_1t)+B_1(r+c_2t)+B_2(r-c_2t)$$

の形をもつことを示せ．

(3) (1) と (2) を用いて，弾性波方程式の初期値問題を解け.

問題 6.27 ([2], p.133) 次元 $n = 3$ において，$u \in C^2$ が $u_{tt} - c^2\Delta u = 0$ を $t > 0, x \in \mathbb{R}^3$ で満たすとする．さらに,

$$U(t) = \sum_{|\alpha|\le 2} \int_{\mathbb{R}^3} |D^\alpha u(t,x)|\, dx < \infty \qquad \text{for } t = 0$$

が成り立つことを仮定する.

(1) u によらない定数 K が存在し,

$$|u(t,x)| \le \frac{K}{t} U(0), \qquad t > 0$$

が成り立つことを示せ.（ヒント：解の公式の積分を球 $\{x \in \mathbb{R}^3;\ |x-y| < ct\}$ に変換する.）

(2) もし

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = 0$$

が成り立つならば，u が恒等的にゼロ関数になることを示せ.（ヒント：(1) を $v(t,x,T) \coloneqq u(T-t,x)$ という関数に適用する.）

問題 6.28 ([2], p.135) （1 次元）電信方程式に対する初期値問題

$$u_{tt} = c^2 u_{x_1x_1} - c^2\lambda^2 u$$
$$u(0,x_1) = 0, \quad u_t(0,x_1) = \psi(x_1)$$

の解が

$$u(t,x) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} J_0\Big(\lambda(c^2t^2 - (x-y)^2)\Big)\psi(y)\, dy$$

で与えられることを示せ．ここで,

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(z\sin\theta)\, d\theta$$

はベッセル関数である.
（ヒント：Method of descent を適用し，関数 $\cos(\lambda x_2)u(t,x_1)$ が満たす 2 次元波動方程式に対する解の公式を用いる.）

References

[1] L. C. Evans: Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.

[2] F. John: Partial Differential Equations, Springer, 1982.

修正リスト：

1. 7 月 3 日：補題6.5のあとの計算で,「3 行目の式は (6.2) で $r \to 0+$ とすることで得られる」の式番号を修正.
2. 7 月 3 日：上の項目のすぐ下の $\tilde{U}$ の式における $\tilde{G}(r-t)$ を $\tilde{G}(t-r)$ に修正.
3. 7 月 3 日：定理6.10の証明で，$e(t)$ の定義の積分範囲を $B(x_0, c(t_0-t))$ に修正.

7 広義解について

概要
この講義では偏微分方程式を解く関数空間を広げることにより，解の存在をより簡単に証明する方法のアイデアを紹介する．解の入る空間を広げることで解の正則性が下がってしまうが，解が実際には滑らかであることを示す正則性理論の基礎についても触れる．

7.1 弱解のアイデア

広義解（弱解）のアイデアを説明するには次のポアソン方程式に対する境界値問題を考える：

$$-\Delta u(x) = f(x) \qquad \text{for } x \in \Omega, \tag{7.1}$$

$$u(x) = 0 \qquad \text{for } x \in \partial\Omega. \tag{7.2}$$

これから，この問題に対しいわゆる**弱形式**を導出する．基本的には 2 種類の解を考えることができる：

- **古典解**： Ω 上で (7.1) をみたし，$\partial\Omega$ 上で (7.2) をみたす関数 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ のことである．
  しかし，実際の現象では解がそれほど滑らかでないことがよくある（例えば，飛行機が飛ぶときに空気の流れに衝撃波が生じ，圧力や速度がジャンプする）．このような場合に対処するには，より広い関数クラスで解を探さなければならない．

- **弱解（広義解）**：弱い方程式はテスト関数（試験関数）$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ を方程式 (7.1) にかけて，Ω 上で積分し，一部の微分をテスト関数に移すことにより得られる． このようにして，古典解ほど滑らかでなくてもよい解が定義できる．

以上の手順を実際に行ってみよう．

1. 方程式にテスト関数 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$（付録 1 を参照）をかけて，$\Omega$ 上で積分する：

$$-\Delta u = f \qquad \Rightarrow \qquad \int_\Omega -\Delta u \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx$$

2. グリーンの定理を使って，一つの微分をテスト関数に移す：

$$\int_\Omega -\Delta u \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \qquad \Rightarrow \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \varphi \, dS = \int_\Omega f \varphi \, dx$$

   関数 φ の境界 $\partial\Omega$ 上の値が零であるから，境界積分が消え，

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \qquad \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

   が得られる．

定義 7.1 (弱解) 問題 *(7.1),(7.2)* の**弱解**は次の関係式を満たす関数 $u \in H_0^1(\Omega)$ である：

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{7.3}$$

ここで $H_0^1(\Omega)$ という新しい空間が出てきたが，これはあとで説明するソボレフ空間である．

新しい定義式 (7.3) は次のような利点がある：

- 一つの微分がテスト関数に移され，新しい式では u の 1 階微分しか出てこないので，弱解は 1 階微分があれば十分である．
- u とその 1 階微分は連続でなくてもかまわない．つまり，式を領域全体で積分しているので，弱解とその微分は各点で定義される関数でなくても，可積関数であれば十分である．
- 弱形式は数値計算のスキームを作るときの出発点となる（例えば，有限要素法）．

この利点を活かして，解を求める関数空間を C^2 関数より大きい空間に広げる．このような設定に最も適している空間はソボレフ空間である．以下はソボレフ空間について簡単に説明する．

7.2 ソボレフ空間

まずは，L^p 空間について復習しておく．
$1 \le p \le \infty$, 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ と可測な関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ に対し，

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \coloneqq \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p \, dx\right)^{1/p} & \text{if } 1 \le p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f| & \text{if } p = \infty \end{cases}$$

というノルムを定義する．$L^p(\Omega)$ は以下のように定義される線形空間（付録 2 を参照）である：

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \,; \quad \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$$

ほとんどいたるところで等しくなる関数を同一視すれば，$L^p(\Omega)$ はバナッハ空間（付録 3 を参照）になる．

補題 7.2 (Hölder 不等式) $1 \le p, q \le \infty$ を $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすように任意に選ぶ．そのとき，$u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega)$ に対し次が成り立つ：

$$\int_\Omega |uv| \, dx \le \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

例

- 領域 Ω が有界ならば，$p > 0$ に対して任意の連続な関数 f が $L^p(\Omega)$ に入る：

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p \, dx\right)^{1/p} \le \left(\max_{x\in\Omega} |f|^p \int_\Omega 1 \, dx\right)^{1/p} = \max_{x\in\Omega} |f| \cdot |\Omega|^{1/p}$$

- 領域 Ω が有界でなければ，連続関数 f が $L^p(\Omega)$ に入るとは限らないが，関数が無限遠方で十分速く減衰すれば $L^p(\Omega)$ に属する．例えば，$f(x) = x^{-1}$ という関数は $L^2(1,\infty)$ に属するが，$L^1(1,\infty)$ に属しない：

$$\|x^{-1}\|_{L^2(1,\infty)} = \Big(\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx\Big)^{1/2} = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^\infty = 1$$
$$\|x^{-1}\|_{L^1(1,\infty)} = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_1^\infty = \infty$$

- 無限大に発散しているが L^p 空間に属する関数もある．例えば，関数 $f(x) = 1/\sqrt{x}$ は $L^1(0,1)$ に入る：

$$\|1/\sqrt{x}\|_{L^1(0,1)} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \big[2\sqrt{x}\big]_0^1 = 2.$$

ソボレフ空間は微分が L^p-空間に属するような関数の空間である．このとき，微分が各点で定義される連続な関数でなくても，その L^p-ノルムが意味をもつので，微分の概念もいわゆる「弱微分」へ拡張する．

弱微分の定義は関数 $u \in C^1(\Omega)$ とテスト関数 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して成り立つ以下の部分積分の公式に動機づけられる：

$$\int_\Omega u\varphi_{x_i}\,dx = -\int_\Omega u_{x_i}\varphi, \qquad i = 1,\dots,n.$$

φ が Ω の中にコンパクトな台を持ち，境界 $\partial\Omega$ の近傍で恒等的にゼロであるから，境界上の積分は現れない．ここで，上式の左辺が $L^1(\Omega)$ に属する関数 u に対しても意味をもつことに注意しよう．この事実を利用した弱微分の定義は以下のようになる．

定義 7.3 (弱微分) $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$，$\alpha$ を多重指数とする．全てのテスト関数 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi\,dx$$

が成り立つとき，v が u の D^α-弱（偏）微分であるといい，$v = D^\alpha u$ と書く．（そのような関数 $v \in L^1(\Omega)$ が存在しなければ，u が弱偏微分を持たないことになる．）

補題 7.4 弱微分は存在するとき，測度ゼロの集合を除いて一意に決まる．

証明

> $v, \tilde{v} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ が
>
> $$\int_\Omega uD^\alpha\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \tilde{v}\varphi\,dx \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$
>
> を満たすとすると，
>
> $$\int_\Omega (v-\tilde{v})\varphi\,dx = 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$
>
> が成り立つので，$v - \tilde{v} = 0$ a.e. in Ω が従う． □

例 $n = 1$, $\Omega = (0, 2)$ とし，関数

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{if } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

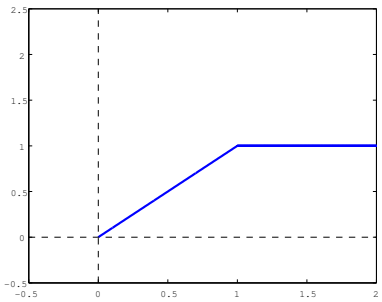
を考える．この関数の弱微分は

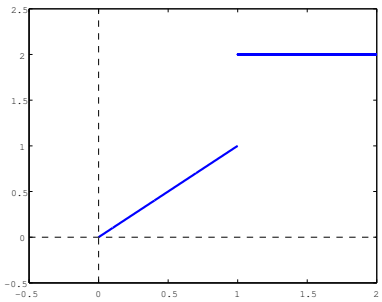
$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{if } 1 < x < 2 \end{cases}$$

となる．

それを確かめるために，次のように計算すればよい：

$$\int_0^2 u\varphi' \, dx = \int_0^1 x\varphi' \, dx + \int_1^2 \varphi' \, dx = -\int_0^1 \varphi \, dx + \varphi(1) - \varphi(1) = -\int_0^2 v\varphi \, dx.$$





例 今度は関数 u を以下のように定義する．

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 < x \leq 1 \\ 2 & \text{if } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

この場合は，u' は弱い意味でも存在しない．

ソボレフ空間 $W^{1,p}(\Omega)$ を定義するための準備ができた．リプシッツ連続な境界をもつ有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ のみ考える．実際の問題を考える場合，これは十分広いクラスである．

定義 7.5 (ソボレフ空間) ソボレフ空間 $W^{1,p}(\Omega)$ は，次の性質を満たす関数 u からなる空間である．$u : \Omega \to \mathbb{R}$ は局所可積関数で，その弱微分 u_{x_i} が $n = 1, \ldots, n$ に対し存在し，u と u_{x_i} がともに $L^p(\Omega)$ に属するものである．

$p = 2$ の場合，$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ という記号を用いることが多い．

$W^{1,p}(\Omega)$ のノルムは次のように定義される：

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_\Omega (|u|^p + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^p) \, dx\right)^{1/p} & (1 \leq \infty) \\ ess\ sup_\Omega |u| + \sum_{i=1}^n ess\ sup_\Omega |u_{x_i}| & (p = \infty) \end{cases}$$

注 高階のソボレフ空間 $W^{k,p}(\Omega)$ は k-階までのすべての微分が $L^p(\Omega)$ に属するような関数の空間として定義される．

補題 7.6 $1 \le p \le \infty$ に対しソボレフ空間 $W^{1,p}(\Omega)$ はバナッハ空間である．

証明

まず，$\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ がノルムであることを確かめる．三角不等式以外は簡単であるから，ミンコフスキー不等式

$$f, g \in L^p(\Omega) \qquad \Rightarrow \qquad \|f+g\|_{L^p(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}$$

を用いて三角不等式のみ示す：

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{W^{1,p}(\Omega)} &= \left(\|u+v\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i} + v_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \\
&\le \left(\left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}\right)^p + \sum_{i=1}^n \left(\|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)} + \|v_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}\right)^p \right)^{1/p} \\
&\le \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} + \left(\|v\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

最後の不等式ではミンコフスキー不等式の離散版

$$\left(\sum_{k=1}^N |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^N |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^N |b_k|^p \right)^{1/p}$$

を用いた．
次に $W^{1,p}(\Omega)$ の完備性を示す．$\{u_m\}$ を $W^{1,p}(\Omega)$ のコーシー列とすると，$\{u_m\}$ と $\{(u_m)_{x_i}\}$ が $L^p(\Omega)$ のコーシー列になる．$L^p(\Omega)$ は完備であるので，関数 $u, u^1, u^2, \dots, u^n \in L^p(\Omega)$ が存在し，

$$u_m \to u, \quad (u_m)_{x_i} \to u^i, \quad i = 1, 2, \dots, n \qquad \text{in } L^p(\Omega).$$

あとは，$u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u_{x_i} = u^i$ を示せばよい．$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して，

$$\int_\Omega u\varphi_{x_i}\,dx = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m \varphi_{x_i}\,dx = -\lim_{m\to\infty} \int_\Omega (u_m)_{x_i}\varphi\,dx = -\int_\Omega u^i\varphi\,dx.$$

よって，u^i は u の x_i についての弱微分であり，$(u_m)_{x_i} \to u_{x_i}$ in $L^p(\Omega)$ が成り立つ．すなわち，$u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. □

注 (H^1 空間について)

- 空間 $H^1(\Omega)$ はヒルベルト空間（付録 4）で，内積は以下のように与えられる：

$$(f, g) \coloneqq \int_\Omega (fg + \nabla f \cdot \nabla g)\,dx.$$

- 次の関係が成り立つ

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

- 上の関係より $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ が得られる．

- 1 変数（1 次元）の場合，H^1-関数は $\frac{1}{2}$-ヘルダー連続である．これはヘルダー不等式を用いて示される．$\Omega = (0,1)$ として，$y, z \in \Omega$ ならば，

$$|v(z) - v(y)| = \Big| \int_y^z v'(x)\,dx \Big| \le |z-y|^{1/2} \Big(\int_y^z |v'(x)|^2\,dx \Big)^{1/2} \le \|v\|_{H^1(0,1)} |z-y|^{1/2}.$$

例 $\Omega = B(0,1)$ を原点を中心とする $\mathbb{R}^3$ の単位球とする．そのとき，関数

$$u(x) = |x|^{-1/4} \qquad (x \neq 0)$$

は $H^1(\Omega)$ に属する．(u は連続ではないことに注意！)

これを示すには，形式的に偏微分を計算する：

$$u_{x_i}(x) = \frac{-x_i}{4|x|^{9/4}}, \qquad x \neq 0. \tag{7.4}$$

従って，

$$|\nabla u(x)| = \frac{1}{4|x|^{5/4}}, \qquad x \neq 0.$$

関数が原点で発散するので，原点のまわりの半径 ϵ の小さなボールをくり抜いて $\epsilon \to 0$ とすることによって，弱微分の存在を示す．グリーンの定理を使って，

$$\int_{\Omega \setminus B(0,\epsilon)} u\varphi_{x_i}\,dx = -\int_{\Omega\setminus B(0,\epsilon)} u_{x_i}\varphi\,dx + \int_{\partial B(0,\epsilon)} u\varphi n_i\,dS,$$

ここで，$n = (n_1, n_2, n_3)$ は $B(0,\epsilon)$ の内向き単位法線ベクトルである（すなわち，$n_i = -x_i/|x|$）．境界上の積分は ϵ が小さくなれば，0 に近づく：

$$\left| \int_{\partial B(0,\epsilon)} u\varphi n_i\,dS \right| \le \max_{\Omega} |\varphi| \int_{\partial B(0,\epsilon)} \epsilon^{-1/4}\,dS \le C\epsilon^{2-1/4} \to 0, \qquad \text{as } \epsilon \to 0.$$

よって，(7.4) で定義される関数は u の弱微分である．さらに，

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx &= \frac{1}{16}\int_\Omega |x|^{-5/2}\,dx = \frac{1}{16}\int_0^1 \int_{\partial B(0,\rho)} \rho^{-5/2}\,dS\,d\rho \\ &= \frac{1}{16}\int_0^1 4\pi\rho^2\rho^{-5/2}\,d\rho = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \rho^{-1/2}\,d\rho = \frac{\pi}{2} < \infty. \end{aligned}$$

同様に，$\int_\Omega u^2\,dx = 8\pi/5 < \infty$ と計算できるので，$u \in H^1(\Omega)$ とわかる． ■

境界値問題では (7.2) のような境界条件がつくので，ソボレフ空間のなかで解を求めるなら，ソボレフ空間に属する関数の境界値に意味を持たせる必要がある．

$W_0^{1,p}(\Omega)$ は $C_0^\infty(\Omega)$ の $W^{1,p}(\Omega)$ における閉包を表す記号である．それは，$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ であれば，関数列 $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ が存在し，$W^{1,p}(\Omega)$ のノルムで $u_m \to u$ が成り立つことを意味する．$p = 2$ の場合，$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ と書くことが普通である．

$H_0^1(\Omega)$ を Ω の境界上でゼロになるような $H^1(\Omega)$ - 関数として捉えることができる．$H^1(\Omega)$ の関数は測度ゼロの集合での値を好きに変えても同じ関数であり，境界の測度がゼロであるという

ことから，上の「境界上でゼロになる」という発言は意味がない．しかし，トレース・オペレータを導入することにより，H^1-関数に対しある種の境界値が定義できることがわかるので，この発言通りに考えても差し支えない．この境界値のことを**トレース（跡）**とよぶ．

定理 7.7 (トレースの定理) リプシッツ領域 Ω に対し次の条件を満たす有界線形作用素 $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ がただ一つ存在する：

$$\gamma v = v\Big|_{\partial\Omega} \qquad \forall v \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

証明は [2], p.258 を参照.

そこで，以下の定理により，空間 $H_0^1(\Omega)$ を次のように定義することができる：

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega)\,;\ \gamma v = 0 \ \text{ on } \partial\Omega\}.$$

定理 7.8 (0 のトレース) Ω を C^1-級の境界をもつ有界領域とする．$v \in W^{1,p}(\Omega)$ ならば，

$$v \in W_0^{1,p}(\Omega) \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma v = 0 \ \textit{ on } \partial\Omega$$

が成立する．

証明は [2], p.259 を参照.

命題 7.9 (Friedrichs 不等式，またはポアンカレ不等式) 領域 Ω がリプシッツ境界をもつとする．そのとき，定数 C_F が存在し，

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \le C_F |v|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

が成り立つ．ここで，$|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ は以下のように定義される半ノルムである：

$$|v|_{H^1(\Omega)} \coloneqq \Big(\int_\Omega |\nabla v|^2\Big)^{1/2}. \qquad \blacksquare$$

（v の境界上のトレースが零であるということは重要である！）

Friedrichs 不等式は，$H^1(\Omega)$ のノルムと半ノルムが $H_0^1(\Omega)$ の関数に対し同等であることを言っている．つまり，定数 $c > 0$ が存在し，

$$c\|v\|_{H^1(\Omega)} \le |v|_{H^1(\Omega)} \le \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

ソボレフ空間の基本的な性質は [2], p.247–289 または [3], p.144–173 で紹介されている．詳しい性質は [1] を参照するとよい.

7.3 弱解の存在と一意性

ポアソン方程式などの偏微分方程式に対する境界値問題の古典解の存在を示すことが簡単ではない（以前に，領域が球の場合のみ示した）．しかし，弱解の存在は Lax-Milgram の定理という一般的な結果を適用するだけで容易に証明できる．この定理は与えられた双一次形式 a と有界線形汎関数 F に対する $a(u,\cdot) = F(\cdot)$ という方程式の解の存在を保証するものである．**双一次形式**とは空間 H に対し $H \times H$ 上で定義された写像 $a(\cdot,\cdot)$ で，固定した任意の $v \in H$ に対し $a(v,\cdot)$ と $a(\cdot,v)$ が線形写像であるような写像である．

定理 7.10 (Lax-Milgram の定理) H をヒルベルト空間とする．双一次形式 $a : H \times H \to \mathbb{R}$ は，$\alpha, \beta > 0$ が存在し以下の 2 つの条件を満たすものであるとする：

$$\text{(連続性)} \qquad |a(u,v)| \leq \alpha \|u\| \, \|v\| \qquad \forall u, v \in H \tag{7.5}$$

$$\text{(強圧性)} \qquad a(u,u) \geq \beta \|u\|^2 \qquad \forall u \in H \tag{7.6}$$

そのとき，任意の有界な線形汎関数 $F : H \to \mathbb{R}$（付録 5 を参照）に対し，

$$a(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in H \tag{7.7}$$

を満たす $u \in H$ がただ一つ存在する．

証明

$u \in H$ を固定すれば，$v \mapsto a(u,v)$ という写像は H 上の有界線形作用素である．よって，リースの定理（付録 5）を適用すると，H の元 w が存在し，$a(u,v) = (w,v)$ がすべての $v \in H$ について成り立つことがわかる．w は u に依存するので，$w = Au$ と表記する：

$$a(u,v) = (Au, v) \qquad u, v \in H. \tag{7.8}$$

$A : H \to H$ が有界線形作用素であることを示す．(7.8) と $a(\cdot,v)$ の線形性を使って，

$$(A(a_1u_1 + a_2u_2), v) = (a_1Au_1 + a_2Au_2, v) \qquad \forall v \in H$$

が簡単に得られる．上の式がすべての $v \in H$ について成り立つので，$A(a_1u_1 + a_2u_2) = a_1Au_1 + a_2Au_2$ が従う．また，

$$\|Au\|_H^2 = (Au, Au) = a(u, Au) \leq \alpha \|u\|_H \|Au\|_H$$

より，$\|Au\|_H \leq \alpha \|u\|_H, u \in H$，有界性を得る．

次に，A が全単射であることを示す．

$$\beta \|u\|_H^2 \leq a(u,u) = (Au, u) \leq \|Au\|_H \|u\|_H$$

より $\beta \|u\|_H \leq \|Au\|_H$ が従うので，A が単射であることがわかる．また，この不等式より A の値域 $R(A)$ が H の閉集合であることが従う（どのように？）ので，$R(A)^\perp$ を定義できる．もし，$R(A) \neq H$ なら，ゼロでない元 $w \in R(A)^\perp$ が存在する．しかし，これは $\beta \|w\|_H^2 \leq (Aw, w) = 0$ と矛盾するので，$R(A) = H$.

リースの定理より，汎関数 F に対し $f \in H$ が存在し，

$$F(v) = (f, v) \qquad v \in H$$

と書ける．A が全単射より，$Au = f$ を満たす $u \in H$ があり，

$$a(u, v) = (Au, v) = (f, v) = F(v) \qquad v \in H.$$

よって，u は (7.7) の解である．
もし，$u, \tilde{u}$ が二つの解ならば，$v := u - \tilde{u}$ とすることで，

$$\beta \|u - \tilde{u}\|_H^2 \leq a(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) = a(u, v) - a(\tilde{u}, v) = F(v) - F(v) = 0$$

より一意性が従う． □

注 双一次形式 a が対称（つまり，$a(u, v) = a(v, u),\ u, v \in H$）ならば，$(u, v)_a := a(u, v)$ が H の内積になるので，Lax-Milgram の定理はリースの表現定理よりすぐに従う．つまり，Lax-Milgram の定理の意義は，a が対称でなくても解が存在するところにある．

Lax-Milgram の定理を用いて，

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \tag{7.9}$$
$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{7.10}$$

という線形な境界値問題を例にとって，弱解の存在を示す．この問題の弱解は次の式で定義される：

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{7.11}$$

双一次形式 a と線形汎関数 F を

$$a(u, \varphi) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx, \qquad u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$$
$$F(\varphi) := \int_\Omega f \varphi \, dx, \qquad \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

で定義すると，次の問題の解の存在を証明することになる：

$$a(u, \varphi) = F(\varphi) \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Lax-Milgram の定理の仮定が満たされていることを確かめればよい：

- $H = H_0^1$ はヒルベルト空間である（ノルムは $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ とする）．
- $a : H \times H \to \mathbb{R}$ は双一次形式である．
- a は連続である：

$$|a(u, v)| = \Big| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \Big| \leq \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \Big)^{1/2} \Big(\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \Big)^{1/2} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

ここで，$p = q = 2$ の指数に対しヘルダー不等式を用いた．

- a は強圧である（Friedrichs 不等式より従う）：

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = |u|^2_{H^1(\Omega)} \geq \frac{1}{C_F^2}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u \in H^1_0(\Omega).$$

- $F : H \to \mathbb{R}$ は有界線形汎関数である．ただし，$f \in L^2(\Omega)$ とする必要がある．実際，ヘルダー不等式より，

$$|F(u)| = \left|\int_\Omega fu\,dx\right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

すべての仮定が満たされているので，Lax-Milgram の定理の応用により次の結果が得られた．

定理 7.11 (存在定理) Ω がリプシッツ境界をもつ領域で，$f \in L^2(\Omega)$ のとき，問題 *(7.9),(7.10)* に対しただ一つの弱解が存在する．弱解は *(7.11)* で定義される．

> より一般的な楕円型方程式への Lax-Milgram の定理の適用については，
> [2], p.297 を参照.

7.4 正則性理論

前節では，ポアソン方程式 $-\Delta u = f$ の弱解 $u \in H^1_0$ の存在を示したが，f が正則ならば弱解 u も正則であることが期待できる．実際，方程式を全空間で考え形式的に計算してみると，

$$\int f^2 = \int (\Delta u)^2 = \sum_{i,j}\int u_{x_ix_i}u_{x_jx_j} = -\sum_{i,j}\int u_{x_ix_ix_j}u_{x_j} = \sum_{i,j}\int u_{x_ix_j}u_{x_ix_j} = \int |D^2u|^2.$$

つまり，$f \in L^2$ ならば，u の 2 階微分もすべて L^2 に入り，$u \in H^2 := W^{2,2}$ を得る．

さらに，方程式を x_k について微分すれば $\tilde{u} := u_{x_k}$ が $-\Delta\tilde{u} = f_{x_k}$ を満たすので，同様な計算により u の 3 階微分の L^2 ノルムが f の 1 階微分の L^2 ノルムでコントロールできることがわかる．大雑把に言えば,「u は L^2 において f より 2 つ多くの微分をもつ」ことになる．

ソボレフ空間 $W^{k,p}$ が係数 k,p と次元 n に応じて，ある空間 C^l の部分空間になっていることが知られているから，このような考察から解の微分可能性を示すこともできる．

しかし，H^1_0 という正則性しかもたない弱解 u に対して，少なくとも $u \in C^3$ を必要とする上の形式的な計算が正当化されない．そこで，上のアイデアを使うには，足りない 2 つの微分を差分の形（つまり，微分の定義に出てくる「極限をとる前の」量の形）で表すことにする．

定義 7.12 (差分係数) $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $U \subset\subset \Omega$ とする．

$$D^h_k u(x) := \frac{u(x+he_k)-u(x)}{h}, \qquad k = 1,\dots,n,\ \ x \in U,\ \ h \in \mathbb{R},\ \ 0 < |h| < \mathit{dist}(U,\partial\Omega)$$

を**差分係数**（*difference quotient*）とよぶ．また，$D^h u := (D^h_1,\dots,D^h_n)$ とおく．

定理 7.13 (差分係数と弱微分) *(i)* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ とする．そのとき，$U \subset\subset \Omega$ に対し定数 C があって，

$$\|D^h u\|_{L^p(U)} \le C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \textit{for all } \ 0 < |h| < \frac{1}{2}\textit{dist}(U, \partial\Omega)$$

が成り立つ．

(ii) $u \in L^p(U)$, $1 < p < \infty$ に対し

$$\|D^h u\|_{L^p(U)} \le C \qquad \textit{for all } \ 0 < |h| < \frac{1}{2}\textit{dist}(U, \partial\Omega)$$

を満たすような定数 C が存在するならば，

$$u \in W^{1,p}(U), \qquad \|\nabla u\|_{L^p(U)} \le C$$

が成り立つ．

> 証明はこの講義で扱っていない結果（ソボレフ関数の滑らかな関数による近似や L^p-空間における弱収束）を使っているので，ここでは省略する．[2], p.277 を参照.

7.4.1 内部の正則性

定理 7.14 (内部の H^2-正則性) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が有界領域であるとする．$u \in H^1(\Omega)$ が $f \in L^2(\Omega)$ に対するポアソン方程式

$$-\Delta u = f \qquad \textit{in } \ \Omega$$

の弱解ならば，$u \in H^2_{loc}(\Omega)$ で，

$$\|u\|_{H^2(U)} \le C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

が任意の $U \subset\subset \Omega$ に対して成り立つ．ただし，C は U と Ω にのみ依存する定数である．

証明

証明のアイデアは弱形式

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{7.12}$$

においてテスト関数 φ を解 u の 2 階差分係数として選んで，この節のはじめの形式的な計算の流れで評価を行うことである．しかし，境界の影響をさけるために，境界から正の距離で離れた集合 V に制限する役割をもつ cut-off 関数 ζ を介した

$$\varphi := -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)$$

という形で用いる必要がある．ここで，$U \subset\subset V \subset\subset \Omega$ に対し，滑らかな cut-off 関数 ζ を次の条件を満たすように選ぶ：

$$0 \le \zeta \le 1, \qquad \zeta \equiv 1 \ \text{ on } U, \qquad \zeta \equiv 0 \ \text{ on } \mathbb{R}^n \setminus V.$$

また，差分係数が定義されるように $|h|$ を十分小さくとる．
最初に，(7.12) の左辺を評価する．

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx &= \int_\Omega \nabla u \cdot D_k^{-h}\left[\nabla(-\zeta^2 D_k^h u)\right] dx \\
&= \int_\Omega D_k^h(\nabla u) \cdot \nabla(\zeta^2 D_k^h u)\, dx \\
&= \int_\Omega D_k^h(\nabla u) \cdot D_k^h(\nabla u)\zeta^2 \, dx + \int_\Omega D_k^h(\nabla u) \cdot 2\zeta \nabla \zeta D_k^h u \, dx.
\end{aligned}$$

ただし，最初の等式では次の部分差分の公式を用いた：

$$\int_\Omega v D_k^{-h} w \, dx = -\int_\Omega w D_k^h v \, dx.$$

最後の積分を，$\nabla\zeta$ が U, V にしか依らない定数でおさえられることと，ヤングの不等式 $ab \le \frac{1}{2C}a^2 + \frac{C}{2}b^2$ を用いて評価する：

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega D_k^h(\nabla u) \cdot 2\zeta \nabla \zeta D_k^h u \, dx\right| &\le C\int_\Omega |D_k^h(\nabla u)|\,|D_k^h u|\zeta \, dx \\
&\le \frac{1}{2}\int_\Omega |D_k^h(\nabla u)|^2 \zeta^2 \, dx + C\int_V |D_k^h u|^2 \, dx.
\end{aligned}$$

最後の積分に定理7.13を適用すると，合わせて

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \ge \frac{1}{2}\int_\Omega |D_k^h(\nabla u)|^2 \zeta^2 \, dx - C\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

を得る．cut-off 関数を二乗で入れることにより微分したあと ζ が一つ残り，ヤングの不等式を使って高次の項を左辺に吸収させることができたことに注意する．
右辺を評価するために，再び定理7.13を利用して $\int \varphi^2$ を評価しておく：

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi^2 \, dx \le C\int_\Omega |\nabla(\zeta^2 D_k^h u)|^2 \, dx &\le C\int_V (|D_k^h u|^2 + \zeta^2 |D_k^h(\nabla u)|^2)\, dx \\
&\le \tilde{C}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + \zeta^2 |D_k^h(\nabla u)|^2)\, dx.
\end{aligned}$$

よって，ヤングの不等式より

$$\int_\Omega |f\varphi|\,dx \le \frac{1}{4\tilde{C}}\int_\Omega \varphi^2\,dx + C\int_\Omega f^2\,dx \le \frac{1}{4}\int_\Omega \zeta^2 |D_k^h(\nabla u)|^2\,dx + C\int_\Omega (|\nabla u|^2 + f^2)\,dx$$

を得る．両辺の評価を合わせると，

$$\int_U |D_k^h(\nabla u)|^2\,dx \le C\int_\Omega (|\nabla u|^2 + f^2)\,dx.$$

定理7.13をもう一度利用すれば，$\nabla u \in (H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega))^n$ がわかる．よって，$u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ で，

$$\|u\|_{H^2(U)} \le C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right)$$

を満たす.
この評価の右辺を改良する．ζ の台の情報を考慮すると，右辺の量を $C\left(\|f\|_{L^2(V)} + \|u\|_{H^1(V)}\right)$ にしてもかまわないことがわかる．そこで，新たな cut-off 関数 $\tilde{\zeta}$ を

$$0 \le \tilde{\zeta} \le 1, \qquad \tilde{\zeta} \equiv 1 \ \text{ on } V, \qquad \tilde{\zeta} \in C_0^\infty(\Omega)$$

のように選んで，(7.12) に $\varphi := \tilde{\zeta}^2 u$ と代入すると，上と同様な計算で

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \tilde{\zeta}^2\,dx \le C\int_\Omega (u^2 + f^2)\,dx$$

を得る．したがって，

$$\|u\|_{H^1(V)} \le C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

より定理の評価式が示された． □

注

(1) 定理では u の境界上のトレースについて何も仮定しない．以下の高次正則性に関する定理でわかるように，内部での正則性は境界条件と関係なく決まる．

(2) $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ が得られれば，弱解の定義式 (7.12) でグリーンに定理を用いることができ，

$$\int_\Omega (\Delta u + f)\varphi\,dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

が従うので，方程式 $-\Delta u = f$ がほとんどいたるところで満たされることがわかる．

H^2-正則性に関する定理を利用して，数学的帰納法で次の定理が示される．

定理 7.15 (内部の高次正則性) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域，$m \in \mathbb{N}$ とする．$u \in H^1(\Omega)$ が $f \in H^m(\Omega)$ に対するポアソン方程式

$$-\Delta u = f \qquad in\ \ \Omega$$

の弱解ならば，$u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega)$ で，

$$\|u\|_{H^{m+2}(U)} \le C\left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

が任意の $U \subset\subset \Omega$ に対して成り立つ．ただし，C は U と Ω にのみ依存する定数である．

この結果を微分可能性についての情報に還元するときは，ソボレフ空間に関する埋蔵定理を適用すればよい．例として次の埋蔵定理を紹介する．

定理 7.16 (ソボレフ不等式) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を C^1-級の境界をもつ有界領域とする．

$$k > \frac{n}{p}$$

なる k に対して $u \in W^{k,p}(\Omega)$ ならば，

$$u \in C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\overline{\Omega}),$$

そして

$$\|u\|_{C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C(k,p,n,\gamma,\Omega)\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

が成立する．ただし，

$$\gamma = \begin{cases} \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p} & (\frac{n}{p} \notin \mathbb{N} \text{ のとき}) \\ (0,1) \text{ の任意の実数} & (\frac{n}{p} \in \mathbb{N} \text{ のとき}) \end{cases}.$$

ここで，$C^{l,\gamma}$ は l-階微分が γ-ヘルダー連続になる関数の空間である．

例えば，3 次元空間（$n = 3$）で考えると，$p = 2$ であるから，$k > \frac{n}{p}$ という条件は $k \geq 2$ と同値である．よって，ポアソン方程式の右辺が $f \in H^m$（$m \geq 0$）ならば，弱解は H^{m+2} となり，上の埋蔵定理を用いると，u が領域の内部で m-回微分可能（正確には m-階微分がヘルダー連続である）ということがわかる．当然ながら，$f \in C^\infty(\Omega)$ のとき，$u \in C^\infty(\Omega)$ が従う．

7.4.2 境界上の正則性

右辺の関数 f が滑らかであれば，弱解が境界まで滑らかであることが示される．証明の手順は，境界 $\partial\Omega$ 上の点を定めて，まずはこの点の近傍で境界が超平面である場合を考える．その場合は内部での正則性と似た方法で境界までの正則性を出すことができる．選んだ点のまわりの境界が超平面でない場合は，境界をまっすぐにする変換を考える．境界が十分滑らかであれば，この変換により係数や右辺関数の滑らかさなどの偏微分方程式の性質が保たれるので，超平面の場合の解析に帰着できる．ただし，ポアソン方程式を考えても，変換後の方程式は一般の線形楕円型方程式になり，そのような一般の方程式に対する評価が必要になる．この評価はポアソン方程式と本質的には変わらないが，ここでは紹介していないため，変換後の解析の部分を省略する（詳しくは [2], p.308 を参照）．

定理 7.17 (境界までの H^2-正則性) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が C^2-級の境界をもつ有界領域であるとする．$u \in H_0^1(\Omega)$ が $f \in L^2(\Omega)$ に対するポアソン方程式の境界値問題

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \textit{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \textit{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

の弱解ならば，$u \in H^2(\Omega)$ で，

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

が成り立つ．ただし，C は Ω にのみ依存する定数である．

注 弱解 u に対して Ω にのみ依存する定数 C があって，$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$ が成り立つことが示せるので，定理の評価と合わせると，

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

という評価を得る．

証明

冒頭で述べたように，最初は領域が半球であるという特別な場合を考える：

$$\Omega = B(0,1) \cap \mathbb{R}^n_+.$$

$U := B(0, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{R}^n_+$ として，cut-off 関数 $\zeta \in C_0^\infty(B(0,1))$ を次の条件を満たすように選ぶ：

$$0 \leq \zeta \leq 1, \qquad \zeta \equiv 1 \ \text{ on } U, \qquad \zeta \equiv 0 \ \text{ on } \mathbb{R}^n \setminus \Omega.$$

よって，ζ は $\partial\Omega$ の曲った部分（球面の部分）の近傍で恒等的にゼロである．
試験関数 φ を前と同様に，

$$\varphi := -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)$$

で定義するが，$k = 1, \ldots, n-1$ のみ考える．これを書き下すと，

$$\varphi(x) = \frac{1}{h^2}\zeta^2(x - he_k)\big[u(x) - u(x - he_k)\big] - \frac{1}{h^2}\zeta^2(x)\big[u(x + he_k) - u(x)\big]$$

となるので，$\gamma u = 0$（トレース） on $\{x_n = 0\}$ そして $\partial B(0,1)$ の近傍で $\zeta \equiv 0$ より $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ を得る．よって，$|h|$ を十分小さくとれば，φ を弱形式

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{7.13}$$

においてテスト関数として使用できる．内部正則性と同様な計算により，

$$\int_U |D_k^h(\nabla u)|^2 \, dx \leq C \int_\Omega (|\nabla u|^2 + f^2) \, dx, \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

ここから，$u_{x_k} \in H^1(U), k = 1, \ldots, n-1$ が従う（定理7.13は $U \subset\subset \Omega$ を仮定しているが，今考えている状況ではそれが満たされない．しかし，この場合でも定理が正しいことが知られている）．さらに，$u_{x_n x_n}$ 以外のすべての 2 階微分の $L^2(U)$ ノルムが $C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right)$ で評価される．

$u_{x_nx_n}$ を評価するには，方程式 $-\Delta u = f$ がほとんどいたるところで満たされることを用いる（定理7.14のあとの注）．よって，

$$|u_{x_nx_n}| \le \sum_{k=1}^{n-1} |u_{x_kx_k}| + |f|.$$

結局，

$$\|u\|_{H^2(U)} \le C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right).$$

原点近傍で境界 $\{x_n = 0\}$ までの H^2-正則性が示された．
境界が超平面でない場合，$x^0 \in \partial\Omega$ を任意に選んで，座標軸の回転により，ある近傍 $B(x^0, r)$ で境界 $\partial\Omega$ がある C^2-関数 $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ のグラフで表せるようにする：

$$\Omega \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r);\ x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

そこで，変数変換

$$y_i = x_i,\ \ i = 1, \dots, n-1, \qquad y_n = x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})$$

を行うと，ポアソン方程式は一般の楕円型方程式に変換される．点 x^0 の近傍では境界が超平面に変換されるため，上で与えた半球における解析が適用できる．変換が C^2-級であるから，得られる偏微分方程式の係数が解の H^2-正則性を導くのに十分な滑らかさをもつことがわかる． □

H^2-正則性に関する定理を利用して，数学的帰納法で次の定理が示される．

定理 7.18 (境界までの高次正則性) m を非負の整数，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を C^{m+2}-級の境界をもつ有界領域とする．$u \in H_0^1(\Omega)$ が $f \in H^m(\Omega)$ に対するポアソン方程式の境界値問題

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

の弱解ならば，$u \in H^{m+2}(\Omega)$ で，

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \le C\|f\|_{H^m(\Omega)}$$

が成り立つ．ただし，C は m と Ω にのみ依存する定数である．

ソボレフ不等式を用いることで，境界までの微分可能性に関する情報が得られる．例えば，$f \in C^\infty(\overline{\Omega}), \partial\Omega \in C^\infty$ のとき，$u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ が従う．

> 式をシンプルにするため，ポアソン方程式に限定して解析を行ったが，弱解の存在と正則性は同じような方法で一般の楕円型方程式に対しても示すことができる．詳しくは例えば，[2], p.293 などを参照.

7.5 演習問題

問題 7.1 区間 $[0, 1]$ 上で連続な関数の空間 $C([0, 1])$ に L^2-ノルムをつけたノルム空間がバナッハ空間ではないことを示せ.

問題 7.2 ヘルダー不等式を用いて，以下の関係が成り立つことを示せ：

$$p \le q \qquad \Rightarrow \qquad L^q(0,1) \subset L^p(0,1) \qquad\qquad \text{for any } \ p,q>0.$$

問題 7.3 関数

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{if } \ 0 < x \le 1 \\ 2 & \text{if } \ 1 \le x < 2 \end{cases},$$

の弱微分が存在しないことを示せ.

（ヒント：$x=1$ で 1 の値を持ち，それ以外の $(0,2)$ の全ての点で $m \to \infty$ とともにゼロに近づくような関数列 $\{\varphi_m\}$ を弱微分の定義式においてテスト関数として用いる.）

問題 7.4 Friedrichs の不等式が境界上のトレースがゼロでない関数に対して成り立たないことを示す反例を見つけよ.

問題 7.5 $I=(-1,1)$ とする．作用素 $F : L^2(I) \to L^2(I)$ を

$$F(u)(x) = \int_I \frac{u(y)}{2+x^2+y^2}\,dy$$

により定義する．以下の問に答えよ.

(1) 作用素 F が線形であるかどうか確認せよ.

(2) 作用素 F が有界であるか判断せよ．そのノルムを求めよ.

(3) F が収縮写像であることを示せ.

問題 7.6 2 変数関数 $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$ （すなわち，$f(x_1,x_2) = (x_1^2+x_2^2)^{-1/4}$）が $W^{1,p}(B(0,1))$ に属するような p の上限を求めよ．ここで，$B(0,1) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1^2+x_2^2 < 1\}$ が 2 次元の単位球である.

問題 7.7 ([2], p.290) $n=1$, $p \in [1,\infty)$, $u \in W^{1,p}(0,1)$ ならば，u がほとんどいたるところで絶対連続な関数と一致し，その微分がほとんどいたるところで存在し $L^p(0,1)$-関数であることを示せ.

問題 7.8 領域 Ω において局所可積な関数 u が

$$\int_\Omega u\varphi\,dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

を満たすとき，$u \equiv 0$ a.e. in Ω であることを示せ.

問題* 7.9 ([2], p.291) Ω が連結領域で，$u \in W^{1,p}(\Omega)$ が

$$\nabla u = 0 \qquad \text{a.e. in } \Omega$$

を満たすならば，u がほとんどいたるところで定数関数であることを示せ.

問題 7.10 ([2], p.291) $n>1$ ならば，非有界な関数

$$u(x) = \ln\ln\left(1+\frac{1}{|x|}\right)$$

が $W^{1,n}(B(0,1))$ に属することを確認せよ.

問題* **7.11** ([2], p.291) Ω が C^1-境界をもつ有界領域であるとする．

$$\gamma u = u\big|_{\partial\Omega} \qquad \forall u \in C(\overline{\Omega}) \cap L^p(\Omega)$$

を満たすような有界線形作用素 $\gamma : L^p(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ が存在しないことを示せ．

問題* **7.12** ([2], p.291)

$$|\{x \in B(0,1);\ u(x) = 0\}| \geq \alpha > 0$$

を満たすすべての関数 $u \in H^1(B(0,1))$ に対し，n と α にのみ依存する共通の定数 C が存在し，

$$\int_{B(0,1)} u^2\,dx \leq C \int_{B(0,1)} |\nabla u|^2\,dx$$

が成り立つことを示せ．

問題* **7.13** ([2], p.291) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が有界で連続な微分をもつとする．有界な領域 Ω に対し $u \in W^{1,p}(\Omega)$ であるとする（$1 \leq p \leq \infty$）．

$$v := F(u) \in W^{1,p}(\Omega) \qquad \text{そして} \qquad v_{x_i} = F'(u)u_{x_i}, \quad i = 1, \ldots, n$$

が成立することを示せ．
（ヒント：u と u_{x_i} を近似する列 $\{u^m\}, \{u^m_{x_i}\}$ を用いる．[3], p.151）

問題 **7.14** ([2], p.345) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を滑らかな境界をもつ有界領域とする．微分作用素

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + c(x)u, \qquad x \in \Omega$$

における係数 a^{ij} は対称（すなわち，$a^{ij} = a^{ji}$）で，次の楕円性条件を満たすとする：

$$\theta > 0 \ \text{ が存在し，} \quad \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \text{ for a.e. } x \in \Omega.$$

また，c が滑らかな関数であると仮定する．

定数 $\mu > 0$ が存在し，$c(x) \geq -\mu,\ x \in \Omega$ ならば，L に対応する双一次形式 $a(\cdot,\cdot)$ が Lax-Milgram の定理の仮定を満たすことを示せ．

問題 **7.15** ([2], p.345) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を滑らかな境界をもつ有界領域とする．重調和方程式に対する境界値問題

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f && \text{in } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 && \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

の弱解 $u \in H^2_0(\Omega)$ は

$$\int_\Omega \Delta u \Delta\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx \qquad \forall \varphi \in H^2_0(\Omega)$$

で定義される．$f \in L^2(\Omega)$ に対しただ一つの弱解が存在することを示せ．

問題 7.16 ([2], p.345) Ω が連結で，$f \in L^2(\Omega)$ とする．ポアソン程式に対するノイマン問題

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 && \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

の弱解 $u \in H^1(\Omega)$ は

$$\int_\Omega \nabla \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

で定義される．この問題の弱解が存在するのは $\int_\Omega f \, dx = 0$ が成り立つときとそのときのみであることを示せ．

問題 7.17 ([2], p.345) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $c(0) = 0, c' \geq 0$ を満たす滑らかな関数であるとし，$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とする．関数 $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ はコンパクトな台をもち，半線形偏微分方程式

$$-\Delta u + c(u) = f \qquad \text{in } \mathbb{R}^n$$

の弱解ならば，$u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ を示せ．

（ヒント：定理7.14の証明を参考にする．ただし，cut-off 関数は使わなくてもよい.）

付録

付録１． $C_0^\infty(\Omega)$ の関数について

> 何度微分しても連続であるような関数のことである（それを ∞ という添え字で表している）．さらに，Ω の中にコンパクトな台を持つ関数である（それを 0 という添え字で表している）．関数 f のサポート（台）とは，f の値が零にならない点の集合の閉包である．ここでは，サポートが Ω の中でコンパクトであるという条件があるが，それは関数は Ω の有界な部分集合を除いて零であり，Ω の境界の近傍で零であるという意味になる

付録２． ノルム線形空間

> **線形空間**は次の性質をもつ集合 V である：
>
> - $v, w \in V$ が任意の元で，α が実数（または複素数）であれば，$v+w$ と αv も V の元である
> - 上記の演算は以下のルールを満たす
>
> $$\begin{aligned} &v + w = w + v \\ &v + (w + z) = (v + w) + z \\ &\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \\ &(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \\ &\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v \\ &1 \cdot v = v \\ &v + w = v + z \quad \Rightarrow \quad w = z \end{aligned}$$
>
> V 上の**ノルム**は次の条件を満たす非負の関数 $\|\cdot\|_V$ である：
>
> $$\begin{aligned} &\|v + w\|_V \le \|v\|_V + \|w\|_V \qquad \text{(triangle inequality)} \\ &\|\alpha v\|_V = |\alpha| \, \|v\|_V \\ &\|v\|_V \neq 0 \ \text{ for } \ v \neq 0 \end{aligned}$$
>
> **ノルム線形空間** とはノルムをもつ線形空間のことである．

例 区間 $[0,1]$ 上の連続関数の集合 $C([0,1])$ は線形空間であり，以下の関数はこの線形空間のノルムである：

$$\|f\|_{C([0,1])} = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

証明． f, g が連続関数で，$\alpha \in \mathbb{R}$ であれば，$f+g$ と αf が連続関数であることは明らかである．演算のルールが満たされていることも簡単に確かめられる．

ノルムの条件を確かめる．

- 条件 1 （三角不等式）：

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{C([0,1])} &= \max_{x\in[0,1]}|f(x)+g(x)| \le \max_{x\in[0,1]}\big(|f(x)|+|g(x)|\big)\\ &\le \max_{x\in[0,1]}|f(x)| + \max_{x\in[0,1]}|g(x)| = \|f\|_{C([0,1])}+\|g\|_{C([0,1])}.\end{aligned}$$

- 条件 2：

$$\|\alpha f\|_{C([0,1])} = \max_{x\in[0,1]}|\alpha f(x)| = \max_{x\in[0,1]}|\alpha|\cdot|f(x)| = |\alpha|\max_{x\in[0,1]}|f(x)| = |\alpha|\|f\|_{C([0,1])}.$$

- 条件 3： $\|f\|_{C([0,1])}=0$ であれば，定義より $f=0$ が成り立つことがすぐにわかる．

付録３． バナッハ空間

定義 （バナッハ空間）

1. 列 $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}\subset V$ が**コーシー列**であるとは，任意の $\epsilon>0$ に対し，$N>0$ が存在し，

$$\|v_k-v_l\|_V<\epsilon \qquad \forall k,l\ge N$$

が成り立つということである．

2. 全てのコーシー列が収束するような空間 V を**完備**な空間とよぶ．すなわち，任意のコーシー列 $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対し，$\{v_k\}$ が収束し，収束先 v が V の元である．

3. **バナッハ空間** V は完備なノルム線形空間のことである．

例 空間 $C([0,1])$ に上で定義したノルム $\|\cdot\|_{C([0,1])}$ をつけると，バナッハ空間になる．

証明． （概要）

- 最初に，$\{f_n\}$ がコーシー列ならば $\{f_n(x)\}$ がすべての $x\in[0,1]$ に対しある値に点ごとに収束することを示す．収束先を $f(x)$ とおく．
- あとは，上で得られた関数 f が $C([0,1])$ に属すること，つまり連続であることを示せばよい．これは，連続関数の一様収束に関する定理より従う．

付録４． ヒルベルト空間

ヒルベルト空間 は内積をもつバナッハ空間のことである．
定義（内積）H を線形な実空間とする．写像 $(\ ,\ ) : H \times H \to \mathbb{R}$ が**内積**であるとは，以下の 4 つの条件が成り立つということである：
(i) $(u, v) = (v, u)\ \ \forall u, v \in H$
(ii) $u \mapsto (u, v)$ という写像は全ての $v \in H$ に対して線形である
(iii) $(u, u) \geq 0$ が全ての $u \in H$ に対して成り立つ
(iv) $(u, u) = 0$ が成り立つのは $u = 0$ のときかつそのときに限る
$(\ ,\ )$ が内積であれば，それに随伴する **ノルム**は次の式で定義される

$$\|u\|_H = (u, u)^{1/2}, \qquad u \in H.$$

Cauchy-Schwarz 不等式：

$$|(u, v)| \leq \|u\|_H \, \|v\|_H, \qquad u, v \in H.$$

例 空間 $L^2(\Omega)$ はヒルベルト空間である．その内積は $(f, g) = \int_\Omega fg\, dx$ で与えられる．

付録５． 有界線形汎関数

定義（有界線形作用素）X, Y をノルム空間とする．写像 $A : X \to Y$ が

$$A(\lambda u + \mu v) = \lambda A(u) + \mu A(v) \qquad \forall u, v \in X,\ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

を満たすとき，A を**線形作用素**という．線形作用素 $A : X \to Y$ が**有界**であるとは，

$$\|A\| = \sup_{\|u\|_X \leq 1} \|A(u)\|_Y = \sup_{u \in X} \frac{\|A(u)\|_Y}{\|u\|_X} \ < \ \infty$$

の条件が成り立つという意味である．$Y = \mathbb{R}$ のとき，作用素 $A : X \to \mathbb{R}$ のことを**汎関数**とよぶ．X 上の有界な線形汎関数を集めた集合を X^* と書き，X の**双対空間**とよぶ．

定理（リースの表現定理）H がヒルベルト空間であるとする．そのとき，任意の $F \in H^*$ に対し

$$F(v) = (f, v) \qquad \forall v \in H$$

が成り立つような元 $f \in H$ がただ一つ存在する．写像 $F \mapsto f$ は H^* から H の上への同形写像である．

例 作用素 $A : L^2(0,1) \to \mathbb{R}$ を

$$A(u) = \int_0^1 xu(x)\,dx, \qquad u \in L^2(0,1)$$

と定義すると，有界線形汎関数になる．

証明．

- L^2 関数から実数への写像であるから，汎関数である．
- A は線形である：

$$A(\lambda u + \mu v) = \int_0^1 x(\lambda u(x) + \mu v(x))\,dx = \lambda \int_0^1 xu(x)\,dx + \mu \int_0^1 xv(x)\,dx = \lambda A(u) + \mu A(v).$$

- さらに，A は有界である：

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{u \in L^2(0,1)} \frac{|A(u)|}{\|u\|_{L^2(0,1)}} = \frac{\left|\int_0^1 xu(x)\right|}{\left(\int_0^1 u^2(x)\right)^{1/2}} \\ &\leq \frac{\left(\int_0^1 x^2\right)^{1/2} \left(\int_0^1 u^2(x)\right)^{1/2}}{\left(\int_0^1 u^2(x)\right)^{1/2}} = \left(\int_0^1 x^2\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} < \infty. \end{aligned}$$

ここで，ヘルダー不等式を用いた．また，$u(x) = x$ とおけば，$|A(u)|/\|u\|_{L^2(0,1)} = 1/\sqrt{3}$ が成り立つので，作用素のノルムは $\|A\| = 1/\sqrt{3}$ となる．

References

[1] R. Adams: Sobolev Spaces, Academic Press, 2003.

[2] L. C. Evans: Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.

[3] D. Gilbarg, N.S. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, 2001.

[4] F. John: Partial Differential Equations, Springer, 1982.