非線型解析入門 ・ 講義ノート

更新：1 月 23 日（最終版）

Karel Švadlenka・京都大学
2019 年 後期

Contents

1　変分法

1.1　最急降下曲線

次の問題を考える：

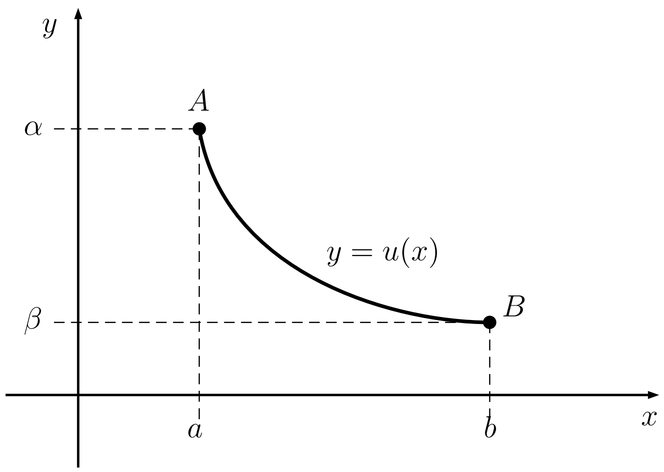
Brachistochrone problem

平面内の 2 点 $A = [a, \alpha], B = [b, \beta]$ が与えられ，$\alpha > \beta$ を満たすとする．質点が重力だけで出発点 A から終点 B にたどり着くのに必要な時間を最短にする経路を求めよ．

下図の設定で，質点が動く経路が関数 $u(x)$ のグラフで表せるとする．このグラフの長さを L，質点が点 A から $u(x)$ のグラフに沿って s だけの距離を動いた時点での質点の速度を $\tilde{v}$ とおく．そのとき，A から B に到着するのにかかる時間は

$$T = \int_0^T dt = \int_0^L \frac{dt}{ds}\, ds = \int_0^L \frac{1}{\tilde{v}(s)}\, ds = \int_a^b \frac{1}{v(x)} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx$$

である．ただし，ここで $v(x)$ は座標 x における質点の速度である．



摩擦がなければ，エネルギー保存の法則より速度 v を計算できる．質点の質量を m，重力加速度を g とすれば，

$$\frac{1}{2} m v^2(x) + m g u(x) = m g \alpha$$

より

$$v(x) = \sqrt{2g(\alpha - u(x))}.$$

A と B を結ぶ経路 $u(x)$ が決まれば，移動にかかる時間は

$$T[u] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (u'(x))^2}{\alpha - u(x)}}\, dx$$

で与えられる．

T という写像は経路の形を表す関数 u を，時間を表す実数に写す写像で，このような写像を汎関数とよぶ．数学的に正確な議論を行う際，汎関数の定義域となる関数の集合（空間）を指定する必要がある．ここでは，区間 (a,b) において値が α より小さく，微分が連続であるような関数 u であれば，汎関数の値 $T[u]$ は定義される．ただし，$x=a$ のとき $u(a)=\alpha$ となり，被積分関数が有界でない可能性があるので，注意が必要である．

今，許されるすべての経路 $y=u(x)$ のうち，時間 $T[u]$ を最小にするものを求めることが課題である．ただし，経路の両端の位置が決まっている：

$$u(a)=\alpha, \qquad u(b)=\beta.$$

この問題を一般化する：

変分問題

$$\inf_{u\in X} J[u] \tag{1.1}$$

ただし，$$J[u]=\int_a^b f\big(x,u(x),u'(x)\big)\,dx, \quad X=\Big\{u\in C^1([a,b]);\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta\Big\}.$$

ここで，汎関数 J が関数 $f(x,u,\xi):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を通して，x, $u(x)$ と $u'(x)$ に一般的な形で依存するようにした（関数 f の変数は，第一変数は x，第二変数は u，第三変数は ξ という名前をつけた）．この問題は実際には三つの部分問題を含むことに注意する：

- 汎関数 J の X における下限を求める
- 下限を与える関数が存在するか（すなわち，$\inf=\min$ であるか）を確認する
- $\min$ が達成される場合，最小値を与える関数を見つける

最小値を与える関数を最小化関数または minimizer と呼び，以降では $\overline{u}$ という記号で表す．

有限次元の最小化問題でもそうであるが，最小値と極小値を区別する．

(1) 汎関数 J の X における下限が $J[\overline{u}]$ で達成されるとは，

$$J[\overline{u}]\le J[u] \qquad \forall u\in X \tag{1.2}$$

という意味である．このとき，$\overline{u}$ を最小化関数（minimizer）とよぶ．

(2) 一方で，極小値の場合は，(1.2) は $\overline{u}$ のある近傍に限定すれば成り立つことになる．有限次元ではすべてのノルムが同値であるため，近傍を指定するときにどのノルムを用いても構わない．しかし，ここで考える最小化は無限次元である関数空間のなかで行うため，ノルムの

取り方によって答えが変わる可能性がある．以下では，次の二つのノルムを使う：

$$\|u\|_{C^0([a,b])} = \max_{x\in[a,b]} |u(x)|, \qquad \|u\|_{C^1([a,b])} = \max_{x\in[a,b]} |u(x)| + \max_{x\in[a,b]} |u'(x)|.$$

(2a) 弱い極小値 $\overline{u} \in X$ は次で定義される：

$$\exists\delta > 0 \ : \qquad J[\overline{u}] \le J[u] \quad \forall u \in X \ \text{ such that } \ \|\overline{u} - u\|_{C^1([a,b])} < \delta. \tag{1.3}$$

(2b) 強い極小値 $\overline{u} \in X$ は次で定義される：

$$\exists\delta > 0 \ : \qquad J[\overline{u}] \le J[u] \quad \forall u \in X \ \text{ such that } \ \|\overline{u} - u\|_{C^0([a,b])} < \delta. \tag{1.4}$$

弱い極小値の場合，u の値と微分と両方が $\overline{u}$ のものに近い関数 u だけが比較の対象となるが，強い極小値の場合，u の値のみが $\overline{u}$ の値に近い関数 u がすべて比較の対象となるので，条件がより厳しくなる．すなわち，

$$\left\{u \in C^1([a,b]);\ \|\overline{u} - u\|_{C^1([a,b])} < \delta\right\} \subsetneq \left\{u \in C^1([a,b]);\ \|\overline{u} - u\|_{C^0([a,b])} < \delta\right\}.$$

このため，弱い極小値が強い極小値になるとは限らない．

さて，最小化問題 (1.1) の弱い極小値を求めることをラグランジュのアイデアに沿って考えてみよう．試験関数（test function）$\varphi \in C_0^1(a,b)$ を任意に選ぶ（ここで，$C_0^1(a,b)$ は，$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ を満たし，$[a,b]$ で 1 回連続微分可能な関数 φ の空間である）．求める弱い極小値を $\overline{u} \in X$ とすれば，関数 $u_\varepsilon(x) := \overline{u}(x) + \varepsilon\varphi(x)$ は

$$u_\varepsilon \in X, \qquad \|\overline{u} - u_\varepsilon\|_{C^1([a,b])} = |\varepsilon|\|\varphi\|_{C^1([a,b])}$$

を満たす．したがって，ε が十分小さければ（$|\varepsilon| < \varepsilon_0 := \delta/\|\varphi\|_{C^1([a,b])}$ であれば）, u_ε は (1.3) における比較の対象となり，

$$J[\overline{u}] \le J[u_\varepsilon] \qquad \forall\varepsilon \in \mathbb{R} \ \text{ such that } \ |\varepsilon| < \varepsilon_0.$$

関数 $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $j(\varepsilon) := J[u_\varepsilon]$ で定義すると，この式は

$$j(0) \le j(\varepsilon) \qquad \forall\varepsilon \in \mathbb{R} \ \text{ such that } \ |\varepsilon| < \varepsilon_0$$

と書き換えられる．しかし，これは j が $\varepsilon = 0$ において極小値を持つということを意味する．

汎関数の定義で現れる関数 f が滑らかであれば（以下では $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ と仮定する），j も滑らかな関数となり，

$$j'(0) = 0, \qquad j''(0) \ge 0 \tag{1.5}$$

が極小値の必要条件となる．

$$j(\varepsilon) = \int_a^b f\bigl(x, \overline{u}(x) + \varepsilon\varphi(x), \overline{u}'(x) + \varepsilon\varphi'(x)\bigr)\, dx$$

だから，$j'(0) = 0$ を具体的に計算すると，

$$\int_a^b \left[f_\xi\left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\right)\varphi'(x) + f_u\left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\right)\varphi(x)\right]\, dx = 0 \tag{1.6}$$

という方程式を得る．ただし，f_u, f_ξ は偏微分 $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial \xi}$ を表す記号である．

ここからは，二つの方法で議論を進めていく．

（方法 1）(1.6) の第 1 項で部分積分を行うことで，

$$\int_a^b \left[-\frac{d}{dx}\left(f_\xi\left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\right)\right) + f_u\left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\right)\right]\varphi(x)\, dx = 0 \quad \forall\varphi \in C^1([a,b])$$

with $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ がわかる．φ が境界点で消えるため，境界項が現れない．そこで，次の変分法の基本補題を用いる．

Fundamental lemma of the calculus of variations

関数 $v \in C([a,b])$ が条件

$$\int_a^b v(x)\varphi(x)\, dx = 0 \qquad \forall\varphi \in C^1([a,b]) \text{ with } \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \tag{1.7}$$

を満たすならば，$v \equiv 0$ in $[a,b]$ が成り立つ．

Proof. $v(x_0) > 0$ となる点 $x_0 \in (a,b)$ が存在すると仮定すれば，$d, \varepsilon > 0$ が存在して，

$$v(x) > d \qquad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$$

が言える．$\varphi > 0$ in $(x_0 - \varepsilon/2, x_0 + \varepsilon/2)$ でそれ以外 0 となるような試験関数 φ をとれば，$\int_a^b v\varphi\, dx > 0$ となり，矛盾が得られる．よって，$v(x) \le 0, x \in (a,b)$ がわかった．逆の不等式 $v(x) \ge 0, x \in (a,b)$ は同様に示され，$v \equiv 0$ in (a,b) がしたがう．v の連続性より，$v \equiv 0$ in $[a,b]$ を得る． □

この補題により，$[\cdot]$ の中身が恒等的にゼロであるので，

$$-\frac{d}{dx}\left(f_\xi\left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\right)\right) + f_u\left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\right) = 0 \qquad \forall x \in (a,b) \tag{1.8}$$

のように，オイラー・ラグランジュ方程式（Euler-Lagrange equation）という式を得る．f_ξ のなかに u の微分が入っており，それをさらに x について微分しているので，一般には 2 階微分方程式である．よって，この導出を正当化させるために，$\overline{u} \in C^2([a,b])$ を仮定する必

要がある．

（方法 2）一方で，(1.6) の第 2 項で部分積分を行うことで，

$$\int_a^b \left[f_\xi \left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\right) - \int_a^x f_u \left(t, \overline{u}(t), \overline{u}'(t)\right) dt \right] \varphi'(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C^1([a,b])$$

with $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ がわかる．ここでは，次の補題を用いる．

Lemma of du Bois-Reymond

関数 $v \in C([a,b])$ が条件

$$\int_a^b v(x)\varphi'(x)\, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C^1([a,b]) \ \text{ with } \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \tag{1.9}$$

を満たすならば，定数 $c \in \mathbb{R}$ が存在して，$v \equiv c$ in $[a,b]$ が成り立つ．

Proof. 定数 c を

$$c = \frac{1}{b-a} \int_a^b v(x)\, dx$$

で定義すれば，関数

$$\varphi(x) = \int_a^x (v(t) - c)\ dt$$

は補題の仮定を満たすので，

$$0 = \int_a^b v(x)\varphi'(x)\, dx = \int_a^b v(x)[v(x) - c]\, dx = \int_a^b [v(x) - c]^2\, dx.$$

最後の等号は $c\int_a^b (v(x) - c)\, dx = 0$ より正しい．連続で非負の関数の積分がゼロになるのは，その関数が恒等的にゼロのときのみだから，$v(x) \equiv c$ が従う． □

この補題により，$[\cdot]$ の中身が定数関数あるので，

$$f_\xi \left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\right) = \int_a^x f_u \left(t, \overline{u}(t), \overline{u}'(t)\right) dt + c \qquad \forall x \in (a,b)$$

という式を得る．これはオイラー・ラグランジュ方程式を積分したものである．この導出が正しいための条件は $u \in C^1([a,b])$ で，（方法 1）と比べると弱くなっている．しかし，得られた方程式を見ると，右辺は微分可能な関数であるから，左辺も微分可能であり，両辺を x について微分すると，(1.8) と同じ式が現れる．すなわち，$\overline{u}$ の微分が連続であれば，オイラー・ラグランジュ方程式を満たす．（実際，$f_{\xi\xi}(x, \overline{u}, \overline{u}') \neq 0$ を満たす x について $\overline{u}''(x)$ が存在することが示される．）

わかったことをまとめると，$\overline{u} \in C^1([a,b])$ が (1.1) の弱い極小値であれば，オイラー・ラグランジュ方程式 (1.8) を満たさなければならない，ということである．オイラー・ラグランジュ方程

式の解を変分問題の停留曲線と呼び，対応する汎関数の値を停留値と呼ぶ．もちろん，停留値が極小値でも極大値でもない場合がある．

最急降下曲線の話に戻って，そのオイラー・ラグランジュ方程式を書いてみよう．一般には，

$$f_u - \frac{d}{dx} f_\xi = f_u - f_{x\xi} - f_{u\xi}\overline{u}' - f_{\xi\xi}\overline{u}'' = 0$$

という式であるが，この場合，関数 f が x に陽に依存しないため，次の関係が成り立つ：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f - \overline{u}' f_\xi) &= f_u\overline{u}' + f_\xi\overline{u}'' - \overline{u}' f_{u\xi}\overline{u}' - \overline{u}' f_{\xi\xi}\overline{u}'' - \overline{u}'' f_\xi \\ &= f_u\overline{u}' - \overline{u}' f_{u\xi}\overline{u}' - \overline{u}' f_{\xi\xi}\overline{u}'' \\ &= \big(f_u - f_{u\xi}\overline{u}' - f_{\xi\xi}\overline{u}''\big)\overline{u}'\end{aligned}$$

（簡単のために，f とその偏微分の引数の $(\overline{u}(x), \overline{u}'(x))$ を省略している）．よって，$\overline{u}' \neq 0$ が成り立つ限り，オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dx}\big(f - \overline{u}' f_\xi\big) = 0$$

という方程式と同値である．このとき，

$$f - \overline{u}' f_\xi = C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

がオイラー・ラグランジュ方程式の第一積分である．

最急降下曲線の場合，

$$f(x, u, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1+\xi^2}{\alpha - u}}$$

であるから，最後の第一積分の式に代入して，$C\sqrt{2g}$ を C で置き換えれば，

$$\sqrt{\frac{1 + (\overline{u}'(x))^2}{\alpha - \overline{u}(x)}} - \overline{u}'(x) \frac{\overline{u}'(x)}{\sqrt{\alpha - \overline{u}(x)}\sqrt{1 + (\overline{u}'(x))^2}} = C$$

を得る．整理して，

$$\frac{1}{\sqrt{(\alpha - \overline{u}(x))(1 + (\overline{u}'(x))^2)}} = C$$

$$(\overline{u}'(x))^2 = \frac{1 - C^2(\alpha - \overline{u}(x))}{C^2(\alpha - \overline{u}(x))}.$$

ここで，経路 $\overline{u}$ がパラメータ ϕ を用いて，$(x(\phi), y(\phi))$ と表せるとする．つまり，$\overline{u}(x(\phi)) = y(\phi)$ である．予想される経路と上の式の形から，解が

$$y(\phi) = \alpha - \frac{1}{C^2}\sin^2\tfrac{\phi}{2} = \alpha - \frac{1}{2C^2}(1 - \cos\phi)$$

という形で書けると仮定してもおかしくない．このとき，

$$\frac{dy}{d\phi} = -\frac{1}{C^2}\sin\tfrac{\phi}{2}\cos\tfrac{\phi}{2}, \qquad (\overline{u}'(x(\phi)))^2 = \frac{1-C^2(\alpha-\overline{u}(x(\phi)))}{C^2(\alpha-\overline{u}(x(\phi)))} = \frac{\cos^2\frac{\phi}{2}}{\sin^2\frac{\phi}{2}}$$

となるので，$\frac{dy}{d\phi} = \frac{d\overline{u}}{dx}\frac{dx}{d\phi}$ より

$$-\frac{1}{C^2}\sin\tfrac{\phi}{2}\cos\tfrac{\phi}{2} = \pm\frac{\cos\frac{\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}\cdot\frac{dx}{d\phi}$$

$\frac{dx}{d\phi} > 0$ とすると，

$$\frac{dx}{d\phi} = \frac{1}{C^2}\sin^2\tfrac{\phi}{2} = \frac{1}{2C^2}(1-\cos\phi).$$

この方程式が積分できて，

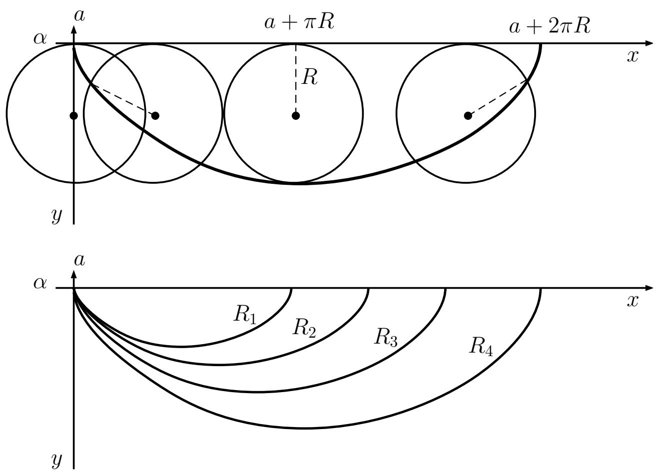
$$x(\phi) = \frac{1}{2C^2}(\phi-\sin\phi) + D.$$

$\phi = 0$ のとき，$\overline{u} = \alpha$ となるので，$x(0) = a$ より，$D = a$.

$R = \frac{1}{2C^2}$ とおいて，上の計算結果をまとめると，

$$\begin{aligned} x(\phi) &= a + R(\phi - \sin\phi) \\ y(\phi) &= \alpha - R(1-\cos\phi) \end{aligned}$$

で与えられる経路はオイラー・ラグランジュ方程式の解である．これは，水平な直線 $y = \alpha$ の下側を転がる半径 R の円の上にある点が描く軌跡で，サイクロイドと呼ばれる．
ここで，$\phi = 0$ を代入すると，$(x(0), y(0)) = (a, \alpha)$ となるので，左端における境界条件が満たされる．右端での境界条件を満たすには，ϕ の範囲と R を適切に定めればよい．下図でわかるように，$R \in (0, \infty)$ を変えていくことによって描かれるサイクロイドは $y < \alpha$ の半平面を埋め尽くす．また，この半平面の任意の点を通るサイクロイドはただ一つである．($x = a$ 上の点はカバーされないが，この点に関しては，明らかに自由落下が最急降下となる．)



サイクロイドはオイラー・ラグランジュ方程式を満たし，停留値を与えることがわかったが，それは極小値または最小値であるための必要条件にすぎない．実際に実験を行ってみると，サイクロイドが最短時間を与える経路であることが確かめられるが，数学的に証明するには，(1.5) の 2 番目の式を強くした条件 $j''(0) > 0$ が満たされるかを考えないといけない．

注． すでに触れたように，最急降下曲線の問題の f は $C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ には入らないため，上の計算を正当化するためには，少し修正が必要である．オイラー・ラグランジュ方程式の導出を $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ というテスト関数を用いて行うのが一つのアプローチである．これは，φ の台（台は $\varphi(x) \neq 0$ を満たす x の集合の閉包として定義される）が (a,b) のコンパクトな部分集合であるような無限回微分可能な関数の空間である．すなわち，$\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ ならば，$\varphi \equiv 0$ が成り立つような両端 a, b の近傍が存在する．φ をこの空間に制限しても変分法の基本補題はそのまま成り立つ．
しかし，$\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ を使っても，$x = a$ での問題を回避できても，別の x で $\overline{u}(x) = \alpha$ とならないことを保証できない．したがって，$\overline{u} \in C^1([a,b])$ であるとして，議論を $\varphi \in C_0^\infty(\{x \in [a,b];\ \overline{u}(x) < \alpha\})$ というテスト関数を用いて進める．そうすることによって，$\{x;\ \overline{u}(x) < \alpha\}$ の開集合では，$\overline{u}$ は上と同じオイラー・ラグランジュ方程式を満たさなければならないことがわかる．この情報を，$\overline{u}$ の値が区間 (a,b) の途中で α に戻ることの物理的な意味と合わせると，サイクロイドという答えにたどり着く．

数学的にはかなり怪しい議論しかできていないので，最急降下曲線問題に対する汎関数の最小値の存在が言えれば，とてもありがたい（このテーマは「非線型解析」の講義で扱う）．または，サイクロイドというオイラー・ラグランジュ方程式の解がどのような十分条件を満たせば，極小値であることが言えるかがわかれば，ありがたい（このテーマは次の節で扱う）．

演習問題

問題 **1.1** 円柱に制限された質点の最急降下曲線を求めよ．ただし，円柱の半径を R として，円柱の軸が重力の方向と平行であるとする．

詳細： 質点が円柱上の点 A から円柱上の他の点 B に移動するのに必要な時間を最短にする円柱上の経路を求める．質点は静止状態から運動を始め，一様な重力場を動き，質点と円柱との間の摩擦力が無視できると仮定する．質点の位置を円柱座標 θ, z を用いて表すことができるとして，独立変数を θ とし，点 A から点 B にたどり着くのに必要な時間を $z(\theta)$ の汎関数として書く．対応するオイラー・ラグランジュ方程式を解くことで，汎関数の極値を求め，その性質を調べる．円柱を平面に広げたときの解の形がどうなるかについても考察する．

問題 **1.2** 次の補題を証明せよ．さらに，補題の定数 c_0, c_1 を g を用いて表せ．

補題

g が区間 $[a,b]$ 上の連続な関数で，$\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$ を満たすすべての関数 $\varphi \in C^2([a,b])$ について

$$\int_a^b g(x)\varphi''(x)\,dx = 0$$

が成立するとき，$c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ が存在し，

$$g(x) = c_1 x + c_0 \qquad \forall x \in [a,b]$$

である．

問題 1.3 $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ に対し，最小化問題

$$\inf_{u \in X} I(u), \qquad I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\,dx, \qquad X = \left\{u \in C^1([a,b]);\ u(a) = \alpha\right\}$$

の minimizer $\overline{u} \in C^2([a,b]) \cap X$ が存在すれば，minimizer $\overline{u}$ が区間 $[a,b]$ の右端 $x = b$ で満たす境界条件を求めよ．

問題 1.4 重力だけで動く地中電車の実現について昔から考察されている．つまり，地球のなかを自由に掘ってトンネルを作ることができれば，地上の 2 点の結ぶ時間を最小化するようにトンネル（経路）の形を設計すればよい．

(1) 微小な太さの球殻で積分することによって地球内の任意の質点における重力ポテンシャルが

$$V(r) = \frac{1}{2}\frac{mg}{R}r^2$$

であることを示せ．ただし，地球が一様であると仮定する．ここで，r は質点の地球の中心からの距離で，m は質点の質量，R は地球の半径である．

(2) 地球上の 2 点 A, B を結ぶ経路が地球の中心を含む一つの平面内にあり，極座標 (r,θ) において $r(\theta)$ の関数として表せると仮定したとき，この経路に沿って重力だけで動く質点が A から B に到着するのに必要な時間を求めよ．

(3) 最短時間を求める変分問題を記述し，対応するオイラー・ラグランジュ方程式の解を求めよ．

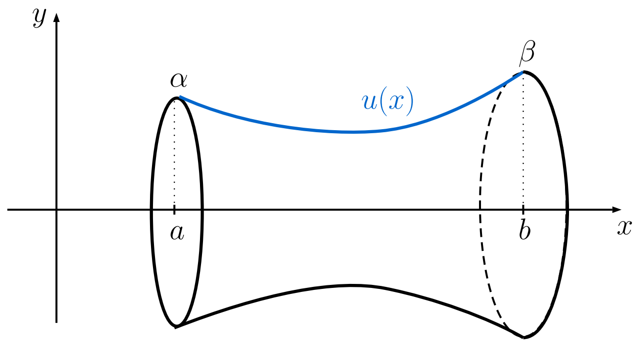
(4) (3) で求めた経路で電車を走らせるとしたら，京都から博多までかかる時間を見積もれ．このトンネルの深さは？

1.2　極小回転面

次の問題を考える：

面積最小の回転面の問題

非負の関数 $u(x)$ のグラフを x-軸のまわりで回転させてできる回転面のうち，面積が最小のものを求めよ．ただし，グラフの x の範囲を区間 $[a,b]$ とし，左端の回転面の半径を $\alpha>0$，右端の半径を $\beta>0$ と固定する．



上記の問題を式を用いて書くと，

$$\inf_{u\in X} J[u], \qquad J[u]=2\pi\int_a^b u(x)\sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx, \quad X=\left\{u\in C^1([a,b]);\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta\right\}. \tag{1.10}$$

1.1節で紹介した一般的な設定での被積分関数は

$$f(x,u,\xi)=2\pi u\sqrt{1+\xi^2}$$

である．最急降下曲線と同様に，x に陽に依存しないため，対応するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dx}(f-u'f_\xi)=0 \qquad \text{または} \qquad f-u'f_\xi=C, \quad C\in\mathbb{R}$$

と書ける．関数 $\overline{u}$ が面積を表す汎関数 J の弱い極小値ならば，このオイラー・ラグランジュ方程式を満たさなければならない．$f_\xi=2\pi u\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}$ より，2π を定数 C に含めておくと，この方程式は

$$\overline{u}\sqrt{1+(\overline{u}')^2}-\overline{u}'\overline{u}\frac{\overline{u}'}{\sqrt{1+(\overline{u}')^2}}=C$$

となる．整理して，

$$\frac{\overline{u}}{\sqrt{1+(\overline{u}')^2}}=C.$$

定数 C がゼロのとき，$\overline{u}\equiv 0$ という定数関数の解を得るが，これは境界条件を満たさないので，以降では $C>0$ として，考察を進める．

$\overline{u}'$ について解くと，

$$\overline{u}' = \pm\frac{1}{C}\sqrt{\overline{u}^2 - C^2}$$

を得るが，$+$ の符号を採用して（実は，マイナスをとっても同じ結果が得られる），変数分離型として積分する：

$$\int \frac{1}{\sqrt{\overline{u}^2 - C^2}}\, d\overline{u} = \frac{1}{C}\int dx.$$

左辺の積分を求めるために，$\overline{u} = C\cosh y$ と置換する．

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \qquad (\cosh y)' = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \sinh y, \qquad \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$$

が成立するから，左辺は $\int dy$ と変形され，$y = \frac{1}{C}(x - D), D \in \mathbb{R}$ のように積分できて，結局，

$$\overline{u}(x) = C\cosh\left(\frac{x - D}{C}\right), \qquad C, D \in \mathbb{R}$$

という一般解を得る．これは懸垂線（英語で catenary) と呼ばれる曲線である．定数 C, D は境界条件 $\overline{u}(a) = \alpha, \overline{u}(b) = \beta$ より決めることになるが，非線形な連立方程式で解析的には解けないため，以下では二つの特別な場合を考える．

(1) $(a, b) = (-h, h), \alpha = \beta = k$ という対称な場合

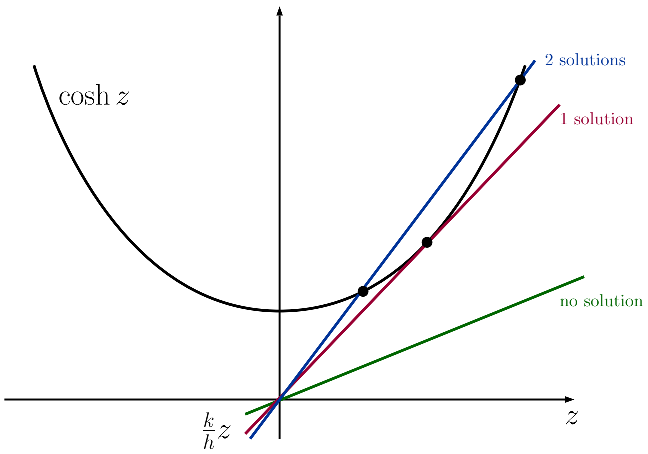
このとき境界条件は

$$C\cosh\left(\frac{-h - D}{C}\right) = k = C\cosh\left(\frac{h - D}{C}\right)$$

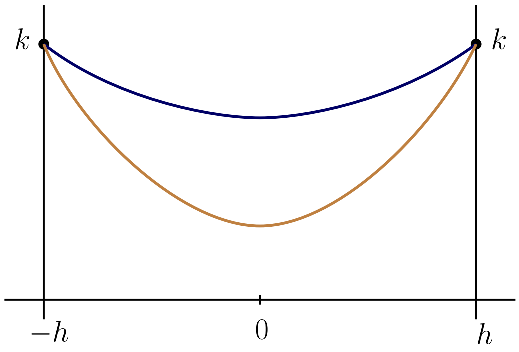
を意味する．cosh が偶関数だから，等式が成り立つのは $-h - D = h - D$ のときと $-h - D = -(h - D)$ のときであるが，前者は $h = 0$ で意味をなさないので，後者から従う $D = 0$ が成り立たなければならない．そこで，$z := \frac{h}{C}$ とおくと，$C\cosh z = k$ という式になり，$\frac{k}{C} = \frac{k}{h}z$ より，

$$\cosh z = \frac{k}{h}z$$

という方程式を z について解けばよい．これも解析的には解けないが，グラフを用いて解の個数を確かめることができる．



$\frac{k}{h}$ がある臨界値 k_c（$k_c \approx 1.50888, z \approx 1.2$ と数値計算できる）より小さければ，解が存在せず，臨界値 k_c に等しければ，解がちょうど 1 個存在し，k_c より大きければ解が 2 個あることがわかる．この二つの解は以下のような浅い懸垂線と深い懸垂線である．



(2) $\overline{u}(0) = 1$ のように左端での値のみ指定する場合

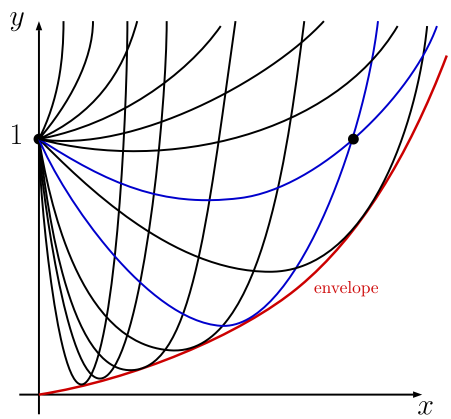
このとき，C, D に対する条件は $C\cosh(\frac{D}{C}) = 1$ となる．$\gamma = \frac{D}{C}$ とおくと，$\frac{1}{C} = \cosh\gamma$ となるので，$\overline{u}(x) = C\cosh(\frac{x-D}{C}) = C\cosh(\frac{x}{C} - \gamma)$ に注意すると，

$$\overline{u}(x) = \frac{\cosh(\cosh\gamma\, x - \gamma)}{\cosh\gamma}$$

という懸垂線の one-parameter family を得る．すなわち，γ を動かしていくと，点 $(0, 1)$ を通るたくさんの懸垂線が得られる．

$$\overline{u}'(x) = \sinh(\cosh\gamma\, x - \gamma), \qquad \overline{u}'(0) = -\sinh(\gamma)$$

より，sinh の値域が $\mathbb{R}$ 全体であることを思い出すと，これらの懸垂線の $(0, 1)$ における傾きは $(-\infty, \infty)$ のすべてが実現されることがわかる．



図で見てとれるように，この懸垂線の族は包絡線（赤色）をもつ．包絡線より上の任意の点を取れば，その点を右端とする懸垂線が二つ（青色）定まる．包絡線より下にある点を右端とする懸垂線が存在しない．この領域に対応する，いわゆる Goldschmidt の解は微分不可能なもので，$x = a$ と $x = b$ に位置する半径 α と β の二つの円盤とそれらを結ぶ x-軸の線分からなる．

ここからは，オイラー・ラグランジュ方程式の解 $\overline{u}$ が極小値を与えるかどうかをどのように見分けるかについて考える．設定としては，$f \in C^3([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ として，変分問題

$$\inf_{u\in X} J[u], \qquad J[u] = \int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx, \qquad X = \left\{u \in C^1([a,b]);\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta\right\} \tag{1.11}$$

に対応するオイラー・ラグランジュ方程式の解 $\overline{u} \in X \cap C^2([a,b])$ が存在するとする．

$\varphi \in C_0^1(a,b) = \{v \in C^1(a,b);\ v(a)=v(b)=0\}$ に対し，$j(\varepsilon) = J[\overline{u}+\varepsilon\varphi]$ とおく．$\overline{u}$ が弱い極小値ならば，$j'(0)=0$ そして $j''(0)\geq 0$ がすべての $\varphi \in C_0^1(a,b)$ に成り立つ，という極小値の必要条件がある．また，$j'(0)=0$ そして $j''(0)>0$ がすべての $\varphi\in C_0^1(a,b)$ について成り立てば，$\overline{u}$ は極小値である，という十分条件がある．正確に言うと，これは $j(\varepsilon)$ が $\varepsilon=0$ で極小値をもつための十分条件で，$J[u]$ が $u=\overline{u}$ で弱い極小値をもつための十分条件でもあることを見るにはちょっとした証明が必要である．いずれにしても，j の 2 階微分が重要であるから，それを計算しておく．

$$\begin{aligned}
j(\varepsilon) &= \int_a^b f\big(x,\overline{u}(x)+\varepsilon\varphi(x),\overline{u}'(x)+\varepsilon\varphi'(x)\big)\,dx \\
j'(\varepsilon) &= \int_a^b \big[f_u\left(x,\overline{u}(x)+\varepsilon\varphi(x),\overline{u}'(x)+\varepsilon\varphi'(x)\right)\varphi(x) \\
&\qquad\qquad + f_\xi\left(x,\overline{u}(x)+\varepsilon\varphi(x),\overline{u}'(x)+\varepsilon\varphi'(x)\right)\varphi'(x)\big]\ dx \\
j''(0) &= \int_a^b \left[f_{uu}(x,\overline{u},\overline{u}')\varphi^2 + 2f_{u\xi}(x,\overline{u},\overline{u}')\varphi\varphi' + f_{\xi\xi}(x,\overline{u},\overline{u}')(\varphi')^2\right]\ dx
\end{aligned}$$

$P(x)=f_{uu}(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)),\ Q(x)=f_{u\xi}(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)),\ R(x)=f_{\xi\xi}(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))$ とおいて，

$$\int_a^b \frac{d}{dx}[w(x)\varphi^2(x)]\,dx = 0 \qquad \forall w \in C^1([a,b])$$

に注意すると，$j''(0)$ を

$$j''(0) = \int_a^b \left[(P+w')\varphi^2 + 2(Q+w)\varphi\varphi' + R(\varphi')^2\right]\ dx$$

と書くことができる．これは

$$j''(0) = \int_a^b \left[R\left(\varphi' + \frac{Q+w}{R}\varphi\right)^2 + \left((P+w') - \frac{(Q+w)^2}{R}\right)\varphi^2\right]\ dx$$

のように変形できるので，関数 w を微分方程式

$$w' = -P + \frac{(Q+w)^2}{R} \tag{1.12}$$

を満たすようにとれば，上の積分の符号が R の符号に支配されることが見込まれる．実際，以下で示すように，$R\geq 0$ in $[a,b]$ は $\overline{u}$ が極小値であるための必要条件である．しかし，$R\geq 0$ を $R>0$ に変えても，十分条件ではない．その理由は，方程式 (1.12) の解が区間 $[a,b]$ 全体で存在するとは

限らないからである．

例 1.1 (1.12) のような非線形な微分方程式の解は局所的な存在しか言えないことを示す例を挙げる．$(a,b)=(-2,2), P\equiv -1, Q\equiv 0, R\equiv 1$ とすると，微分方程式 (1.12) は

$$w' = 1 + w^2$$

となる．この解は $w(x)=\tan(x+c)$ であるが，tan は長さ π の区間でしか定義されないため，c をどのように定めても，$(-2,2)$ 全体で定義される解が得られない．

ルジャンドルの必要条件

汎関数 $J[u]$ が $\overline{u}$ において弱い極小値をもつための必要条件は

$$R(x) = f_{\xi\xi}(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)) \ge 0 \qquad \forall x \in [a,b].$$

Proof. $c\in(a,b)$ が存在して，$R(c)<0$ であると仮定する．R の連続性と微分方程式の解の局所存在より，$\delta>0$ が存在して，$x\in[c-\delta, c+\delta]$ において $R(x)<0$ で，微分方程式

$$w' = -P + \frac{(Q+w)^2}{R}$$

の連続微分可能な解をもつ．

関数 $\varphi\in C^1([a,b])$ を条件

$$\varphi(x)=0,\ \ x\notin(c-\delta,c+\delta), \qquad \varphi(x)\neq 0,\ \ x\in(c-\delta,c+\delta)$$

を満たすように選ぶと，上で定義した第 2 変分は

$$j''(0) = \int_{c-\delta}^{c+\delta}\left[P\varphi^2 + 2Q\varphi\varphi' + R(\varphi')^2\right]\,dx = \int_{c-\delta}^{c+\delta} R\left(\varphi' + \frac{Q+w}{R}\varphi\right)^2\,dx \le 0$$

となる．区間 $(c-\delta, c+\delta)$ において $\varphi' + \frac{Q+w}{R}\varphi = 0$ を境界条件 $\varphi(c-\delta)=0$ のもとで満たす関数 φ は $\varphi\equiv 0$ しかないから，$j''(0)<0$ となり，極小値であることに矛盾する． □

回転面の問題で，Legendre の条件を確認する．$f(x,u,\xi)=2\pi u\sqrt{1+\xi^2}$ より

$$f_{\xi\xi}(x,\overline{u},\overline{u}') = 2\pi\frac{\overline{u}}{(1+(\overline{u}')^2)^{3/2}} = 2\pi\frac{C}{\cosh^2(\frac{x-D}{C})}$$

であるため，すべての正の関数 $\overline{u}$ について正となり，この必要条件を用いて解を排除することができない．

これを受けて，他の条件について考える．微分方程式 (1.12) が区間 $[a,b]$ で解をもてば，十分条件が得られる．(1.12) はリッカチの方程式（Riccati equation）で一般には解けないから，変換

$$w(x) = -Q - R\frac{\nu'(x)}{\nu(x)} \tag{1.13}$$

を $\nu(x) \neq 0\ \forall x \in [a,b]$ の仮定のもとで行い，線形な 2 階微分方程式

$$\frac{d}{dx}(R\nu') + (Q'-P)\nu = 0 \qquad \text{または} \qquad \nu''(x) + \frac{R'}{R}\nu' + \frac{Q'-P}{R}\nu = 0, \tag{1.14}$$

いわゆるヤコビ方程式に直す．境界条件を満たす解 ν が一意的に存在し二つの独立な基本解 ν_1, ν_2 の線形結合 $\nu(x) = C_1\nu_1(x) + C_2\nu_2(x)$ で書けるという一般的な理論結果があり，このような線形で斉次な方程式は扱いやすいので，ありがたいことである．

十分条件

次の 2 つの条件

(a) $R(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$

(b) $\nu(x) \neq 0\ \forall x \in [a,b]$ を満たすヤコビ方程式 (1.14) の解 ν が存在する

が満たされれば，第 2 変分 $j''(0)$ が，恒等的に零でないすべての φ について正となる．

Proof. $\nu(x) \neq 0\ \forall x \in [a,b]$ を満たすヤコビ方程式 (1.14) の解 ν があれば，それを用いて変換 (1.13) を行うことができ，そのように得た w が微分方程式 (1.12) を $[a,b]$ において満たすので，第 2 変分は

$$j''(0) = \int_a^b R\left(\varphi' + \frac{Q+w}{R}\varphi\right)^2 dx = \int_a^b R\left(\varphi' - \frac{\nu'}{\nu}\varphi\right)^2 dx$$

となる．$R(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$ で，$\varphi' + \frac{\nu'}{\nu}\varphi = 0$ を $[a,b]$ で成り立たせる関数 φ は $\varphi \equiv 0$ しかない（境界条件 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ のため）から，$j''(0) > 0$ が従う．　□

実は，オイラー・ラグランジュ方程式との関係に気づけば（ヤコビさんのアイデアである），ヤコビ方程式の解を見つけることができる．積分定数 c_1, c_2 を含むオイラー・ラグランジュ方程式の一般解を $\overline{u}(x,c_1,c_2)$ として，オイラー・ラグランジュ方程式

$$f_u(x,\overline{u}(x,c_1,c_2),\overline{u}'(x,c_1,c_2)) - \frac{d}{dx}\left[f_\xi(x,\overline{u}(x,c_1,c_2),\overline{u}'(x,c_1,c_2))\right] = 0$$

を c_1 について微分すれば，

$$f_{uu}\frac{\partial\overline{u}}{\partial c_1} + f_{u\xi}\frac{\partial\overline{u}'}{\partial c_1} - \frac{d}{dx}\left[f_{u\xi}\frac{\partial\overline{u}}{\partial c_1} + f_{\xi\xi}\frac{\partial\overline{u}'}{\partial c_1}\right] = 0$$

を得る．整理して，P, R, Q を用いて書くと，

$$(P - Q')\frac{\partial \overline{u}}{\partial c_1} - \frac{d}{dx}\left(R\frac{\partial \overline{u}'}{\partial c_1}\right) = 0$$

になる．しかし，これはヤコビ方程式において ν を $\frac{\partial \overline{u}}{\partial c_1}$ に変えたものである．よって，

$$\nu_1 = \frac{\partial \overline{u}}{\partial c_1}, \qquad \nu_2 = \frac{\partial \overline{u}}{\partial c_2}$$

というヤコビ方程式の二つの特殊解を得た．

そこで，ヤコビは

$$\Delta(x, a) = \nu_2(a)\nu_1(x) - \nu_1(a)\nu_2(x)$$

という解に着目した．$\Delta(x, a)$ は $x = a$ でゼロになるが，その右にある $\Delta(\cdot, a)$ の最初の零点 $\overline{a}$ を a の**共役点**と呼ぶ．

注 $\Delta'(a, a) = 0$ ならば，解の一意性より，$\Delta \equiv 0$ となるから，以下では $\Delta'(a, a) \neq 0$ と仮定する．$x = a$ でゼロとなる他の non-trivial な解 $\tilde{\Delta}(x, a)$ に対して，

$$D(x) = k\Delta(x, a), \qquad k = \frac{\tilde{\Delta}'(a, a)}{\Delta'(a, a)},$$

と定義すれば，$D(a) = 0 = \tilde{\Delta}(a, a), D'(a) = \tilde{\Delta}'(a, a)$ が成り立つから，解の一意性より $D \equiv \tilde{\Delta}$ を得て，$\tilde{\Delta}$ は Δ の定数倍（k 倍）である．したがって，$\nu(a) = 0$ を満たす解の零点がすべて一致し，上で定義した Δ の零点を調べればよい．

もし，$\overline{a} > b$ なら，変数を少しシフトすることで $[a, b]$ でゼロにならないようなヤコビ方程式の解が作れるから，十分条件より $\overline{u}$ が minimizer であることが保証される．一方で，$\overline{a} = b$ のとき，第 3 変分以上を考える必要になり，詳細を省略する．また，$\overline{a} < b$ のとき，$\overline{u}$ が minimizer にはならないことが証明されている（詳しくは，[3] の 78 ページを参照）．まとめると，次の条件を得た．

ヤコビの必要条件

$\overline{u}$ が弱い極小値であるための必要条件は

$$\Delta(x, a) \neq 0 \qquad \forall x \in (a, b).$$

以上で極小値のための三つの必要条件：オイラー・ラグランジュ方程式，Legendre の条件と Jacobi の条件を紹介した．一方で，上で述べたように，十分条件も得られる．

十分条件

次の三つの条件が成り立てば，$\overline{u}$ は弱い極小値である．

(1) $\overline{u}$ はオイラー・ラグランジュ方程式の解である．

(2) 強い Legendre の条件：$R(x) = f_{\xi\xi}(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)) > 0 \ \forall x \in [a, b]$.

(3) 強い Jacobi の条件：$\Delta(x, a) \neq 0 \ \forall x \in (a, b]$.

このJacobiの条件には幾何学的な解釈がある．形式的に見てみよう．オイラー・ラグランジュ方程式の解で条件 $\overline{u}(a) = \alpha$ を満たすものを一つのパラメータ c を用いて，$\overline{u}(x, c)$ と表す（つまり，解の one-parameter family である）．二つの近い解

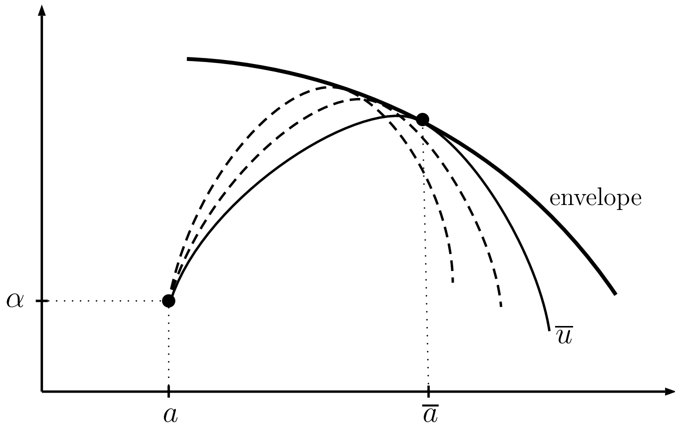
$$\overline{u}(x, c), \qquad \overline{u}(x, c+\delta) \approx \overline{u}(x, c) + \delta \frac{\partial \overline{u}}{\partial c}(x, c)$$

のグラフの交点 $[x_0, y_0]$ は（小さい誤差を許せば）$\frac{\partial \overline{u}}{\partial c}(x_0, c) = 0$ を満たすので，共役点に近いと予想できる（$\nu(x) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial c}(x, c)$ はヤコビ方程式の解で，$\nu(a) = 0$ を満たすので，一意性より $0 = \frac{1}{\delta}[\overline{u}(x_0, c+\delta) - \overline{u}(x_0, c)] \approx \frac{\partial \overline{u}}{\partial c}(x_0, c) = \nu(x_0)$ を満たす x_0 は（近似的に）共役点でなければならない）．一方で，

$$y = \overline{u}(x, c), \qquad \frac{\partial \overline{u}}{\partial c}(x, c) = 0$$

を満たす (x, y) は曲線族 $\{\overline{u}(x, c)\}_{c \in \mathbb{R}}$ の包絡線を形成する．これを簡単に理解するには，包絡線が $y = g(x)$ のグラフで表されると仮定する．すると，任意の x に対して c が存在し（これを $c(x)$ とする），$g(x) = \overline{u}(x, c(x))$ が成り立つ．さらに包絡線の条件として，この点 x において g と $\overline{u}$ のグラフは共通の接線をもつ，すなわち，$g'(x) = \overline{u}_x(x, c(x))$．今，すべての x について成り立つ $g(x) = \overline{u}(x, c(x))$ の両辺を x について微分すると，$g'(x) = \overline{u}_x(x, c(x)) + \overline{u}_c(x, c(x))c'(x)$ を得るが，$g'(x) = \overline{u}_x(x, c(x))$ より $\overline{u}_c c' = 0$，つまり $\overline{u}_c = 0$ が示される．

点 $[a, \alpha]$ から始まるオイラー・ラグランジュ方程式の解の族に包絡線があれば，ある解 $\overline{u}$ の共役点 $\overline{a}$ は $\overline{u}$ のグラフが包絡線と接する点に対応する．すなわち，$\overline{u}$ のグラフが点 $[b, \beta]$ に到達するまでに包絡線に接しないのであれば，$\overline{u}$ は極小値だと言える．逆に，途中で包絡線に接する点があれば，その点が共役点 $\overline{a}$ となるので，$\overline{u}$ は極小値ではないことがわかる．



例 1.2

$$J[u] = \int_0^5 (u'+1)^2 (u')^2 \, dx$$

の minimizer を境界条件

$$u(0) = 2, \qquad u(5) = 1$$

のもとで求める．

$f(x,u,\xi) = (\xi+1)^2\xi^2$ が ξ にしか依らないので，オイラー・ラグランジュ方程式は $f_\xi = const$，つまり，

$$4(u')^3 + 6(u')^2 + 2u' = const$$

となり，一般解は

$$\overline{u}(x) = c_1 x + c_2,$$

境界条件を満たす解は

$$\overline{u}(x) = -\frac{1}{5}x + 2.$$

- ルジャンドルの条件：

  $$R = f_{\xi\xi} = 2(6(\overline{u}')^2 + 6\overline{u}' + 1) = \frac{2}{25} > 0$$

  より満たされる．

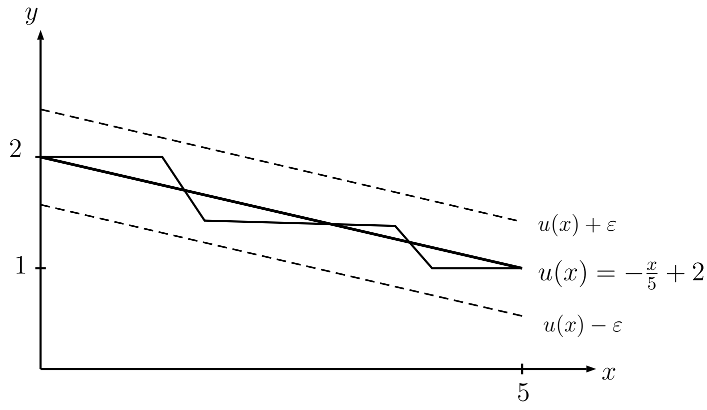
- ヤコビの条件：

  $$\nu_1(x) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial c_1} = x, \qquad \nu_2(x) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial c_2} = 1$$

  より $\Delta(x,0) = x$ で，この関数は $x=0$ 以外の零点をもたないため，ヤコビ条件も満たされる．よって，$\overline{u}$ は弱い極小値である．

弱い極小値であるにもかかわらず，$\overline{u}(x) = -\frac{1}{5}x + 2$ の任意の近傍に $J[u]$ をより小さくする関数 u が存在する．実際，下図のように，u が傾き 0 と -1 を持つ線分からなる折れ線だと，$J[u] = 0$ となる（一方，$J[\overline{u}] = \frac{16}{125}$）．傾きが変わる頻度を増やせば，この u が上の $\overline{u}$ に限りなく近づくようにできる．このように得た関数 u は滑らかではないが，角を軟化することによって，いくらでも滑らかにすることができ，滑らかな関数で汎関数の値を限りなくゼロに近づけることができる．
境界条件を変更しても，オイラー・ラグランジュ方程式の解が $c_1 \in (-1,0)$ を満たす傾き c_1 の線形関数であれば，同じような状況になる．

この現象はこれまで考えてきたことと矛盾しない理由は，折れ線の関数が弱い極小値に対して要求している「C^1-ノルムで近い」という条件を満たしていないことである．実際，この折れ線の微分は 0 か -1 で，$\overline{u}(x) = -\frac{1}{5}x + 2$ の微分 $-\frac{1}{5}$ に近くないから，弱い極小値のみ考える限り，比較の対象外となる．



回転面の問題に戻ろう．上で考えた場合 (2) の $\overline{u}(0) = 1$ を満たす懸垂線の族の図を見ると ($\overline{u}(a) = \alpha$ としても図は本質的に変わらない)，解が二つある場合に，より深い懸垂線は右端の点に到達する前に包絡線に接することがわかる．よって，深い懸垂線は極小値ではないことが言える．一方，浅い方の懸垂線は包絡線に接しないから，上記の十分条件がすべて満たされ，極小値を与える．

一方，対称な境界条件 $u(-h) = u(h) = k$ を課す場合 (1) では，解析的なアプローチもできる．ヤコビ方程式の二つの解は

$$\nu_1(x) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial C} = \cosh\left(\frac{x-D}{C}\right) - \left(\frac{x-D}{C}\right)\sinh\left(\frac{x-D}{C}\right), \qquad \nu_2(x) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial D} = -\sinh\left(\frac{x-D}{C}\right)$$

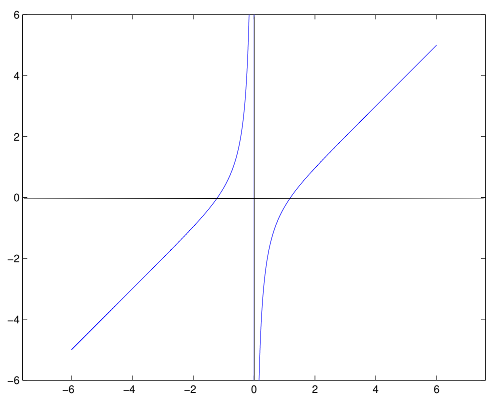
となり，共役点 $\overline{a}$ は

$$\frac{\nu_1(\overline{a})}{\nu_2(\overline{a})} = \frac{\nu_1(a)}{\nu_2(a)}$$

という方程式を満たす．$\overline{z} = \frac{\overline{a}-D}{C}, z = \frac{a-D}{C}$ とおけば，この方程式は

$$\overline{z} - \coth\overline{z} = z - \coth z$$

と変形される．奇関数 $z - \coth z$ のグラフは以下に示す．



考えている対称な場合は $D = 0, a = -h < 0$ であるから，$z = -\frac{h}{C} < 0$．したがって，$z - \coth z$

のグラフが z-軸と交わる点 $z_c \approx -1.199679$ より小さい z について Jacobi の条件が満たされない（このとき，$\overline{a} < |a| = h = b$ となるから，深い懸垂線に対応）．逆に，z_c より大きい負の z について Jacobi の条件が満たされる（浅い懸垂線に対応）．

演習問題

問題 1.5 両端を固定したひもや鎖が自重だけで変形する状況を考える．適切な物理的な仮定のもとでひものポテンシャル・エネルギーを書け．また，定常なひもの形状がポテンシャル・エネルギーの極小値を与えるという原理を用いて，定常なひもが極小回転面の断面である懸垂線と同じ形をとることを示せ．

問題 1.6 汎関数

$$J[u] = \int_1^2 x^2 (u'(x))^2 \, dx$$

を境界条件 $u(1) = 0, u(2) = 1$ のもとで最小化せよ．Legendre の条件および Jacobi の条件を適用し，オイラー・ラグランジュ方程式の解が弱い極小値であるか判断せよ．また，左端での境界条件を満たす解の one-parameter family を図示して，その包絡線を求めよ．

問題 1.7 汎関数

$$J[u] = \int_0^1 \sqrt{u(x)(1 + (u'(x))^2)} \, dx$$

と境界条件 $u(0) = 2, u(1) = 5$ に対する変分問題を考える．境界条件を満たすオイラー・ラグランジュ方程式の解を求め，それらの解が Jacobi の必要条件を満たすか確認せよ．

問題 1.8 極小回転面の問題において $(a, b) = (-h, h), \alpha = \beta = k > 0$ という設定に対応する石鹸膜の実験を考える．半径 k の二つの丸い輪っかを距離 $h = 0$ からはじめてゆっくり話していく．このときに，ある時点でカテノイドの形をした石鹸膜が切れて，二つの輪っかに張られる膜ができるが，切れる時点における石鹸膜の面積は二つの輪っかの総面積より真に大きい．この事実を，講義で扱った深い懸垂線，浅い懸垂線に対する回転面と Goldschmidt の解をそれぞれプロットして（横軸は無次元化した輪っかの距離 h/k，縦軸は無次元化した石鹸膜の面積 A/k^2），物理的な考察も交えて説明せよ．

1.3 Dido 女王の問題

この問題の名前は，紀元前 814 年ごろ，現在のレバノンにあった王国の Dido 女王は追われて現在のチュニジアに逃亡し，「牛の皮で覆えるだけの土地をください」と現地の王に請い，それを許された上で，牛の皮を細い紐に裁断して，それで広大な土地を囲って，カルターゴ王国の始まりとなった，という伝説に由来する．数学の言葉で言うと，周長が与えられた平面内の閉曲線のうち，面積が最大となるものを求めることになる．この節では，これを曲線ではなく，関数のグラフに単純化した次の問題を扱う．

Didoの問題

点 $(-a,0)$ と点 $(a,0)$ を結び，長さ ℓ をもつ関数 $u(x)$ のグラフのうち，x-軸とグラフに囲まれた面積が最大となる関数 u を求めよ．

すなわち，

$$J[u]=\int_{-a}^{a}u(x)\,dx$$

を条件

$$u(-a)=0,\qquad u(a)=0,\qquad \int_{-a}^{a}\sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx=\ell$$

のもとで最大にする C^1-関数 $u(x)$ を求める．

このような積分型の制約条件がつく変分問題（等周問題ともよばれる）を解くことを目指して，一般的な設定から始める．つまり，$f\in C^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}), g\in C^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ として，変分問題

$$\inf_{u\in X}J[u],\qquad J[u]=\int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx \tag{1.15}$$
$$X=\left\{u\in C^1([a,b]);\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta,\ \int_a^b g(x,u(x),u'(x))\,dx=0\right\}$$

の極小値が満たすオイラー・ラグランジュ方程式を導くことを考える．(Didoの問題は上限を求める問題であるが，オイラー・ラグランジュ方程式を考える上ではどちらでも同じ考察になるので，前節の設定と合わせて最小化の問題にした．)

制約条件を満たす関数のなかで最小値を求めるため，変分を制約条件を満たす範囲で計算しなければならず，摂動として任意の $\varphi\in C_0^1(a,b)$ について単純に $u+\varepsilon\varphi$ をとることができない．そこで，制約条件を満たすようにこの摂動を修正するために，固定した関数 w に対してもう一つの自由度 δ を導入し，$u+\varepsilon\varphi+\delta w$ が X の元となるように陰関数定理により δ を ε の関数として決める．

詳細を述べるため，u を極小値とする．

$$\frac{d}{dx}\left[g_\xi(x,u(x),u'(x))\right]\neq g_u(x,u(x),u'(x))$$

を満たす $x\in(a,b)$ が存在すると仮定すると，

$$\int_a^b\left[g_\xi(x,u(x),u'(x))w'(x)+g_u(x,u(x),u'(x))w(x)\right]\,dx\neq 0$$

を満たす $w\in C^1([a,b]), w(a)=w(b)=0$ がとれる．また，w を定数倍すれば，

$$\int_a^b\left[g_\xi(x,u(x),u'(x))w'(x)+g_u(x,u(x),u'(x))w(x)\right]\,dx=1$$

とできる．

つぎに，$\varphi \in C_0^1(a,b)$ を任意にとり，上の w と $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\begin{aligned} F(\varepsilon,\delta) &= J[u+\varepsilon\varphi+\delta w] = \int_a^b f\left(x, u+\varepsilon\varphi+\delta w, u'+\varepsilon\varphi'+\delta w'\right)\,dx \\ G(\varepsilon,\delta) &= \int_a^b g\left(x, u+\varepsilon\varphi+\delta w, u'+\varepsilon\varphi'+\delta w'\right)\,dx \end{aligned}$$

とおく．このとき，次が成り立つ：

$$G(0,0)=0, \qquad G_\delta(0,0)=1.$$

二つ目の式は先ほどの w のとり方による．陰関数定理の仮定が満たされるので，$\varepsilon_0>0$ と $v_\varphi(0)=0$ を満たす関数 $v_\varphi \in C^1([-\varepsilon_0,\varepsilon_0])$ があり，

$$G(\varepsilon, v_\varphi(\varepsilon))=0 \qquad \forall\varepsilon\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$$

が成り立つことがわかる．つまり，このような ε について $u+\varepsilon\varphi+v_\varphi(\varepsilon)w\in X$ が言える．上式を ε で微分すると，

$$G_\varepsilon(\varepsilon, v_\varphi(\varepsilon)) + G_\delta(\varepsilon, v_\varphi(\varepsilon))v_\varphi'(\varepsilon) = 0 \qquad \forall\varepsilon\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$$

を得るので，

$$v_\varphi'(0) = -G_\varepsilon(0,0).$$

極小値の条件 $F(0,0)\le F(\varepsilon, v_\varphi(\varepsilon))\ \forall\varepsilon\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$ より（正確に言うと，極小値の定義で出てくる近傍の大きさに応じて ε_0 を小さくする必要がある場合，小さくした値を ε_0 と置き直す）

$$\frac{d}{d\varepsilon}F(\varepsilon, v_\varphi(\varepsilon))\Big|_{\varepsilon=0} = F_\varepsilon(0,0)+F_\delta(0,0)v_\varphi'(0)=0.$$

$F_\varepsilon(0,0)$ は φ に依存するが，$F_\delta(0,0)$ は φ に依存しないから，$\lambda=F_\delta(0,0)$ とおけば，

$$F_\varepsilon(0,0)-\lambda G_\varepsilon(0,0)=0,$$

すなわち，

$$\int_a^b \left(\left[f_\xi(x,u,u')\varphi'+f_u(x,u,u')\varphi\right]-\lambda\left[g_\xi(x,u,u')\varphi'+g_u(x,u,u')\varphi\right]\right)\,dx=0.$$

部分積分と φ の任意性より

$$\frac{d}{dx}\left[f_\xi(x,u,u')\right]-f_u(x,u,u')=\lambda\left(\frac{d}{dx}\left[g_\xi(x,u,u')\right]-g_u(x,u,u')\right).$$

よく見ると，これは汎関数

$$\int_a^b \left[f(x, u(x), u'(x)) - \lambda g(x, u(x), u'(x)) \right] dx \tag{1.16}$$

に対する（制約条件なしの）オイラー・ラグランジュ方程式であることがわかる．つまり，条件つき最小化問題 (1.15) の極小値 $\overline{u}$ が存在すれば，$\lambda \in \mathbb{R}$ があって，$\overline{u}$ が汎関数 (1.16) に対するオイラー・ラグランジュ方程式の解である（言い換えれば，この汎関数の停留値を与える）．この λ のことをラグランジュ未定乗数と言う．ラグランジュ未定乗数 λ は，求める極小値が制約条件を満たすという条件より決まる．
このようにして，問題 (1.15) の弱い極小値の候補を求めるアルゴリズムを得た：

(1) 汎関数 (1.16) に対するオイラー・ラグランジュ方程式の一般解 $u(x, c_1, c_2)$ を求める．ここで，c_1, c_2 は積分定数である．

(2) 定数 λ, c_1, c_2 を次の三つの条件より定める：

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta, \quad \int_a^b g(x, u(x), u'(x))\, dx = 0.$$

例 1.3 上の Dido の問題では区間 $(-a, a)$ をとって，

$$u(-a) = u(a) = 0, \qquad f(x, u, \xi) = u, \qquad g(x, u, \xi) = \sqrt{1 + \xi^2} - \frac{\ell}{2a}$$

としている．

極大値 $\overline{u}$ が存在するなら，$\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して，$\overline{u}$ は

$$\int_{-a}^a \left[u(x) - \lambda \left(\sqrt{1 + (u'(x))^2} - \tfrac{\ell}{2a} \right) \right] dx$$

に対するオイラー・ラグランジュ方程式の解である．

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$1 + \lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} \right) = 0$$

であるが，これを積分して，

$$\lambda \frac{u'}{\sqrt{1 + (u')^2}} = -(x - C_1), \qquad C_1 \in \mathbb{R},$$

u' について解くと，

$$u'(x) = \pm \frac{x - C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2}}$$

となるので，もう一度，積分することで，

$$u(x) = \pm\sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2} + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

がわかる．すなわち，u のグラフは円

$$(x - C_1)^2 + (u(x) - C_2)^2 = \lambda^2$$

の一部である．

境界条件 $u(-a) = u(a) = 0$ と長さが指定されている条件より C_1, C_2, λ を求める．円の式で $x = \pm a$ とすれば，$(a - C_1)^2 = \lambda^2 - C_2^2 = (-a - C_1)^2$ が従うので，$C_1 = 0$ を得る．また，λ が円の半径，a/λ がグラフが表す円弧の半角の $\sin$ であるから，$2a \leq \ell$ であれば（区間の長さが $2a$ だから，ℓ がこれより大きいことを想定している），C_2 と λ も一意に決まる．

演習問題

問題 1.9 （オイラーの弾性曲線の問題）
伸び縮みしない長さ ℓ の弾性体のゴム紐の形を関数 u のグラフで表すと，その弾性エネルギーは

$$J[u] = \int_a^b \frac{(u''(x))^2}{(1 + (u'(x))^2)^{5/2}}\,dx$$

で書ける．境界条件を

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta, \quad u'(a) = \gamma, \quad u'(b) = \delta$$

とする．指定された長さ ℓ をもつ J の弱い極小値 u が満たすオイラー・ラグランジュ方程式を導け．また，この微分方程式を（例えば，特別な場合に限って）解くことに挑戦してみよ．数値的に解いてもかまわない．

問題 1.10 汎関数

$$J[u] = \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2\,dx$$

を境界条件 $u(0) = 0, u(1) = 0$ と制約条件

$$\int_0^1 u(x)\,dx = \frac{1}{6}$$

のもとで最小化せよ．

問題 1.11 自由に曲がれるような重い鎖が重力のもとで二点 $(-a, h)$ と (a, h) の間にぶら下がっ

ている状況を考える．鎖の形が関数 u のグラフで与えられ，長さが

$$\ell = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx$$

で指定されているとき，安定な形状 $u(x)$ を求めよ．

1.4　いくつかの進んだトピック

1.4.1　シャボン玉の形状

次の 2 次元のシャボン玉の簡単なモデルを考える：シャボン玉を作る石鹸膜が厚さゼロの界面で，そのエネルギーは

$$\text{長さエネルギー} = \text{表面張力（定数）} \times \text{界面の長さ}$$

のみである．界面は滑らかな閉曲線で，曲線が囲う面積（内側の空気の量）が定まっている．

(1) まず，1 個のシャボン玉の定常な形状を求める．この形状は長さエネルギーの最小値を与えるものである．ただし，面積が指定された値 A_0 であるという条件がある．

最小化問題（シャボン玉 1 個）

ジョルダン曲線 $\gamma : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$ で，面積条件

$$A(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (\gamma_1(s)\gamma_2'(s) - \gamma_2(s)\gamma_1'(s))\, ds = A_0$$

を満たす曲線のうち，長さ

$$L(\gamma) = \int_0^{\ell} |\gamma'(s)|\, ds$$

を最小にするものを見つける．

ラグランジュ未定乗数法を適用すると，実数 λ が存在して，求める曲線 γ が汎関数

$$F(\gamma) = \int_0^{\ell} |\gamma'(s)|\, ds - \frac{\lambda}{2} \int_0^{\ell} (\gamma_1(s)\gamma_2'(s) - \gamma_2(s)\gamma_1'(s))\, ds$$

に対するオイラー・ラグランジュ方程式を満たすことが言える．そこで，滑らかな試験関数 $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ をとり，摂動 $\gamma(s) + \varepsilon\psi(\gamma(s))$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して変分が消えるという条件

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(\gamma(s) + \varepsilon\psi(\gamma(s)))\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

を調べればよい．以下の計算を見やすくするために，$\phi(s) = \psi(\gamma(s))$ とおいて，s の引数を

省略する．

$$F(\gamma+\varepsilon\phi)=\int_0^\ell\left\{|\gamma'+\varepsilon\phi'|-\frac{\lambda}{2}\Big((\gamma_1+\varepsilon\phi_1)(\gamma_2'+\varepsilon\phi_2')-(\gamma_2+\varepsilon\phi_2)(\gamma_1'+\varepsilon\phi_1')\Big)\right\}ds$$

だから，

$$\frac{d}{d\varepsilon}F(\gamma+\varepsilon\phi)=\int_0^\ell\left\{\frac{\gamma'\cdot\phi'+\frac{\varepsilon}{2}|\phi'|^2}{|\gamma'+\varepsilon\phi'|}-\frac{\lambda}{2}\Big(\gamma_1\phi_2'+\gamma_2'\phi_1+2\varepsilon\phi_1\phi_2'-\gamma_2\phi_1'-\gamma_1'\phi_2-2\varepsilon\phi_1'\phi_2\Big)\right\}ds.$$

$\varepsilon=0$ を代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}F(\gamma+\varepsilon\phi)\Big|_{\varepsilon=0} &= \int_0^\ell\left\{\frac{\gamma'\cdot\phi'}{|\gamma'|}-\frac{\lambda}{2}\Big(\gamma_1\phi_2'+\gamma_2'\phi_1-\gamma_2\phi_1'-\gamma_1'\phi_2\Big)\right\}ds\\ &= -\int_0^\ell\left\{\left(\frac{\gamma'}{|\gamma'|}\right)'\cdot\phi-\lambda(-\gamma_2',\gamma_1')\cdot(\phi_1,\phi_2)\right\}ds\end{aligned}$$

を得る．ただし，最後の等式で部分積分を施し，ϕ にかかっている微分をそれ以外の項に移した．この量がゼロであることと曲率 κ と法線ベクトル ν の定義を合わせて使うと，

$$\int_0^\ell(\kappa-\lambda)(\phi\cdot\nu)|\gamma'|\,ds=0$$

となるが，$\phi(s)=\psi(\gamma(s))$ であり，$|\gamma'(s)|ds$ が曲線の微小長さであり，κ,λ,ν がパラメータの取り方に依らない幾何学的な量であるから，上式は $(\kappa-\lambda)(\psi\cdot\nu)$ を弧長パラメータで積分すると，どんな ψ に対してもゼロとなるという式である．つまり，

$$\kappa=\lambda=\text{定数},$$

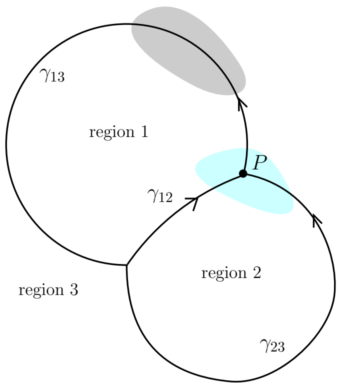
言い換えれば,「曲率がすべての点で同じ値になるような曲線」という結果になる．

この性質を満たすジョルダン曲線は半径 $1/\lambda$ の円しかない．それを確認するためには，接触円の中心

$$c(s)=\gamma(s)+\frac{1}{\kappa(s)}\nu(s)$$

を s について微分すればよい．また，半径 λ は今の時点で未知であるが，指定された面積 A_0 よりすぐに計算できる．

(2) 次に，図のようにくっついている 2 個のシャボン玉（それぞれの面積は A_1,A_2）の定常な形状と接合点における角度を求める．



図の記号の通り泡が区切る領域に 1，2，3 と番号をふると，それぞれの領域を隔てる「界面」なる曲線を隣り合う領域の番号で表す．そのとき，泡 1 は $\gamma_1 = \gamma_{13} \cup \gamma_{12}$，泡 2 は $\gamma_2 = \gamma_{23} \cup (-\gamma_{12})$ の曲線で表される．

ラグランジュ未定乗数法により，汎関数

$$F(\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}) = L(\gamma_{12}) + L(\gamma_{13}) + L(\gamma_{23}) + \lambda_1 A(\gamma_1) + \lambda_2 A(\gamma_2)$$

の停留値を求めればよい．前節と同じように変分を計算するが，今回は試験関数として 2 種類のものを考える．一つは台（関数がゼロでない領域の閉包）がすべてのジャンクション（接合点）から離れているような試験関数（図では灰色），もう一つは台がひとつだけの接合点にかかっているような試験関数（図では水色）である．

図の灰色の台を持つような試験関数をとると，汎関数において影響する項は

$$L(\gamma_{13}) + \lambda_1 A(\gamma_{13})$$

のみである（ここで，試験関数による摂動は γ_{12} を変えないので，面積項で γ_{13} からの貢献だけ考えればよいという意味で A の引数を γ_{13} とした）．しかし，これは前節と全く同じ状況になっており，接合点から離れたところの曲線はすべて円の一部であることがわかる．

よって，あとは接合点で成り立つ条件を求めればよい．図の水色の領域に台がある試験関数 $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を考えて，三つの曲線を反時計回りにパラメータ表示する：$\gamma_{12}(s), s \in [0, \ell_{12}]$, $\gamma_{13}(s), s \in [0, \ell_{13}], \gamma_{23}(s), s \in [0, \ell_{23}]$．ここで，$\gamma_{12}(\ell_{12}) = \gamma_{13}(0) = \gamma_{23}(\ell_{23}) = P$ が接合点となることに注意する．また，k_{12}, k_{13}, k_{23} の値を次が成り立つように決める：

$$\psi(\gamma_{12}(s)) = 0\ \forall s \in [0, k_{12}+\delta],\ \ \psi(\gamma_{13}(s)) = 0\ \forall s \in [k_{13}-\delta, \ell_{13}],\ \ \psi(\gamma_{23}(s)) = 0\ \forall s \in [0, k_{23}+\delta].$$

ψ の台の取り方より，このような k_{12}, k_{13}, k_{23} は存在する．ただし，δ は十分小さい正数である．$\phi_{12}(s) = \psi(\gamma_{12}(s)), \phi_{13}(s) = \psi(\gamma_{13}(s)), \phi_{23}(s) = \psi(\gamma_{23}(s))$ とおいて，前節と同様の

計算をすると，次の式を得る：

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon}F(\gamma+\varepsilon\phi)\Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{k_{12}}^{\ell_{12}} \frac{\gamma_{12}'\cdot\phi_{12}'}{|\gamma_{12}'|}\,ds + \int_0^{k_{13}} \frac{\gamma_{13}'\cdot\phi_{13}'}{|\gamma_{13}'|}\,ds + \int_{k_{23}}^{\ell_{23}} \frac{\gamma_{23}'\cdot\phi_{23}'}{|\gamma_{23}'|}\,ds \\
&\quad + \frac{\lambda_1}{2}\int_0^{k_{13}} \big((\gamma_{13})_1(\phi_{13})_2' + (\gamma_{13})_2'(\phi_{13})_1 - (\gamma_{13})_2(\phi_{13})_1' - (\gamma_{13})_1'(\phi_{13})_2\big)\,ds \\
&\quad + \dots
\end{aligned}
$$

面積項の変分が長いため，代表として γ_1 が囲う面積への γ_{13} による貢献のみ記した．部分積分を行う前の式を書いたのは，前節の計算と違って，部分積分において境界項が現れるからである．実際，

$$
\begin{aligned}
\int_0^{k_{13}} \frac{\gamma_{13}'\cdot\phi_{13}'}{|\gamma_{13}'|}\,ds &= -\int_0^{k_{13}} \left(\frac{\gamma_{13}'}{|\gamma_{13}'|}\right)'\cdot\phi_{13}\,ds - \frac{\gamma_{13}'}{|\gamma_{13}'|}(0)\cdot\phi_{13}(0) \\
\int_0^{k_{13}} \big((\gamma_{13})_1(\phi_{13})_2' - (\gamma_{13})_2(\phi_{13})_1'\big)\,ds &= \int_0^{k_{13}} \big(-(\gamma_{13})_1'(\phi_{13})_2 + (\gamma_{13})_2'(\phi_{13})_1\big)\,ds \\
&\quad -(\gamma_{13})_1(0)(\phi_{13})_2(0) + (\gamma_{13})_2(0)(\phi_{13})_1(0)
\end{aligned}
$$

$s=k_{13}$ での値が現れないのは，$\phi_{13}(k_{13})=0$ だからである．

変分がゼロという条件は次のように書ける：

$$
\begin{aligned}
&-\int_{k_{12}}^{\ell_{12}} \left(\frac{\gamma_{12}'}{|\gamma_{12}'|}\right)'\cdot\phi_{12}\,ds - \int_0^{k_{13}} \left(\frac{\gamma_{13}'}{|\gamma_{13}'|}\right)'\cdot\phi_{13}\,ds - \int_{k_{23}}^{\ell_{23}} \left(\frac{\gamma_{23}'}{|\gamma_{23}'|}\right)'\cdot\phi_{23}\,ds \\
&-\lambda_1\int_{k_{12}}^{\ell_{12}} \nu_{12}\cdot\phi_{12}|\gamma_{12}'|\,ds - \lambda_1\int_0^{k_{13}} \nu_{13}\cdot\phi_{13}|\gamma_{13}'|\,ds \\
&-\lambda_2\int_{k_{23}}^{\ell_{23}} \nu_{23}\cdot\phi_{23}|\gamma_{23}'|\,ds + \lambda_2\int_{k_{12}}^{\ell_{12}} \nu_{12}\cdot\phi_{12}|\gamma_{12}'|\,ds \\
=\ &-\tau_{12}(\ell_{12})\cdot\phi_{12}(\ell_{12}) + \tau_{12}(0)\cdot\phi_{13}(0) - \tau_{23}(\ell_{23})\cdot\phi_{23}(\ell_{23}) \\
&+\frac{\lambda_1}{2}\gamma_{12}^{\perp}(\ell_{12})\cdot\phi_{12}(\ell_{12}) - \frac{\lambda_1}{2}\gamma_{13}^{\perp}(0)\cdot\phi_{13}(0) - \frac{\lambda_2}{2}\gamma_{12}^{\perp}(\ell_{12})\cdot\phi_{12}(\ell_{12}) + \frac{\lambda_2}{2}\gamma_{23}^{\perp}(\ell_{23})\cdot\phi_{23}(\ell_{23})
\end{aligned}
$$

ただし，ν_{ij} は領域 i に向く界面 γ_{ij} への単位法線ベクトル，τ_{ij} は γ_{ij} への単位接戦ベクトル，$\gamma_{ij}^{\perp}=(-(\gamma_{ij})_2,(\gamma_{ij})_1)$ である．

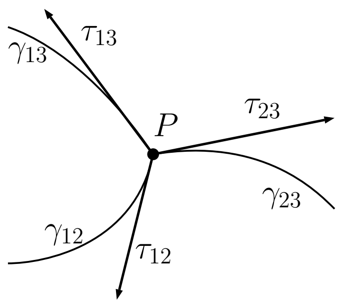
$\phi_{12}(\ell_{12})=\phi_{13}(0)=\phi_{23}(\ell_{23})=\psi(P)$，そして，$\gamma_{12}(\ell_{12})=\gamma_{13}(0)=\gamma_{23}(\ell_{23})=P$ という事実に気づくと，上式の最後の行が消えることがわかる．それ以外の項を整理すれば，

$$
\begin{aligned}
&-\int_{k_{12}}^{\ell_{12}} (\kappa_{12}-\lambda_1+\lambda_2)(\phi_{12}\cdot\nu_{12})|\gamma_{12}'|\,ds - \int_0^{k_{13}} (\kappa_{13}-\lambda_1)(\phi_{13}\cdot\nu_{13})|\gamma_{13}'|\,ds \\
&+\int_{k_{23}}^{\ell_{23}} (\kappa_{23}-\lambda_2)(\phi_{23}\cdot\nu_{23})|\gamma_{23}'|\,ds = \Big(-\tau_{12}(\ell_{12}) + \tau_{13}(0) - \tau_{23}(\ell_{23})\Big)\cdot\psi(P)
\end{aligned}
$$

を得る．試験関数 ψ の任意性より，以下の 4 つの条件式が成立しなければならない：

$$
\kappa_{12}=\lambda_1-\lambda_2,\quad \kappa_{13}=\lambda_1,\quad \kappa_{23}=\lambda_2,\quad (\tau_{12}-\tau_{13}+\tau_{23})(P)=0.
$$

最初の 3 式はそれぞれの曲線が円の一部であるという既にわかっていることを言っているが，それぞれの円の半径の関係も見えてきている．例えば，二つの泡の面積が等しいとき，$\kappa_{12} = \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ となるので，泡の間の界面は直線になる．また，符号の関係で，γ_{12} の曲線は大きい方の泡に食い込む形になることもわかる．



接合点における接線ベクトルの再定義

一方で，最後の式は接合点の角度に対する条件である．パラメータの取り方によって接線ベクトル τ の符号が変わるためわかりにくいが，$\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ を上図のように定義しなおせば，4 つ目の式は

$$\tau_{12} + \tau_{13} + \tau_{23} = 0 \qquad \text{at } P$$

となる．τ_{ij} はすべて単位ベクトルだから，これは接合点の角度が $120° - 120° - 120°$ であることを意味する．(これを Herring の条件と言う.)

以上でわかったことを整理する．シャボン玉が複数個くっついているときは，それぞれの石鹸膜は円の一部の形をしている．それぞれの円の半径は指定された面積で決まる．また，3 本の界面が接合点で交わるとき，必ず対称な $120° - 120° - 120°$ の接合点となる．この結果はシャボン玉や接合点の数に依らず成り立つ．

(3) それぞれの界面の表面張力が異なるという一般化を考える．すなわち，与えられた面積のもとで長さ汎関数

$$aL(\gamma_{12}) + bL(\gamma_{13}) + cL(\gamma_{23})$$

を最小化する．ここで，$L(\gamma)$ は曲線 γ の長さである．
$a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，接合点が安定する角度を求める．

変分の計算は同様で，それぞれの界面が円の一部であることがわかる．また，接合点における条件は

$$a\tau_{12} + b\tau_{13} + c\tau_{23} = 0 \qquad \text{at } P$$

となり，問題の a, b, c に対する角度は $150°, 90°, 120°$ である．

1.4.2 存在理論：絶対連続関数

1 変数関数に対する変分問題が歴史の中でどのように数学的に議論されたかを簡単に紹介する．例1.2のような反例をきっかけに，区分的に滑らかな（つまり，微分できない角があり，その間は

滑らかであるような）関数を最小化の対象とする理論が最初に進められた．しかし，このような関数の数学的な扱いが難しいことから，他の関数空間での変分法が開発されている．

Lipschitz 連続な関数の変分法

まずは，理論をより広いリプシッツ関数の空間に拡張する．

$$\inf_{u\in X} J[u], \qquad J[u]=\int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx, \qquad X=\{u\in \mathrm{Lip}([a,b]);\ u(a)=\alpha, u(b)=\beta\} \tag{1.17}$$

ここで，f, f_u, f_ξ が $[a,b]$ で連続だと仮定すれば，$J[u]$ が $u\in X$ に対して意味をもつ．

$C^2([a,b])$ における極小値が存在すれば，$\mathrm{Lip}([a,b])$ における極小値でもあることが示せるので，古典理論のリプシッツ関数への拡張は自然なものである．

今，$\overline{u}$ が極小値ならば，$f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))$ が一般には微分できないため，古典理論で導いたオイラー・ラグランジュ方程式が成り立つことが期待できないが，つぎの結果がある．

du Bois-Raymond (1879)

定理 1.1 $\overline{u}\in X$ が問題 *(1.17)* の解ならば，$c\in\mathbb{R}$ が存在し，つぎの積分オイラー・ラグランジュ方程式を満たす：

$$f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)) = c+\int_a^x f_u(y,\overline{u}(y),\overline{u}'(y))\,dy, \qquad a.e.\ x\in[a,b]. \tag{1.18}$$

Proof. $\varphi\in \mathrm{Lip}_0([a,b])$（0 は $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ という意味である）に対して j を $j(\varepsilon)=J[\overline{u}+\varepsilon\varphi]$ で定義する

$$j'(0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b \frac{1}{\varepsilon}\Big(f(x,\overline{u}+\varepsilon\varphi,\overline{u}'+\varepsilon\varphi')-f(x,\overline{u},\overline{u}')\Big)\,dx$$

が存在する．実際，仮定より f は有界集合において u,ξ についてリプシッツ連続で，引数として現れる関数がすべて有界であるから，被積分関数は $C(|\varphi(x)|+|\varphi'(x)|)$ で抑えられ，ルベーグの優収束定理より

$$0=j'(0)=\int_a^b\Big(f_u(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))\varphi(x)+f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))\varphi'(x)\Big)\,dx.$$

ここで，第 1 項で部分積分を行うと，

$$\int_a^b\left(f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))-\int_a^x f_u(y,\overline{u}(y),\overline{u}'(y))\,dy\right)\varphi'(x)\,dx=0$$

を得る．試験関数 φ が微分した状態で入っているが，このときは定数 c が存在して，$(\cdot)$ の中身が恒等的に c に等しいことが示せるので，補題は証明された．　□

$\overline{u}\in C^2([a,b])$ ならば，積分型オイラー・ラグランジュ方程式を x について微分すれば，古典的

なオイラー・ラグランジュ方程式が得られる．

リプシッツ関数のなかでの解について正則性の結果がある．例えば，

- $\overline{u} \in X$ が積分型オイラー・ラグランジュ方程式 (1.18) の解で，$\xi \mapsto f(x, \overline{u}(x), \xi)$ という写像がほとんどすべての $x \in [a, b]$ について狭義凸ならば，$\overline{u} \in C^1([a, b])$ である．
- （Hilbert-Weierstrass, 1875）$\overline{u} \in X$ が積分型オイラー・ラグランジュ方程式 (1.18) の解で，$f \in C^m$ $(m \geq 2)$ がすべての $x \in [a, b]$ と $\xi \in \mathbb{R}$ について $f_{\xi\xi}(x, \overline{u}(x), \xi) > 0$ を満たすならば，$\overline{u} \in C^m([a, b])$ である．

絶対連続な関数の変分法

リプシッツ関数の設定では，上記のような正則性による必要条件が得られたが，存在定理が得られないため，許容関数空間を絶対連続な関数 $\mathrm{AC}([a, b])$ に広げることを考える．実際，絶対連続な関数では（汎関数がある条件を満たせば）minimizer の存在が証明できるようになる．古典理論では，ヤコビの定理などの十分条件もあるが，最小値ではなく，極小値の存在しか保証されない．

よって，以下では，つぎの変分問題を考える：

$$\inf_{u \in X} J[u], \qquad J[u] = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx, \qquad X = \{u \in \mathrm{AC}([a, b]);\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta\} \tag{1.19}$$

ここで，$u \in X$ の微分が有界とは限らないので，$J[u]$ が定義されるよう f に対して適切な条件を課す必要がある．例えば，以下の Tonelli の定理では，f を下から有界な連続関数としている．このとき，$x \mapsto f(x, u(x), u'(x))$ という写像が下から有界な可測関数だから，$J[u]$ の積分はルベーグ積分の意味で意味をもつ（当然，$+\infty$ になる可能性がある）．

AC における理論が成功した背景にルベーグ積分の理論があったことがあることに注意しよう．実際，絶対連続な関数 u の定義はつぎの二つの定義と同値であることが重要となる：

(D1) u の微分 u' がほとんどいたるところで存在し，可積であり，

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(y)\, dy \qquad \forall x \in [a, b]$$

(D2) 区間 $[a, b]$ で可積な関数 w が存在し，

$$u(x) = u(a) + \int_a^x w(y)\, dy \qquad \forall x \in [a, b]$$

また，

$$\mathrm{Lip}([a, b]) \quad \subset \quad \mathrm{AC}([a, b]) \quad \subset \quad \mathrm{BV}([a, b]) \quad \subset \quad \text{a.e. 微分可能な関数}$$

という関係が成り立つことを思い出そう．ここで，BV は有界変動という意味である．

以下の Leonida Tonelli による定理は変分問題の存在理論で画期的な結果である．

Tonelli, 1915

定理 1.2 f が連続で，ξ について凸な関数で，

$$\exists r > 1, C_1 > 0, C_2 \in \mathbb{R} \quad \textit{such that} \quad f(x,u,\xi) \geq C_1|\xi|^r + C_2 \quad \forall(x,u,\xi) \in [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

という強圧性条件を満たすならば，変分問題 *(1.19)* の *minimizer* が存在する．

Proof. （概要）汎関数の値 $J[u]$ が有界であるような $u \in X$ が存在する（例えば，境界条件を満たす線形関数）ので，最小化列 $\{u_n\} \subset X$ がとれる：

$$\lim_{n\to\infty} J[u_n] = \inf_{u\in X} J[u].$$

十分大きな n に対して，

$$\int_a^b \left(C_1|u_n'|^r + C_2\right)\, dx \leq J[u_n] \leq \inf_{u\in X} J[u] + 1$$

が成り立つから，列 $\{u_n'\}$ は $L^r(a,b)$ で有界である．L^r が回帰的空間だから，その単位球が弱コンパクトのため，ある $w \in L^r(a,b)$ に弱収束する部分列（同じく $\{u_n\}$ と記す）がとれる．AC$([a,b])$ の元 $\overline{u}$ を

$$\overline{u}(x) = \alpha + \int_a^x w(y)\, dy, \qquad x \in [a,b]$$

で定義する．弱収束より任意の $x \in [a,b]$ について

$$\int_a^x u_n'(y)\, dy = \int_a^b u_n'(y)\chi_{(a,x)}(y)\, dy \to \int_a^b w(y)\chi_{(a,x)}(y)\, dy = \int_a^x w(y)\, dy.$$

ただし，$\chi_{(a,x)}$ は区間 (a,x) の特性関数である．したがって，u_n は $\overline{u}$ に各点収束する（一様収束であることも示せる）．また，$\overline{u}(b) = \beta$ もわかる．

f の連続性と ξ についての凸性を利用すると，

$$J[\overline{u}] \leq \lim_{n\to\infty} J[u_n] = \inf_{u\in X} J[u]$$

が証明できる（詳細を割愛する）．よって，$\overline{u}$ は最小化関数である． □

この定理が切り開いたいわゆる直接法は次の構成要素を含む：

- 最小化列の存在とその部分列の適切な収束（通常は u_n' は弱収束，u_n は各点または一様収束）
- 汎関数の下半連続性（$J[\overline{u}] \leq \liminf J[u_n]$）
- 境界条件など制約条件が極限で維持される性質（一様収束で保存される条件，微分の弱収束で保存される条件：弱収束の場合は凸性が必要となる場合が多い）

許容関数を絶対連続な関数に広げたことで，必要条件であるオイラー・ラグランジュ方程式が満たされるということが証明できなくなる．実際，リプシッツ関数における証明では，優収束定理を用いて $j'(0)$ の存在を示したが，AC では微分が発散する可能性があるため，この議論が適用できない．しかも，技術的な問題ではなく，Tonelli の定理の仮定を満たす滑らかな汎関数でもオイラー・ラグランジュ方程式が成り立たない反例が作れる．

また，Tonelli の定理の仮定を満たす滑らかな汎関数でも，AC における inf が Lip における inf より真に小さいという Lavrentiev phenomenon が起こり得る．これは数値計算の観点から絶望的である．しかし，ある仮定をおけば，Lavrentiev phenomenon を排除し，存在と必要条件と両方が成立する状況を再現できる．以下では，その仮定の例を二つ挙げる：

- (Tonelli-Morrey) f, f_u, f_ξ が x, u, ξ について連続で，任意の有界集合 $S \subset \mathbb{R}$ に対して定数 C と可積関数 $d(x)$ が存在し，

  $$|f_u(x,u,\xi)| + |f_\xi(x,u,\xi)| \le C\left(|\xi| + |f(x,u,\xi)|\right) + d(x) \qquad \forall (x,u,\xi) \in [a,b] \times S \times \mathbb{R}$$

  が成り立てば，任意の弱い極小値 $\overline{u}$ は積分型のオイラー・ラグランジュ方程式を満たす．この仮定に加えて，f が ξ について凸で，$\overline{u}$ に沿って Nagumo growth があれば，つまり，$\lim_{x\to\infty} \theta(x)/x = +\infty$ を満たす関数 $\theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ が存在し，

  $$f(x, \overline{u}(x), \xi) \ge \theta(|\xi|) \qquad \forall x \in [a,b],\, \xi \in \mathbb{R}$$

  が成り立てば，$\overline{u}$ がリプシッツ連続であることが示せる．Lavrentiev phenomenon が起こらず，オイラー・ラグランジュ方程式が成り立つことが言えるから好都合である．

- (Clarke-Vinter) $\overline{u} \in \mathrm{AC}([a,b])$ が強い minimizer で，f が x に陽に依存しない連続関数で，ξ について凸，$\overline{u}$ に沿って Nagumo growth をもつならば，$\overline{u}$ はリプシッツ連続である．

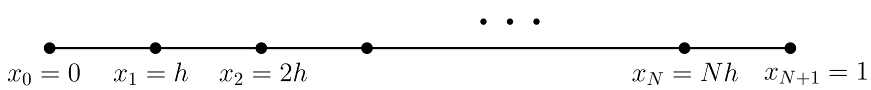
1.4.3　最小化問題の数値計算について

様々な数値解法を勉強する出発点となるような基本的なアイデアのみ紹介する．モデル問題として

$$\min_{u \in X} J[u], \qquad J[u] = \int_0^1 (u'(x))^2\,dx, \qquad X = \left\{u \in C^2([0,1]);\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta\right\}$$

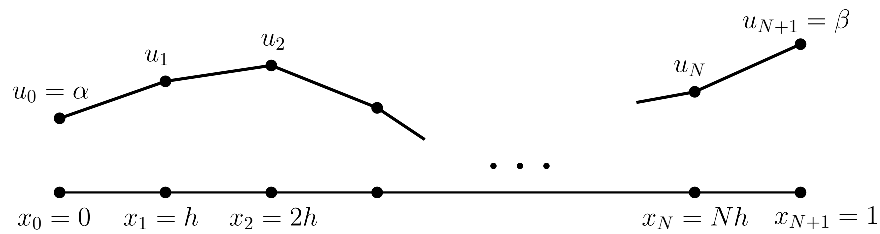
を考える．

(1) 区間 $[0,1]$ を $(N+1)$-等分する（$N \in \mathbb{N}$）．このとき，部分区間の長さを $h = \frac{1}{N+1}$，節点を $x_i = ih$ とする．

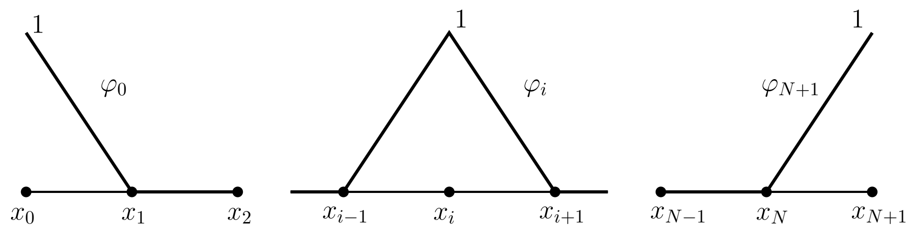


一般には，部分区間の長さは等しくなくてもよい（すなわち，$h_i = |x_{i+1} - x_i|$ が定数でなくてもよい）.

(2) 真の解 u を分割 $\{x_0, \ldots, x_{N+1}\}$ 上の折れ線関数 U_N で近似する.



次のような基底関数 $\{\varphi_i\}$, $I = 0, \ldots, N+1$（有限要素法では Courant basis function と呼ばれる）



を用いて，U_N は

$$U_N(x) = \alpha\varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i(x) + \beta\varphi_{N+1}(x)$$

と表せる．ただし，u_i は節点 $x_i = ih$ での U_N の値である.

(3) $J[u]$ の $u \in X$ についての最小化という無限次元の最適化問題を $j(u_1, \ldots, u_N) = J[U_N]$ の $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ についての最小化という有限次元の最適化問題で置き換える. u_0, u_{N+1} が変数として出てこないのは境界条件より α, β と決まっているからである.

このように離散化したことにより，無限次元の問題をコンピュータで扱える有限次元問題で近似したことになる.

$$j(\boldsymbol{u}) = \int_0^1 \left[\alpha\varphi_0'(x) + \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i'(x) + \beta\varphi_{N+1}'(x) \right]^2 dx$$

だから，j は $u_1, \ldots, u_N$ の N 変数の 2 次関数である.
例えば，$N = 2$ のとき，

$$j(u_1, u_2) = 3\left[(-\alpha + u_1)^2 + (-u_1 + u_2)^2 + (-u_2 + \beta)^2 \right]$$

と計算できる.

(4) 多変数関数 $j(u_1, \ldots, u_N)$ の最小化を行う.
問題に応じた様々な最適化の数値解法が開発されているが，ここではそれらの解法の出発点

となる最急降下法を紹介する．この方法の基本的なアイデアは，適当に決めた初期点 $\boldsymbol{u}^0$ から始めて，j が最急降下する方向，つまり $-\nabla j(\boldsymbol{u}^0)$ に沿って，下がれるだけ下がって（すなわち，この方向に制限した j を最小化して＝ line search），たどり着いた点を $\boldsymbol{u}^1$ として，この点で探索方向を $-\nabla j(\boldsymbol{u}^1)$ に切り替えて，この操作を収束するまで繰り返す，というものである．アルゴリズムの概要は次のようになる．

(a) $k = 0$ とする．

(b) 初期値 $\boldsymbol{u}^0 = (u_1^0, \ldots, u_N^0)$ を選ぶ．

(c) j の $\boldsymbol{u}^k$ における最急降下方向 $\boldsymbol{g}^k = -\nabla_{\boldsymbol{u}} j(\boldsymbol{u}^k)$ を求める．

(d) 直線 $\boldsymbol{u}^k + t\boldsymbol{g}^k, t \geq 0$ に沿って J の最小値を計算する（直線探索という 1 変数 t についての最小化問題，二分法などで近似的に解く）．最小値は t_k で達成されるとする．

(e) $\boldsymbol{u}^{k+1} = \boldsymbol{u}^k + t_k\boldsymbol{g}^k$ とおく．

(f) 収束判定条件
$$\left|\frac{j(\boldsymbol{u}^{k+1}) - j(\boldsymbol{u}^k)}{j(\boldsymbol{u}^k)}\right| < tol$$
が満たされるか確認する．満たされなければ，$k = k + 1$ として，(c) に戻る．満たされる場合，終了する．

関数 j の等高線は最小値の近傍で細い谷を作るとき，探索方向はギザギザの形をして収束が遅くなる．この対策として，前処理（等高線を”丸く”する操作）を行ったり，より効率のよい探索方向を用いたりする．例えば，共役勾配法（CG 法）は遅くても N 回の探索方向切り替えを行えば最小値に収束することが示される．しかし，CG 法は基本的には 2 次関数にしか対応しないので，その非線形バージョンや他のアプローチ（Newton 法，BFGS 法など）も開発された．詳しくは，例えば [9] を参照するとよい．

2　パターン形成

生き物の体などに現れる模様の形成メカニズムを解明するため，化学反応の数理モデルを解析する．この内容に関係する日本語のテキストは例えば，[2] がある．

2.1　反応拡散方程式の導出

多数の個体数の運動のモデル方程式を導出する．以下の考察は人口だけではなく，化学物質・粒子・細菌・細胞・熱量・疫病・噂など様々な対象にも適用できるが，説明をわかりやすくするために，人口や動物の生態系または粒子を例にとって考える．

Ω を個体が動く領域として，$P(t, x)$ は時刻 t，場所 x における個体・粒子の密度（単位面積当たりの個体数）とする．すなわち，連続的なアプローチをとり，$x \in U_n, U_{n+1} \subset U_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ で，$|U_n| \to 0$ as $n \to \infty$ を満たすような $U_n \subset \Omega$ に対して
$$P(t, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{時刻}\, t\, \text{において}\, U_n \text{のなかにいる個体数}}{|U_n|}.$$

このように定義しておくと，

$$\int_U P(t,x)\,dx \quad = \quad \text{時刻}\ t\ \text{において領域}\ U\ \text{にいる個体数}$$

今，P の時間変化は，個体の運動と，個体の生成と消滅による．個体が密度の高いところから低いところへ運動する原理を表す Fick の法則

$$\boldsymbol{J}(t,x) = -d(x)\nabla_x P(t,x)$$

が成り立つと仮定する．ここで，$\boldsymbol{J}(t,x)$ は流束（flux）である．つまり，(t,x) において方向 $\boldsymbol{n}$ に単位面積・単位時間あたりに動く個体数は $\boldsymbol{J}(t,x)\cdot\boldsymbol{n}$ で与えられる．また，$d(x)$ は場所 x における拡散係数，$\nabla_x P$ は P の空間変数についての勾配ベクトル $(\frac{\partial P}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial P}{\partial x_n})$ である．この法則は，ある方向に個体が動く速度はこの方向での個体密度の方向微分に比例することを言っている．

次に，生成・消滅・狩り・化学反応などによる個体数の変化を反応率とよばれる関数 f で表す．$f(t,x,P)$ は (t,x) において単位時間・単位面積あたりに生成される個体数を意味する．

釣り合いの条件より $P(t,x)$ の支配方程式を導く．このため，任意の部分領域 $U\subset\Omega$ をとる．U における個体数の時間変化は $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_U P(t,x)\,dx$ で表される．生成・消滅による U における個体数の単位時間あたりの増加は $\displaystyle\int_U f(t,x,P(t,x))\,dx$ である．さらに，U の境界 ∂U から流れ出る個体数は $\displaystyle\int_{\partial U}\boldsymbol{J}(t,x)\cdot\boldsymbol{n}(x)\,dS$ と書ける．ただし，$\boldsymbol{n}(x)$ は境界上の点 $x\in\partial U$ における U への外向き単位法線ベクトルである．

釣り合いの条件は

$$\frac{d}{dt}\int_U P(t,x)\,dx = -\int_{\partial U}\boldsymbol{J}(t,x)\cdot\boldsymbol{n}(x)\,dS + \int_U f(t,x,P(t,x))\,dx$$

となる．右辺の第 1 項に発散定理を適用し，さらに Fick の法則を用いると，

$$-\int_{\partial U}\boldsymbol{J}(t,x)\cdot\boldsymbol{n}(x)\,dS = -\int_U \operatorname{div}\left(\boldsymbol{J}(t,x)\right)\,dx = \int_U \operatorname{div}\left(d(x)\nabla_x P(t,x)\right)\,dx$$

のように U での積分に変形できる．集合 U が任意だったので，

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t,x) = \operatorname{div}\left(d(x)\nabla_x P(t,x)\right) + f\left(t,x,P(t,x)\right) \tag{2.1}$$

が各点で成り立つ．この方程式を反応拡散方程式と言い，右辺の第 1 項は拡散，第 2 項は反応を表している．$d(x)=d$ が場所に依らない定数のとき，

$$\operatorname{div}\left(d\nabla_x P(t,x)\right) = d\operatorname{div}\left(\nabla_x P(t,x)\right) = d\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 P}{\partial x_n^2}\right) =: d\Delta P$$

で定義される Laplace 作用素 ΔP が現れる．さらに，反応がなければ，

$$\frac{\partial P}{\partial t} = d\Delta P$$

と書かれる熱方程式（物体のなかの熱伝導の基本モデル）が得られる．

2.2　ランダム・ウォーク

ブラウン運動のように，粒子の運動はランダムな熱揺らぎに関係することが知られているから，拡散方程式は酔歩（ランダム・ウォーク）のモデルよりも導かれることを確認する．1 次元の簡単なモデルでは，粒子が時間 Δt で右に Δx だけ動く確率が $p_R = 0.5$ で，左に Δx だけ動く確率が $p_L = 0.5$ であるとする．ここで，粒子は Δt の時間間隔で直線上の格子点 $x_0 + k\Delta x, k \in \mathbb{Z}$ にのみ存在できると仮定している．

さらに，粒子がたくさんあって，すべてが同じ時間間隔で同じ格子上で動くという状況を考える．時刻 t における場所 x での粒子の数を $P(t,x)$ とすれば，任意の格子点 x_0 に対して

$$P(t_0 + \Delta t, x_0) = p_R P(t_0, x_0 - \Delta x) + p_L P(t_0, x_0 + \Delta x). \tag{2.2}$$

これは，時刻 t_0 に点 x_0 にいた粒子はすべて次の時刻にこの点を離れて，点 $x_0 - \Delta x$ にいた粒子の $100p_R\%$ が x_0 に移動し，同様に，点 $x_0 + \Delta x$ にいた粒子の $100p_L\%$ が x_0 に移動するからである．

テーラー展開を用いて，上の式に現れるすべての項を時刻 t_0，点 x_0 における量で表す：

$$\begin{aligned}
P(t_0 + \Delta t, x_0) &= P(t_0, x_0) + \frac{\partial P}{\partial t}(t_0, x_0)(\Delta t) + \cdots \\
\frac{1}{2}P(t_0, x_0 - \Delta x) &= \frac{1}{2}P(t_0, x_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial x}(t_0, x_0)(-\Delta x) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t_0, x_0)(-\Delta x)^2 + \cdots \\
\frac{1}{2}P(t_0, x_0 + \Delta x) &= \frac{1}{2}P(t_0, x_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial x}(t_0, x_0)(\Delta x) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t_0, x_0)(\Delta x)^2 + \cdots
\end{aligned}$$

(2.2) に代入して，整理すれば，

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t_0, x_0)(\Delta t) + \cdots = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t_0, x_0)(\Delta x)^2 + \cdots$$

を得る．$\Delta x \to 0, \Delta t \to 0$ のとき，$\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \to D > 0$ と仮定して，この式を Δt で割って，$\Delta x \to 0, \Delta t \to 0$ とすると，

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

のように，1 次元の熱方程式が復元される．

この導出より，拡散係数の単位が「(距離)^2/(時間)」であることがわかる．また，物質などが拡散する時間が拡散した距離の 2 乗に比例することから，この係数を実験で確認できて，もちろん，温度・媒質などに依存するものである．

上では，粒子が左と右に動く確率が等しいことを仮定したが，一つの方向が僅かに優先される（つまり，$p_R \neq p_L$ で $|p_R - p_L|$ が小さい）とき，同じような計算により

$$\frac{\partial P}{\partial t} + V\frac{\partial P}{\partial x} = D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

という方程式が導かれる．$V\frac{\partial P}{\partial x}$ の項を移流項とよぶ．また，一般次元では，優先される方向を表すベクトル $\boldsymbol{V}(x)$ に対して，次の方程式が導出される：

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla_x P = D\Delta P + f.$$

2.3　反応項と境界条件

ここでは，反応拡散方程式に関する他のトピックを取り上げる．反応項 f の具体的な形と，Ω の境界で課される条件である．

反応項の形を決めるには，

$$\frac{\partial P}{\partial t} = f(t, P)$$

という拡散効果なしの人口増減の力学系モデルを考える．つまり，このときは P は個体数を表している．

人口モデルとしてよく知られているのはマルサスの法則

$$f(P) = kP, \qquad k \in \mathbb{R},\ k > 0$$

またはロジスティック方程式

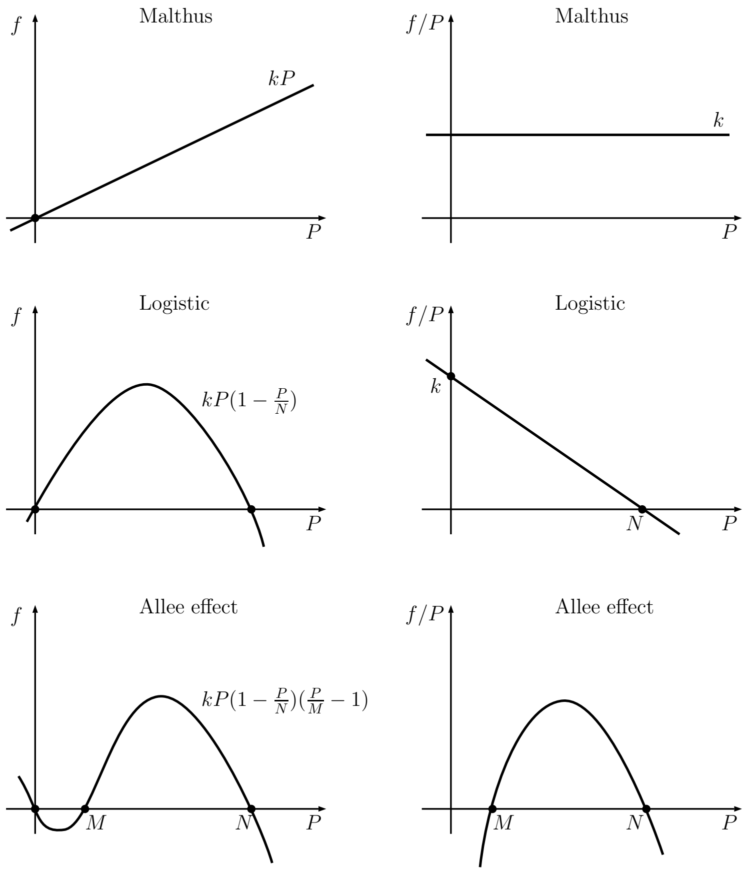
$$f(P) = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right)$$

がある．これに加えて，人口が少ない（密度が低い）と相手が見つからないなどの理由で不利な状況になるという効果はアリー効果と言い，$0 < M < N$ に対して

$$f(P) = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right)\left(\frac{P}{M} - 1\right)$$

でモデル化できる．

以下の図はそれぞれの増加率と一人当たりの増加率を示す．



このような反応項を用いた一般の反応拡散方程式は

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D\Delta P + aP\left(1-\frac{P}{N}\right)\left(\frac{P}{M}-1\right)$$

と書かれる．

次に，化学反応のモデルを考える．例えば，物質 A が拡散しながら

$$A \hookrightarrow^k C + D$$

の反応をおこすとする．ここで，k が反応率，すなわち，単位時間，単位体積あたり反応する分子の割合，である．化学物質 A の濃度を同じく A とすると，その時間変化を表す方程式は

$$\frac{\partial A}{\partial t} = D\Delta A - kA$$

となる．

複数の物質が反応する自己触媒反応

$$A + B \hookrightarrow^k 2A$$

を表すモデル方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= D_A \Delta A + kAB\\ \frac{\partial B}{\partial t} &= D_B \Delta B - kAB\end{aligned}$$

は反応拡散系とよばれる連立方程式である．物質 A の分子と物質 B の分子が単位体積で出会う可能性が AB だからこのような反応項が現れる．この一般化として，物質 A の p 個の分子が物質 B の 1 個の分子と反応して，物質 A の $(p+1)$ 個の分子が作られる反応

$$p \times A + B \hookrightarrow^k (p+1) \times A$$

を表すモデル方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= D_A \Delta A + kA^pB\\ \frac{\partial B}{\partial t} &= D_B \Delta B - kA^pB\end{aligned}$$

である．

他に，有名な例として Gray-Scott モデル

$$\begin{aligned}&A + 2B \hookrightarrow^{k_1} 3B\\ &B \hookrightarrow^{k_2} C\end{aligned}$$

があるが，ここで，物質 A は連続的で一様にレート k_3 で追加され，物質 A, B, C は同様に除去されるとする．このモデル方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= D_A \Delta A - k_1AB^2 + k_3 - k_3A\\ \frac{\partial B}{\partial t} &= D_B \Delta B + k_1AB^2 - k_2B - k_3B\end{aligned}$$

となる．

最後に境界条件について述べる．化学反応など現象が起きる領域が境界をもつとき，この境界における外の世界との関わり方を指定する．数学的には，解を一意的に決めるのに必要な条件となる．

例えば，外の環境との関わりがなく，物質の供給・除去がなく，すべての反応が Ω 内でおきるような閉じた系（例えば，シャーレ）では，境界における流束がゼロである：$x \in \partial\Omega$ に対して $\boldsymbol{J}(x) \cdot \boldsymbol{n}(x) = 0$．Fick の法則を思い出すと，

$$\nabla P(t, x) \cdot \boldsymbol{n}(x) = 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega$$

という no-flux 境界条件，または Neumann 境界条件，または反射境界条件という条件を得る．1 次元のとき（$\Omega = (a, b)$），

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t, a) = \frac{\partial P}{\partial x}(t, b) = 0$$

という式になる．人口のモデルでは，個体が離れられないような沖の島，熱伝導では断熱状態を想像すればよい．

他の重要な境界条件として Dirichlet 境界条件

$$P(t, x) = 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega$$

がある．これは吸収境界条件とも呼ばれ，Ω の外側での値は 0 で外に出た物質はすべて吸収されるという意味をもつ．人口の場合は境界に触れる個体が殺される，熱伝導の場合は Ω の外側が常に温度が 0 度であるような物質で囲まれている，というふうに解釈できる．

右辺がゼロであるような境界条件は斉次条件と言うが，とくにゼロである必要がなく，一般の条件は次のような形になる．

$$\begin{aligned}
\text{Neumann boundary condition} \quad & \ldots \quad \nabla P(t, x) \cdot \boldsymbol{n}(x) = \phi(x) \\
\text{Dirichlet boundary condition} \quad & \ldots \quad P(t, x) = \phi(x) \\
\text{Robin boundary condition} \quad & \ldots \quad \nabla P(x) \cdot \boldsymbol{n}(x) + a(x)P(t, x) = \phi(x)
\end{aligned}$$

他に，混合境界条件（mixed boundary condition，境界がいくつかの部分に分かれており，それぞれの部分で異なるタイプの境界条件が指定される），そして周期境界条件（periodic boundary condition）がある．

演習問題

問題 2.1 2 次元の拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad D > 0$$

に変数変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を施すと，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

に変換されることを確認せよ．

問題 2.2 $P(t, x)$ を時刻 t，場所 x におけるある動物の個体数密度とする．この動物が直線上に生息していて，酔歩で動くとする．この酔歩は右方向に少し偏っている場合を考える．つまり，右に動く確率が $p_R > 0.5$，左に動く確率は $p_L = 1 - p_R < 0.5$ で，$p_R - p_L$ が小さい状況である．反

応（生成・消滅）がないとしたときに，$P(t,x)$ が移流項を含む方程式

$$\frac{\partial P}{\partial t} + V\frac{\partial P}{\partial x} = D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

を満たすことを示し，V と D の具体的な値を求めよ．

問題 2.3 $P(t,x,y)$ を時刻 t，場所 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ におけるある動物の個体数密度とする．この動物が 2 次元空間に生息していて，酔歩で動くとする．

(1) 酔歩の方向に偏りがないとする．$\mathbb{R}^2$ の直交格子を用いて，ある定数 D に対して，$P(t,x,y)$ が

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)$$

という方程式に従うことを示せ．

(2) 上の導出が座標の取り方によらないことを示せ.（ヒント：$(X,Y) = (ax+by, -bx+ay)$ が (x,y) 座標を回転させた座標であるとし（ただし，$a^2+b^2=1$），$\Delta_{XY}P = \Delta_{xy}P$ が成り立つことを確認する.）

(3) 問題 (1) の設定をどのように変えれば,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D_1\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + D_2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

という非等方的拡散方程式が得られるか答えよ.

問題 2.4 化学反応の数学的モデルで最初に提案されたモデルの一つとして，I. Prigogine (1968) によるブラッセレータ（Brusselator）モデルである（Prigogine 氏の研究室が当時ブリュッセル市にあったからこの名前がつけられた）．その反応は次の通りである：

$$A \hookrightarrow^{k_1} X, \quad B+Y \hookrightarrow^{k_2} Y+D, \quad 2X+Y \hookrightarrow^{k_3} 3X, \quad X \hookrightarrow^{k_4} E.$$

物質 A と B の濃度が常に定数で維持されるような形で，A, B が供給されているとして，X と Y に対する反応拡散系を書け.

問題 2.5 塩水を溜めた二つの容器を長さ L の細い管でつないだ状況を考える．管の断面（yz-平面と平行であるとする）の面積が小さいため，断面のどの点でも塩水の濃度が等しいとしてもよい．管の中の塩水の濃度を $c(t,x)$, $0<x<L$ とする．また，塩の拡散が 1 次元的なものであるとする：

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \qquad x \in (0,L)$$

次の二つの場合の初期条件と境界条件を定めよ.

(1) 最初は管の中に水しか入っていない．$x=0$ に対応する容器の塩水の濃度は定数 C_1 の値で維持されており，$x=L$ に対応する容器の塩水の濃度は定数 C_2 の値で維持されている．

(2) 管の中の塩水の最初の濃度は，$x=0$ での値 C_3 から $x=L$ での値 0 に減少する線形関数で表される．$x=0$ では管が密封されており，$x=L$ に対応する容器の塩水の濃度は常に 0 の値で維持されている．

2.4　反応拡散方程式の解き方

はじめに，区間 $(0,L)$ における 1 次元の拡散方程式を解いてみよう：

$$u_t = Du_{xx}, \qquad t>0,\ x\in(0,L) \tag{2.3}$$

ここで，$u_t=\frac{\partial u}{\partial t}, u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ のように，偏微分の省略した記号を用いている．

考察してみると，変数が分離された解の形に限定しても妥当であることがわかる．すなわち，関数 $U(t)$ と $V(x)$ があって，

$$u(t,x)=U(t)V(x)$$

と書けると仮定して，u を求める．この形を (2.3) に代入して，UV で割ると，

$$\frac{U'(t)}{U(t)} = D\frac{V''(x)}{V(x)}$$

を得る．左辺は t だけの関数で，右辺は x だけの関数であるが，これは両辺が定数関数に等しいという可能性しかない．この定数を $D\lambda, \lambda\in\mathbb{R}$ とおくと，U と V に関する方程式

$$U'(t)=D\lambda U(t), \qquad V''(x)=\lambda V(x)$$

が成り立つ．行列の固有値との類似もあり，これらの方程式を固有値問題とよぶ．この一般解は

$$U(t)=C_3e^{D\lambda t}, \qquad V(x)=C_1e^{-\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{\sqrt{\lambda}x}$$

である．よって，

$$e^{D\lambda t}\left(C_1e^{-\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{\sqrt{\lambda}x}\right)$$

がすべての $C_1,C_2,\lambda\in\mathbb{R}$ について拡散方程式 (2.3) の解である．さらに，方程式 (2.3) が線形である（すなわち，u_1,u_2 が二つの解ならば，$au_1+bu_2, a,b\in\mathbb{R}$ も解である）ため，様々な C_1,C_2,λ に対するこれらの関数の任意の線形結合も (2.3) の解となる．

このように，(2.3) の解は無数にあるが，適切な初期条件と境界条件を課せば，解が唯一に定まる．初期条件は

$$u(0,x)=u_0(x), \qquad x\in(0,L) \tag{2.4}$$

を指定するが，境界条件は複数の可能性があり，ここでは例として斉次 Dirichlet 境界条件

$$u(t,0)=u(t,L)=0, \qquad t>0 \tag{2.5}$$

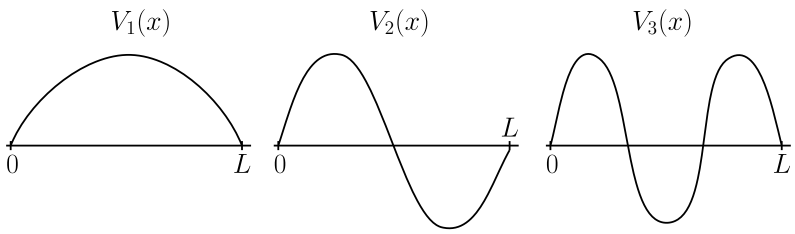
を例にとって進める．

　境界条件 (2.5) より
$$V(0) = V(L) = 0$$
という V に対する条件が従う．これを満たす $V''(x) = \lambda V(x)$ の解 $V(x) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}x}$ について考える．

- $\lambda > 0$ のとき，
$$C_1 + C_2 = 0, \qquad C_1 e^{-\sqrt{\lambda}L} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}L} = 0$$
を満たす C_1, C_2 は $C_1 = C_2 = 0$ のみだから，自明な解 $V(x) \equiv 0$ しか得られない．

- $\lambda = 0$ のときも同様である．

- $\lambda < 0$ のとき，複素数の指数関数が現れるので，それを三角関数を用いて書き直すと，$V(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$ となる．境界条件より
$$C_1 = 0, \qquad C_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda}L\right) = 0$$
が成り立たなければならないので，任意の整数 $m \in \mathbb{Z}$ に対して
$$\lambda_m = -\frac{m^2\pi^2}{L^2}, \qquad V_m(x) = c_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$
という解を得る．λ_m は固有値，$V_m(x)$ は固有関数と呼ばれる．最初の 3 つの固有関数の概形は下図に示される．



　この考察により，
$$u_m(t,x) = e^{-D\frac{m^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$
はすべての $m \in \mathbb{Z}$ について方程式 (2.3) と境界条件 (2.5) を満たし，級数の収束がよければ，任意の $c_m \in \mathbb{R}$ に対して，
$$u(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-D\frac{m^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$
も方程式 (2.3) と境界条件 (2.5) を満たす．なお，Neumann 境界条件の場合の解は練習問題とする．

　係数 $\{c_m\}_m$ は今の時点で自由であるが，上記の $u(t,x)$ が初期条件 (2.4) を満たすように，この

係数を決める．つまり，

$$u(0,x) = u_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

が成り立つような c_m を見つければよい．ここで，一つの定理を証明なしで紹介する．

フーリエ級数

定理 2.1 $f(x)$ が $(0,L)$ 上で連続関数ならば，

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right), \qquad b_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\,dx, \quad m = 1,2,\ldots \tag{2.6}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right), \quad a_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\,dx, \quad m = 0,1,\ldots$$

のように展開できる．

このように三角関数を用いて関数を展開した級数をフーリエ級数と言う．紹介した定理では強い仮定をおいているが，より厳密な結果は有界変動の関数の枠組みで知られている．なお，上の級数は各点収束の意味で収束するが，部分区間 $[a,b] \subset (0,L)$ において f が連続ならば，$[a,b]$ で一様収束することも言える．

関数をシンプルな関数で展開する方法は他にテーラー展開がある．テーラー展開では関数の微分可能性が不可欠で，ある点の近傍においてのみ有効だが，フーリエ級数は微分ができない関数も展開できて，区間全体で収束する，という違いがある．

この定理を用いると，u_0 が連続ならば，

$$u(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-D\frac{m^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right), \qquad c_m = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\,dx$$

という関数がすべての条件 (2.3), (2.4), (2.5) を満たす，と結論づけることができる．ただし，この級数の微分を計算するとき極限と微分が交換できるかなどの問題を無視して形式的に議論した（u_0 が十分滑らかなら正しい）．

例 2.1

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, \qquad t > 0,\ x \in (0,\pi) \\ &u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \qquad t > 0 \\ &u(0,x) = \sin x, \qquad x \in (0,\pi) \end{aligned}$$

という具体的な初期値 $\sin x$ が与えられる Dirichlet 問題を例として考える．上の公式によると，解は

$$u(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-m^2 t} \sin(mx), \qquad c_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \sin(mx)\,dx$$

で与えられる．しかし，

$$c_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \sin(mx)\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi [\cos(x-mx) - \cos(x+mx)]\ dx$$

と変形できるので，$c_1 = 1, c_m = 0\ \forall m > 1$ がわかる．よって，級数の第一項しか残らず，解は $u(t,x) = e^{-t}\sin x$ である．

例 2.2

$$\begin{aligned} &u_t = Du_{xx}, \qquad t > 0,\ x \in (0,L) \\ &u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0, \qquad t > 0 \\ &u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in (0,L) \end{aligned}$$

という一般の Neumann 問題の解は

$$u(t,x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-D\frac{m^2\pi^2}{L^2}t}\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right), \qquad c_m = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\ dx$$

で与えられる．

注　領域 Ω が直方体なら，変数分離による解法は多次元でも適用できる．例えば，

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + ku, \qquad t > 0,\ (x,y) \in R = (0,a)\times(0,b) \\ &\nabla u \cdot \boldsymbol{n} = 0, \qquad t > 0,\ (x,y) \in \partial R \\ &u(0,x,y) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in R \end{aligned}$$

という 2 次元の Neumann 問題（係数 $k > 0$ のマルサス法則による反応項もつけた）を解くために，$u(t,x,y) = U(t)V_1(x)V_2(y)$ と変数を分離しておく．すると，

$$\frac{U'(t)}{U(t)} = D\left(\frac{V_1''(x)}{V_1(x)} + \frac{V_2''(y)}{V_2(y)}\right) + k$$

を得るので，D のかかっている $(\cdot)$ の中身を定数 λ とおいて，

$$U'(t) = (D\lambda + k)U(t), \quad V_1''(x) = \lambda_1 V_1(x), \quad V_2''(y) = \lambda_2 V_2(y), \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$$

の固有値問題を解けばよい．解は次の形をとる：

$$u(t,x) = \sum_{n,m=0}^{\infty} c_{n,m} e^{(D\lambda_{n,m}+k)t}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \qquad \lambda_{n,m} = -\frac{n^2\pi^2}{a^2} - \frac{m^2\pi^2}{b^2}.$$

2.5　定常解について

ここでは，反応拡散方程式の解 u に対して $\lim_{t\to\infty} u(t,x)$ を調べる．フーリエ級数の形で求めた解を見ると，Dirichlet 問題の場合は $D\frac{m^2\pi^2}{L^2} > 0$ だから，

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = \lim_{t\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-D\frac{m^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = 0$$

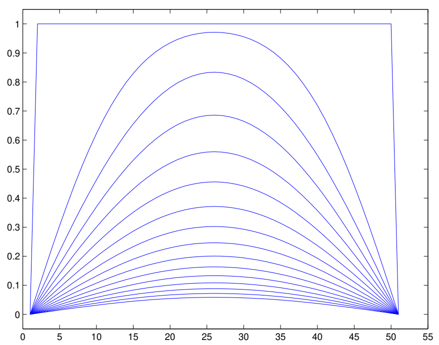
”最後まで残る”漸近 profile は $c_1 e^{-D\frac{\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$ である．一方で，Neumann 問題の場合は

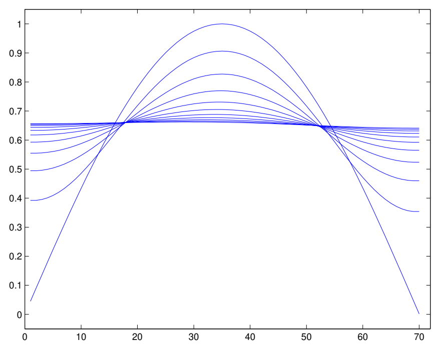
$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = \frac{c_0}{2} + \lim_{t\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-D\frac{m^2\pi^2}{L^2}t} \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = \frac{c_0}{2}$$

が成り立つ．c_0 の定義より

$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{2}\frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\cos\left(\frac{0\pi}{L}x\right)\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L u_0(x)\,dx$$

だから， $\lim_{t\to\infty} u(t,x)$ は区間 $(0,L)$ での初期値 u_0 の平均値に等しい定数関数である．$u_0(x) = 1$ の初期値から始まる斉次 Dirichlet 条件のときの発展と $u_0(x) = \sin x$ の初期値から始まる斉次 Neumann 条件のときの発展の数値計算結果を下図に示す．





いずれの場合，$t \to \infty$ のときの解の極限は定数関数で，この極限関数は反応拡散方程式に対する初期値境界値問題

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(x,u), \qquad t>0,\ x\in\Omega \\ &B(u) = 0, \qquad t>0,\ x\in\partial\Omega \\ &u(0,x) = u_0(x), \qquad x\in\Omega \end{aligned}$$

の定常解（平衡解ともいう，equilibrium solution, steady state solution），つまり，次の条件を満たす関数 $u(x)$ である：

$$\begin{aligned} &D\Delta u + f(x,u) = 0, \qquad x\in\Omega \\ &B(u) = 0, \qquad x\in\partial\Omega \end{aligned}$$

ここで，$x = (x_1, \ldots, x_n)$ を一般に n-次元ベクトルとして，境界条件を作用素 B を用いて一般の形で書いた．

ここからは次の Neumann 問題を取り上げる．

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u, && t > 0,\ x \in \Omega \\ &\nabla u \cdot \boldsymbol{n} = 0, && t > 0,\ x \in \partial\Omega \\ &u(0, x) = u_0(x), && x \in \Omega \end{aligned} \tag{2.7}$$

$u(t, x)$ が (2.7) の解ならば，質量保存ともよべる性質

$$\int_\Omega u(t, x)\, dx = \int_\Omega u_0(x)\, dx \qquad \forall t \geq 0$$

を満たす．実際，

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t, x)\, dx = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} u(t, x)\, dx = D\int_\Omega \Delta u\, dx = D\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0.$$

この計算で，$\Delta u = \mathrm{div}(\nabla u)$ であることに注意して発散定理を適用した．

Neumann 問題の定常解

定理 2.2 問題 *(2.7)* の解 $u(t, x)$ は次を満たす：

$$\lim_{t\to\infty} u(t, x) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)\, dx.$$

この定理は長方形領域の場合にフーリエ級数を用いて確かめた結果が一般の領域でも成り立つことを言っている．証明のアイデアを紹介する．

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega [u(t, x)]^2\, dx$$

と定義して，この量の時間微分を調べる：

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_\Omega u\frac{\partial u}{\partial t}\, dx = D\int_\Omega u\Delta u\, dx = -D\int_\Omega \nabla u {\cdot} \nabla u\, dx + D\int_{\partial\Omega} u(\nabla u {\cdot} \boldsymbol{n})\, dS = -D\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx.$$

ここで，Green の公式

$$\int_\Omega v\nabla u\, dx = -\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\, dx + \int_{\partial\Omega} v(\nabla u \cdot \boldsymbol{n})\, dS$$

を用いた．したがって，すべての $t > 0$ について $E'(t) \leq 0$（u が定数関数でなければ < 0）で，定

義から常に $E(t) \geq 0$ だから，$\lim_{t\to\infty} E(t)$ が存在して，$\lim_{t\to\infty} E'(t) = 0$ が成り立つ．よって，

$$\lim_{t\to\infty} \int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2 \, dx = 0,$$

すなわち，$\lim_{t\to\infty} |\nabla u(t,x)| = 0$ a.e. in Ω. これより $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = C = const$ が導ける（ただし，この極限の存在を示す必要がある）．上で示した質量保存の性質より

$$\int_\Omega u(t,x)\,dx = \int_\Omega C\,dx = |\Omega| C = \int_\Omega u_0(x)\,dx$$

であるので，定理が示された．

定理の証明で Green の公式などを利用しているから，それを正当化するために，領域 Ω の滑らかさに対して仮定を置く必要がある．また，問題 (2.7) の解が存在して，ある程度の滑らかさがあることも必要である．ここではアイデアを理解することが目的だから詳細を省くが，定理は「領域や初期値などについてある条件が満たされれば成り立つ」と解釈しなければならない．

なお，問題 (2.7) で境界条件を $u = 0$ on $\partial\Omega$ に変えた Dirichlet 問題については，$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 0$ が成り立つことが同様に示される．

次に Dirichlet 問題を考え，マルサス法則による成長の項を含むモデル方程式

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au, \qquad t > 0,\ x \in (0,L) \\
&u(t,0) = u(t,L) = 0, \qquad t > 0 \\
&u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in (0,L)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

の解の $t \to \infty$ のときの振る舞いを調べる．ただし，$a > 0$ とする．

$u(t,x)$ が au の項がない問題の解ならば，$e^{at}u(t,x)$ が (2.8) の解であることが簡単に確かめられる．しかし，この事実に気付かなくても，方程式が線形だから，通常の変数分離で解くことができる（2.4節の最後の注を参照）．よって，解は

$$u(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{at - D\frac{m^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right), \qquad c_m = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\,dx$$

と書ける．$t \to \infty$ のときの振る舞いは無限和の最初の項 $c_1 e^{at - D\frac{\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$ で支配されるから，パラメータ D, a, L の値によって二つのケースがあり得る：

- $a > D\frac{\pi^2}{L^2}$ のとき（つまり，$L > \sqrt{\frac{D}{a}}\pi$ のとき）は $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = \infty$
- $a < D\frac{\pi^2}{L^2}$ のとき（つまり，$L < \sqrt{\frac{D}{a}}\pi$ のとき）は $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 0$

$L_0 = \sqrt{\frac{D}{a}}\pi$ とおくと，領域の長さが L_0 より大きければ人口が無限大に増大していくのに対し，領域の長さが L_0 より小さければ人口はやがて消滅する．そのため，L_0 は臨界パッチ長（critical patch size）とよばれ，人間の活動による生息地分断化などの問題で環境学の重要なパラメータとなっている．数学的には，領域の長さ L をパラメータとして考えると $L = L_0$ において解の振る舞いに分岐がおこると言う．($L = L_0$ のとき，$u(t,x) = \sin(\frac{\pi}{L}x)$ という定常解もあることに注意しよう．)

最後に，全空間での方程式の解法について述べる．想定する現象は，時刻 $t = 0$ において個体が M 個いて，すべての M 個の個体が一点（具体的には原点 $x = 0$）に集中しているという状況である．移動範囲に制限がないとき，この状態から個体がどのように拡散していくかを考える．

このときの初期値は原点以外のすべての点で 0 の値を持ち，積分すると M という結果が出る，という不思議なものである．このような「関数」をデルタ関数と呼ぶ（本当は関数ではない）．ここでは正確な定義を述べないが，直感的には次の条件を満たす「関数のようなもの」$\delta_0(x)$ として捉える：

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(x)\,dx = 1.$$

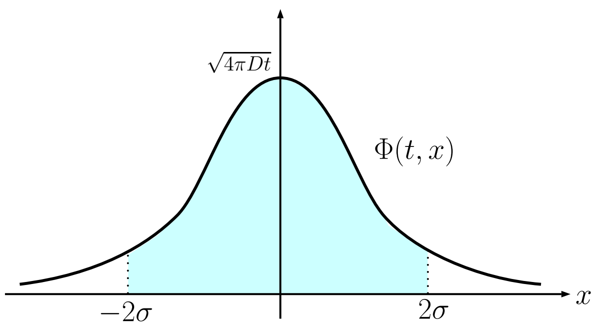
以下の初期値問題を解くことになる：

$$\begin{aligned} &u_t(t,x) = Du_{xx}(t,x), \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ &u(0,x) = M\delta_0(x), \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.9}$$

導出を省略するが，この問題の解は $u(t,x) = M\Phi(t,x)$ であることがわかる．ここで，Φ は

$$\Phi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

で定義される．$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ だから，すべての $t > 0$ について $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t,x)\,dx = 1$ が成り立つ．また，$x \neq 0$ であれば，$\lim_{t\to 0}\Phi(t,x) = 0$ が成立する．この意味で $u(t,x) = M\Phi(t,x)$ は (2.9) の解である．



関数 Φ は正規分布の形をしている．この解釈では $\sigma^2 = 2Dt$ が分散となる．正規分布の性質より，例えば，時刻 t において $[-2\sigma, 2\sigma] = [-2\sqrt{2Dt}, 2\sqrt{2Dt}]$ の空間範囲に 95.45% ぐらいの個体数が存在すると言える．

なお，2 次元では解は次の形である：

$$\Phi(t,x,y)=\frac{1}{4\pi Dt}e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}}.$$

例 2.3 大都会の人口爆発のモデル

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+au,\qquad t>0,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \tag{2.10}$$
$$u(0,x)=M\delta_0(x,y),\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

を考える．解は $u(t,x)=Me^{at}\Phi(t,x,y)$ であることが確認できる．つまり，

$$u(t,x)=\frac{M}{4\pi Dt}e^{at-\frac{x^2+y^2}{4Dt}}.$$

この関数を全空間で積分すると，

$$\int_{\mathbb{R}^2}u(t,x,y)\,dx\,dy=Me^{at}$$

を得るので，$t\to\infty$ で人口が爆発する．

このモデルは初期時刻で人口が一点に集中した状態から増えながら周りに拡散して都市が形成される過程を表しているので，都会の空間上の境界が広がる速度に興味がある．Φ が原点に対して対称であるから，都市は円状に広がっていく．時刻 t における都会の半径を $R(t)$ という記号で表す．半径 $R(t)$ の円 $B_{R(t)}$ の外側にいる人口の総数が初期値 M に等しいという条件で $R(t)$ を定義する．

$$\int_{\mathbb{R}^2-B_{R(t)}}u(t,x,y)\,dx\,dy=Me^{at-\frac{R^2(t)}{4Dt}}$$

と計算できるから，これが M に等しいという条件より

$$R(t)=\sqrt{4aD}\,t$$

が得られるので，都会が広がる速度は $R'(t)=\sqrt{4aD}$ である．

演習問題

問題 2.6 次の問題の固有値と固有関数を求めよ．

(1) $u''=ku,\ x\in(0,L),\ u'(0)=u'(L)=0$（斉次 Neumann 条件）

(2) $u''=ku,\ x\in(0,\pi),\ u(0)=u(\pi),u'(0)=u'(\pi)$（周期境界条件）

(3) $u''=ku,\ x\in(0,L),\ u'(0)=bu(0),\ u'(L)=-bu(L)$（Robin 境界条件，$b>0$）

(4) $u''+2u'+ku=0,\ x\in(0,\pi),\ u(0)=u(\pi)=0$（斉次 Dirichlet 条件）

問題 2.7 Neumann 境界条件つきの問題

$$
\begin{aligned}
&u_t = Du_{xx}, \qquad t > 0,\ x \in (0, L)\\
&u_x(t, 0) = u_x(t, L) = 0, \qquad t > 0\\
&u(0, x) = u_0(x), \qquad x \in (0, L)
\end{aligned}
$$

のフーリエ級数解を求めよ.

問題 2.8 初期値境界値問題

$$
\begin{aligned}
&u_t = 4u_{xx}, \qquad t > 0,\ x \in (0, 1)\\
&u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, \qquad t > 0\\
&u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -1, & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}
\end{aligned}
$$

の解を解析的に求め，オイラー法を用いて数値計算も行え.

問題 2.9 次の定常問題の解を求めよ.

(1) $u'' = 0,\ x \in (0, 1),\ u(0) + 3u'(0) = 5,\ u(1) - 5u'(1) = 7$

(2) $u'' + 3u' = 0,\ x \in (0, 1),\ u(0) = 5, u'(1) = 4$

問題 2.10 $u(t, x)$ が問題

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u, \qquad t > 0,\ x \in \Omega\\
&\nabla u(t, x) \cdot \boldsymbol{n}(x) + au(t, x) = 0, \qquad t > 0,\ x \in \partial\Omega\\
&u(0, x) = u_0(x), \qquad x \in \Omega
\end{aligned}
$$

の解であるとする．ただし，$a > 0$．$u \equiv 0$ でない限り，$E(t) = \int_\Omega [u(t, x)]^2\, dx$ が減少関数であることを示せ.

問題 2.11 $u(t, x)$ が移流拡散方程式（$D > 0, V > 0$）

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - V\frac{\partial u}{\partial x} \qquad t > 0,\ x \in (0, \pi)\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0, \qquad t > 0\\
&u(0, x) = u_0(x), \qquad x \in (0, \pi)
\end{aligned}
$$

の解であるとする．$u_0(x) = \sin x$ ならば，総人口 $\int_0^1 u(t, x)\, dx$ が時間と共に変化しないが，$u_0(x) = \cos x$ ならば変化することを示せ.

問題 2.12 Robin 境界条件つきの拡散マルサスモデル

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au, \qquad t>0,\ x\in(0,L)\\
&u_x(t,0) = bu(t,0),\ u_x(t,L) = -bu(t,L), \qquad t>0\\
&u(0,x) = u_0(x), \qquad x\in(0,L)
\end{aligned}$$

の臨界パッチ長を求めよ．

問題 2.13 2 次元における周期境界問題

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + ku, \qquad t>0,\ (x,y)\in R=(0,a)\times(0,b)\\
&u(t,0,y) = u(t,a,y), u_x(t,0,y) = u_x(t,a,y), \qquad t>0, y\in(0,b)\\
&u(t,x,0) = u(t,x,b), u_x(t,x,0) = u_x(t,x,b), \qquad t>0, x\in(0,a)\\
&u(0,x,y) = u_0(x,y), \qquad (x,y)\in R
\end{aligned}$$

に対する固有値と固有関数，そしてフーリエ級数解を求めよ．

（略解：$u(t,x,y) = U(t)V_1(x)V_2(x)$ とおくと，V_1 に対して $V_1'' = \lambda_1 V_1, V_1(0) = V_1(a), V_1'(0) = V_1'(a)$ という固有値問題が現れる．解は $V_1(x) = C_1\cos(\sqrt{-\lambda_1}x) + C_2\sin(\sqrt{-\lambda_1}x)$ で，境界条件を適用すると $\cos(\sqrt{-\lambda_1}a) = 1$ という条件となるので，$\lambda_{1,m} = -\frac{m^2\pi^2}{a^2}$．同様に $\lambda_{2,n} = -\frac{n^2\pi^2}{b^2}$．係数 C_1, C_2 は任意．よって，十分な収束があれば，解は

$$\begin{aligned}
u(t,x) = \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{[D(\lambda_{1,m}+\lambda_{2,n})+k]t}\Big(&a_{n,m}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + b_{n,m}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\\
&+c_{n,m}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + d_{n,m}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\Big)
\end{aligned}$$

$\{\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), n, m = 0,1,2,\ldots\}$ の関数は互いに直交している（二つの異なる関数の積の積分がゼロである）から，係数 $a_{n,m}, b_{n,m}, c_{n,m}, d_{n,m}$ は初期値のフーリエ展開で決まる．例えば，

$$a_{n,m} = C\int_0^a\int_0^b u_0(x,y)\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy\,dx, \qquad m,n = 0,1,\ldots.$$

ここで，C は a,b に依存する定数である.）

問題 2.14 移流拡散方程式

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial u}{\partial x} + 8u, \qquad t>0,\ x\in(0,L)\\
&u(t,0) = u(t,L) = 0, \qquad t>0\\
&u(0,x) = u_0(x), \qquad x\in(0,L)
\end{aligned}$$

の解とその性質を次のステップを踏んで求めよ．

(1) 変数分離法を用いて，$u(t,x)=U(t)V(x)$ ならば

$$U'(t)=\lambda U(t), \qquad V''(x)+4V'(x)+8V(x)=\lambda V(x), \qquad V(0)=V(L)=0$$

が成り立つことを示す．

(2) $\lambda>4, \lambda=4, \lambda<4$ の場合に分けて，$V''(x)+4V'(x)+8V(x)=\lambda V(x),\ V(0)=V(L)=0$ に対応する固有値と固有関数を求める．

(3) フーリエ級数解を求める．(ヒント：$c_m=\frac{2}{L}\int_0^L e^{2x}u_0(x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)\,dx$)

(4) 問題の臨界パッチ長 L_0 を求める．

(5) $L>L_0$ のときの人口の密度分布の定性的な振る舞いを調べる．

(6) 個体は長さ L の川に生息していて，移流は川の流れによるとする．この設定で以上の数学的な結果を解釈する．

(略解：V についての微分方程式が線形なので，特性方程式 $a^2+4a+(8-\lambda)=0$ の解 $a_{1,2}=-2\pm\sqrt{\lambda-4}$ の値によって解が決まる．$\lambda>4$ のとき解は $C_1e^{(-2+\sqrt{\lambda-4})x}+C_2e^{(-2-\sqrt{\lambda-4})x}$ で境界条件より $C_1=C_2=0$ が従う．$\lambda=4$ のとき解は $C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$ で境界条件より $C_1=C_2=0$ が従う．$\lambda<4$ のとき解は $C_1e^{-2x}\cos(\sqrt{4-\lambda}x)+C_2e^{-2x}\sin(\sqrt{4-\lambda}x)$ で境界条件より $C_1=0, \sqrt{4-\lambda_m}=\frac{m\pi}{L}$ が従う．よって，解は

$$u(t,x)=\sum_{m=1}^{\infty}c_me^{\lambda_mt}e^{-2x}\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

と書けて，$t=0$ としたときに得られる式に e^{2x} をかければ，ヒントの c_m の式が得られる．)

2.6　非線形反応拡散方程式

拡散ロジスティック方程式の初期値境界値問題

$$\begin{aligned}
&u_t=Du_{xx}+au\left(1-\frac{u}{N}\right), \qquad t>0,\ x\in(0,L)\\
&u(t,0)=u(t,L)=0, \qquad t>0\\
&u(0,x)=f(x), \qquad x\in(0,L)
\end{aligned}$$

を考える．反応項が非線形なため，変数分離の方法で解を求めることができない．この問題は特殊な形だから，定常解は楕円積分を使って書くことができるが，一般の反応項では定常解さえ式で書くことができない．そのため，このような非線形な方程式の解の性質を調べるときに，定性的な手法と数値計算を用いることが多い．

準備として，問題の無次元化を行う．すなわち，問題に現れるパラメータの数を減らすため，次の次元のない変数

$$\tilde{t} = \frac{D}{L^2}t, \qquad \tilde{x} = \frac{x}{L}, \qquad \tilde{u} = \frac{u}{N}$$

を導入して，この新しい変数の微分が

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}\frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} = \frac{DN}{L^2}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{L}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}\right) = \frac{N}{L^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}
\end{aligned}$$

を満たすことに注意しながら，チルダつきの変数を用いた方程式

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \lambda \tilde{u}\,(1-\tilde{u})\,, \qquad \tilde{t} > 0,\ \tilde{x} \in (0,1) \\
&\tilde{u}(\tilde{t},0) = \tilde{u}(\tilde{t},1) = 0, \qquad \tilde{t} > 0 \\
&\tilde{u}(0,\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{x}), \qquad \tilde{x} \in (0,1)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

を得る．ただし，$\lambda = \frac{aL^2}{D}$, $\tilde{f}(\tilde{x}) = \frac{f(L\tilde{x})}{N}$ である．以降，式を見やすくするため，チルダの記号を省略する．

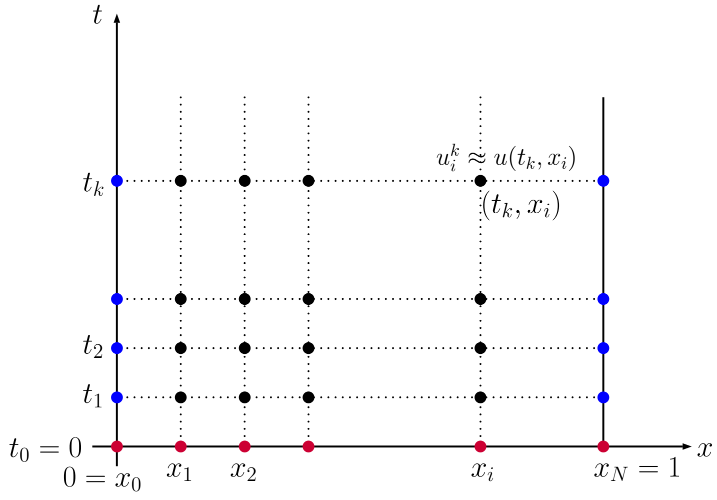
最初に数値解法について簡単に述べる．常微分方程式の基本的な解法であるオイラー法を基に数値スキームを導く．

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt}(t) &= g(t, u(t)) \\
u(t_0) &= u_0
\end{aligned}$$

という初期値問題に対するオイラー法は時間を間隔 $\Delta t > 0$ で離散化し，$t_k = t_0 + k\Delta t$ の離散時刻を導入し，時刻 t_{k+1} での近似解 $u_{k+1} \approx u(t_{k+1})$ を前の時刻 t_k における近似値を用いて，次の式で定義する：

$$u_{k+1} = u_k + \Delta t\, g(t_k, u_k), \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

(2.11) の場合は，空間変数 x も離散化する．つまり，$N \in \mathbb{N}$ に対して差分幅 $\Delta x = \frac{1}{N}$ を導入し，$x_i = i\Delta x$ と定義する．



テーラー展開に基づいて，微分を次のように差分で近似する：

$$
\begin{aligned}
u_t(t_k, x_i) &\approx \frac{u(t_{k+1}, x_i) - u(t_k, x_i)}{\Delta t} \approx \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} \\
u_x(t_k, x_i) &\approx \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{\Delta x} \quad \text{または} \quad \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{\Delta t} \\
u_{xx}(t_k, x_i) &\approx \frac{u_x(t_k, x_{i+1}) - u_x(t_k, x_i)}{\Delta x} \approx \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{(\Delta x)^2}
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

初期条件より $u_i^0 = f(x_i)$ が与えられ（上の図では赤い格子点），境界条件より $u_0^k = u_N^k = 0$ が与えられる（図の青い格子点）．数値スキームのアイデアは，初期条件から始めて時間を進め，順番に区間 $(0, 1)$ の内側の格子点における近似値を求めることである．上記の差分近似を方程式 (2.11) に代入すると，

$$
\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = D\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} + \lambda g(u_i^k)
$$

を得る．ただし，$g(u) := u(1-u)$ とおいた．さらに，$r := \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}$ とおくと，この式は

$$
u_i^{k+1} = ru_{i+1}^k + (1-2r)u_i^k + ru_{i-1}^k + \lambda g(u_i^k)\Delta t
$$

と整理される．これを行列を用いて書き直す：

$$
\begin{pmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1}^{k+1} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1-2r & r & 0 & 0 & \dots & 0 \\
r & 1-2r & r & 0 & \dots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \dots & 0 & r & 1-2r & r \\
0 & \dots & 0 & 0 & r & 1-2r
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1}^k \end{pmatrix}
+ \lambda\Delta t
\begin{pmatrix} g(u_1^k) \\ g(u_2^k) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ g(u_{N-1}^k) \end{pmatrix}
\tag{2.13}
$$

時刻 t_k における近似解の格子点での値を並べたベクトルを U^k とすると，この式を

$$
U^{k+1} = AU^k + \lambda\Delta t G(U^k) \tag{2.14}
$$

と簡単な形で書くことができる．A は $(N-1)\times(N-1)$ の行列である．

注

- これまで斉次 Dirichlet 境界条件のみ考えてきたが，斉次でない条件の場合は境界上の既知の値がベクトルとして (2.14) の右辺に足されることになる．また Neumann 境界条件の場合，u_{-1}^k, u_{N+1}^k を形式的に導入して，$u_{-1}^k = u_1^k, u_{N+1}^k = u_{N-1}^k$ という条件を追加することで処理されることが多い．このとき，行列 A は少し変わり，大きさが $(N+1)\times(N+1)$ となる．

- (2.12) で前進差分の代わりに後退差分

$$u_t(t_k, x_i) \approx \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\Delta t}$$

を用いて k をすべて 1 だけ大きくして書くと，

$$U^{k+1} = U^k + BU^{k+1} + \lambda \Delta t G(U^{k+1})$$

というスキームを得る．B は A と少し異なる行列である．このとき，U^{k+1} を U^k から求めるには（G があるから非線形な）連立方程式を解かなければならない．そのため，このようなスキームを陰解法とよび，(2.14) を陽解法とよぶ．

具体的なパラメータを用いて数値実験してみよう．$\lambda = 0$（反応項なし）として，時間と空間の差分幅を $\Delta t = (\Delta x)^2 = \frac{1}{8^2}$ とすると，陽的スキーム (2.14) は

$$u_i^{k+1} = u_{i+1}^k - u_i^k + u_{i-1}^k$$

となる．初期値を区間の真ん中の格子点で 1，それ以外の格子点で 0 というベクトルにすれば，時刻 t_1 と t_2 における近似値は次のように計算される：

$$\begin{aligned}
U^0 &= [0,0,0,\quad 0,\quad 1,\quad 0,0,0,0] \\
U^1 &= [0,0,0,\quad 1,-1,\quad 1,0,0,0] \\
U^2 &= [0,0,1,-2,\quad 3,-2,1,0,0]
\end{aligned}$$

フーリエ級数解からも確認できるように拡散方程式の解は初期値が正ならばいつも正で，大きさは減衰していく．しかし，上の数値解は負になっているだけではなく，値が初期値より大きくなっているから，真の解と程遠い．このような性質を示す数値スキームを不安定とよぶ．

陽的スキームで安定性条件

$$r = \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$$

が満たされれば，このようなことが起きず，数値解が真の解のよい近似を与えることが知られている．正確な近似解を求めて空間変数を細かく分割したとき，時間をそれより大幅に細かく刻まなければならないという厳しい条件である．一方で，陰的スキームは無条件安定である．連立方程式を解く代わりに時間ステップを大きくとるか，時間を細かく分割して連立方程式を解くこと

を避けるか，どのアプローチを選んだ方がよいかについては，問題ごとに考える必要がある．

2.7 定常解の安定性

ここでは，非線形反応拡散方程式の定常解について調べる．$\overline{u}(x)$ を問題

$$\begin{aligned} &u_t = Du_{xx} + g(u), \qquad t > 0,\ x \in (0, L) \\ &u(t, 0) = u(t, L) = 0, \qquad t > 0 \\ &u(0, x) = f(x), \qquad x \in (0, L) \end{aligned} \tag{2.15}$$

の定常解，つまり，

$$\begin{aligned} &D\overline{u}_{xx} + g(\overline{u}) = 0, \qquad x \in (0, L) \\ &\overline{u}(0) = \overline{u}(L) = 0 \end{aligned}$$

の解とする．

定常解の安定性

定義 2.3

- $\overline{u}$ は安定であるとは，

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ \textit{such that} \ \max_{x\in[0,L]} |f(x) - \overline{u}(x)| \le \delta \ \Rightarrow \ \max_{x\in[0,L]} |u(t, x) - \overline{u}(x)| \le \varepsilon \ \forall t > 0$$

- $\overline{u}$ は漸近安定であるとは，

$$\exists \delta > 0 \ \textit{such that} \ \max_{x\in[0,L]} |f(x) - \overline{u}(x)| \le \delta \ \Rightarrow \ \lim_{t\to\infty} \max_{x\in[0,L]} |u(t, x) - \overline{u}(x)| = 0$$

ただし，$u(t, x)$ は $f(x)$ を初期値とした *(2.15)* の解である．

すなわち，$\overline{u}$ の近くからスタートする (2.15) の解が $\overline{u}$ の近くにとどまれば $\overline{u}$ は安定であるし，$\overline{u}$ の近くからスタートする (2.15) の解が $\overline{u}$ に近づいていけば $\overline{u}$ は漸近安定である．

例 2.4

(1) 拡散方程式の Dirichlet 問題

$$\begin{aligned} &u_t = Du_{xx} \qquad t > 0,\ x \in (0, L) \\ &u(t, 0) = u(t, L) = 0, \qquad t > 0 \\ &u(0, x) = f(x), \qquad x \in (0, L) \end{aligned}$$

の定常解は $\overline{u} \equiv 0$ のみである．フーリエ級数解の解析より，この定常解は漸近安定である

（どの初期条件 f から始めても，解はゼロの定数関数に収束する）.

(2) 拡散方程式の Neumann 問題

$$
\begin{aligned}
&u_t = Du_{xx} \qquad t > 0,\ x \in (0, L)\\
&u_x(t, 0) = u_x(t, L) = 0, \qquad t > 0\\
&u(0, x) = f(x), \qquad x \in (0, L)
\end{aligned}
$$

のすべての定常解は $\overline{u} \equiv C, C \in \mathbb{R}$ の形である．この問題の解は $t \to \infty$ のとき初期値の平均に近づくので，定数関数 $\overline{u}(x) = C$ に近い初期値から始まる解は C に近い値をもつ定数関数に近づき，定常解はすべて安定である．しかし，$f(x) = C + \delta$ という定数関数から始まる解は $u(t, x) = C + \delta$ で，$\overline{u}(x) = C$ に収束しないため，定常解は漸近安定ではない．

(3) 拡散マルサス方程式の Dirichlet 問題

$$
\begin{aligned}
&u_t = Du_{xx} + au \qquad t > 0,\ x \in (0, L)\\
&u(t, 0) = u(t, L) = 0, \qquad t > 0\\
&u(0, x) = f(x), \qquad x \in (0, L)
\end{aligned}
$$

は $\overline{u} \equiv 0$ という定常解がある．L_0 を臨界パッチ長とすると，$L < L_0$ のときこの定常解は漸近安定で，$L > L_0$ のとき安定ではない（つまり，不安定である）.

上で紹介した例は線形な方程式だったが，非線形な場合はどうなるか？常微分方程式について知られていることを思い出すと，

- $u' = g(u)$ の定常解 $u(x) = u_0$ は，$g'(u_0) < 0$ なら安定，$g'(u_0) > 0$ なら不安定である．
- $\begin{cases} u' = f(u, v) \\ v' = g(u, v) \end{cases}$ の定常解 $(u(x), v(x)) = (u_0, v_0)$ は，$\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}(u_0, v_0)$ の固有値 λ_1, λ_2 について $\mathrm{Re}\lambda_1, \mathrm{Re}\lambda_2 < 0$ なら安定，$\mathrm{Re}\lambda_1, \mathrm{Re}\lambda_2 > 0$ なら不安定である．

いずれの場合も，線形化方程式

$$
u' = g'(u_0)u \qquad \text{または} \qquad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}
$$

の安定性を見ている．反応拡散方程式の場合も同じようなことが成り立つ．以下では

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda g(u), \qquad t > 0,\ x \in (0, 1)\\
&u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \qquad t > 0\\
&u(0, x) = f(x), \qquad x \in (0, 1)
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

の問題を対象とする．特に，最初に紹介したロジスティック問題（$g(u) = u(1 - u)$）を念頭にお

いている．

定理

$\overline{u}$ は (2.16) の定常解だとする．このとき，

(1) 問題

$$\begin{aligned} &\phi''(x) + \lambda g'(\overline{u}(x))\phi(x) = \mu\phi(x), \qquad x \in (0,1) \\ &\phi(0) = \phi(1) = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

の固有値 $\{\mu_i\}$ は次を満たす：

$$\mu_1 > \mu_2 > \cdots, \qquad \lim_{i\to\infty} \mu_i = -\infty.$$

(2) 固有関数 $\phi_i(x)$ は区間 $(0,1)$ でちょうど $(i-1)$ 回符号を変える．よって，$\phi_1(x)$ が $(0,1)$ で正だとしてもかまわない．

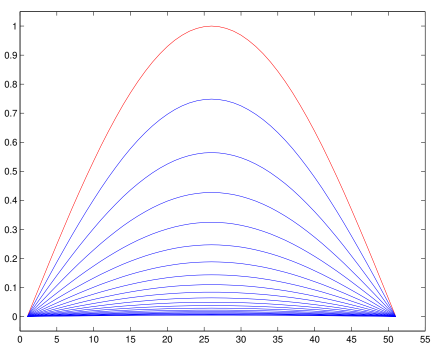
(3) $\mu_1 < 0$ なら $\overline{u}$ は安定な定常解で，$\mu_1 > 0$ なら $\overline{u}$ は不安定な定常解である．

$g(u) = u(1-u)$ に適用してみよう．$\overline{u}(x) \equiv 0$ のとき，$g'(\overline{u}) = 1 - 2\overline{u} = 1$ なので，

$$\begin{aligned} &\phi''(x) = (\mu - \lambda)\phi(x), \qquad x \in (0,1) \\ &\phi(0) = \phi(1) = 0 \end{aligned}$$

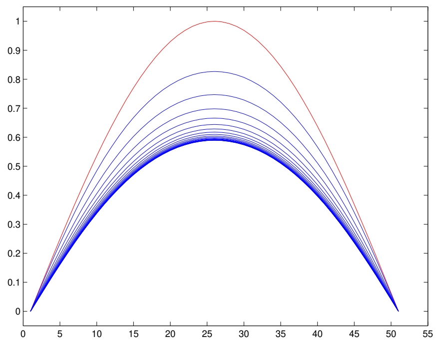
という問題になり，$\mu_i = \lambda - i^2\pi^2, \mu_1 = \lambda - \pi^2$ を得る．したがって，$\lambda < \pi^2$ のとき $\overline{u} \equiv 0$ は漸近安定で，$\lambda > \pi^2$ のとき $\overline{u} \equiv 0$ は不安定である．この場合，定常解は定数関数だったが，そうでないとき解析が難しくなる．

ここで，(2.16) の数値計算の結果をいくつか示す．常に，$g(u) = u(1-u)$ としている．まず，$\lambda = 1 < \pi^2$ に対して，初期値 $f(x) = \sin(\pi x)$ から始まる解の挙動を見る（図 (A)：以下の図では赤線は初期値，青線は正の時刻での解を意味する）．$\overline{u} \equiv 0$ に収束することが確かめられる．

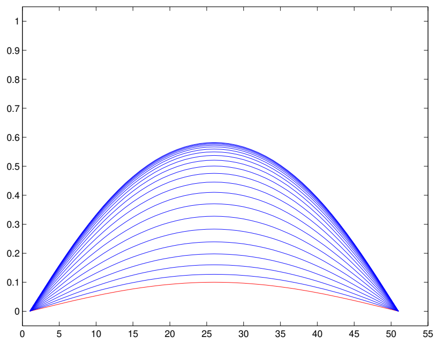


(A) 初期値 $f(x) = \sin(\pi x)$，パラメータ $\lambda = 1$

次に，$\lambda = 20 > \pi^2$ として，同じ初期値 $f(x) = \sin(\pi x)$ に対する解を見る．解は時間と共に減少し，ある正の関数に近づく様子が見てとれる（図 (B)）．一方，初期値を $f(x) = 0.1\sin(\pi x)$ のようにこの収束先の関数より小さくとると，今度は解は時間と共に増加し，見た目では同じ関数に収束する（図 (C)）．

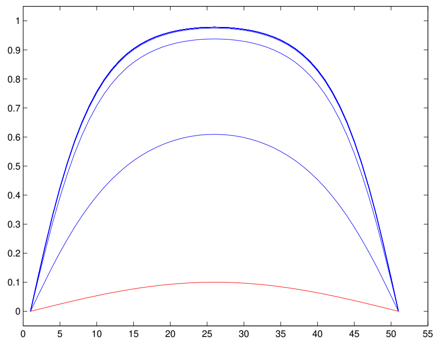


(B) 初期値 $f(x) = \sin(\pi x)$，パラメータ $\lambda = 20$

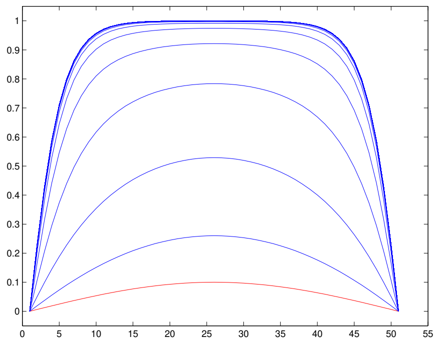


(C) 初期値 $f(x) = 0.1\sin(\pi x)$，パラメータ $\lambda = 20$

λ をさらに大きくしても，同じような振る舞いが観察される．図 (D) では，$\lambda = 100$，図 (E) では，$\lambda = 400$ とした．定常解の形は少し変わるが，正の定常解に収束する様子は変わらない．ただし，λ を大きくすればするほど収束がはやくなるので，図 (E) ではグラフをプロットする間隔を短くした．



(D) 初期値 $f(x) = 0.1\sin(\pi x)$，パラメータ $\lambda = 100$



(E) 初期値 $f(x) = 0.1\sin(\pi x)$，パラメータ $\lambda = 400$

数値計算で見つけた正の定常解が漸近安定である：

定理 2.4 $\overline{u}$ が *(2.16)* の正の定常解で $\lambda > \pi^2$ ならば，$\overline{u}$ は漸近安定である．

Proof. （アイデア）$\overline{u}$ に対する (2.16) に固有関数 ϕ_1 をかけた式から，ϕ_1 に対する (2.17) に $\overline{u}$ をかけた式を引いて，$(0, 1)$ で積分すると，

$$\int_0^1 (\overline{u}''\phi_1 - \phi_1''\overline{u})\,dx + \lambda \int_0^1 [g(\overline{u}) - \overline{u}g'(\overline{u})]\phi_1\,dx = -\mu_1 \int_0^1 \overline{u}\phi_1\,dx$$

を得る．左辺の第 1 項は消える（部分積分して，境界条件を適用する）．また，左辺の第 2 項は

$g(u) - ug'(u) = u^2$ と $\phi_1 > 0$ を用いると正であることがわかる．右辺の積分も $\overline{u} > 0, \phi_1 > 0$ より正だから，$\mu_1 < 0$ が従う． □

今，定常問題

$$u''(x) + \lambda g(u) = 0, \qquad x \in (0,1) \tag{2.18}$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

の解の（λ をパラメータとした）分岐構造を調べよう．

定理 2.5 $(\lambda, 0)$ が *(2.18)* の分岐点ならば，$\mu = 0$ は

$$\phi''(x) + \lambda g'(0)\phi(x) = \mu\phi(x), \qquad x \in (0,1) \tag{2.19}$$
$$\phi(0) = \phi(1) = 0$$

の固有値である．

この定理で $(\lambda, 0)$ の 0 は $\overline{u} \equiv 0$ の定常解を指す．定理を $g(u) = u(1-u)$ に適用すると，$g'(0) = 1$ より $\mu - \lambda = -n^2\pi^2, n \in \mathbb{N}$ が従うので，分岐点の候補として $\lambda = n^2\pi^2, n \in \mathbb{N}$ を得る．

まず，局所的な解析を行い，分岐点 $(\lambda, 0)$ の近くの振る舞いを見る．わかっていることは，$\lambda < \pi^2$ のとき $\overline{u} \equiv 0$ は安定な定常解，$\lambda > \pi^2$ のとき $\overline{u} \equiv 0$ は不安定な定常解で，正の安定な定常解が存在する，ということである．この正の安定な定常解を摂動法を用いて求める．小さなパラメータ ε を導入して，

$$\lambda = \pi^2 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \cdots, \qquad u = 0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon u_2 + \cdots$$

と展開できるとする．これを (2.18) に代入して，ε の同じオーダーの項を見ると，

$$u_1'' + \pi^2 u_1 = 0, \quad x \in (0,1), \qquad u_1(0) = u_1(1) = 0$$
$$u_2'' + \pi^2 u_2 + a_1 u_1 - \pi^2 u_1^2 = 0, \quad x \in (0,1), \qquad u_2(0) = u_2(1) = 0$$

という u_1, u_2 に対する条件を得る．最初の条件より，$u_1(x) = k\sin(\pi x)$ がすぐにわかる．これを二つ目の条件に代入すれば，u_2 の形と k の値が求まる（計算を省略する）．

定理 2.6 $(\lambda, u) = (\pi^2, 0)$ の近傍で *(2.18)* の解は *2* つの部分からなる：

(1) $(\lambda, 0)$

(2) $(\lambda(\varepsilon), u(\varepsilon))$（この解は *(1)* の解と $(\pi^2, 0)$ で交わる）
ただし，$\lambda(\varepsilon) > \pi^2$ のとき $u(\varepsilon)$ は正で，$\lambda(\varepsilon) < \pi^2$ のとき $u(\varepsilon)$ は負である．具体的には，

$$\lambda(\varepsilon) = \pi^2 + \varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \cdots, \qquad u(\varepsilon) = \frac{3}{8\pi}\varepsilon\sin(\pi x) + \varepsilon^2(\cdots) + \cdots.$$

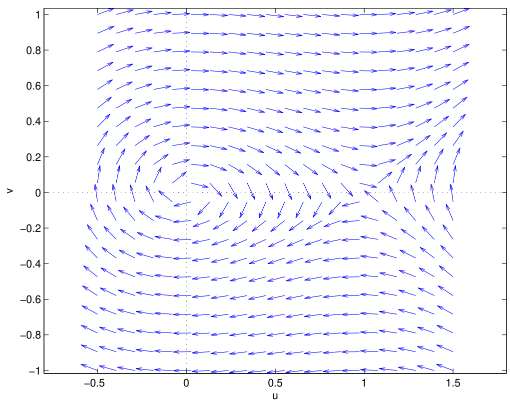
より大域的に見るために，力学系の豊富な理論を活用し，定常問題（ここでは無次元化する前の形）

$$\begin{aligned} &Du''(x) + g(u) = 0, \qquad x \in (0, L) \\ &u(0) = u(L) = 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

を力学系

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= -D^{-1} g(u) \end{aligned}$$

として見る．ただし，$g(u) = u(1-u)$ をいつも想定している．



この力学系の相図を見れば，次の条件を満たす解軌道 u, v があることが見込まれる：

1. $u(0) = u(L) = 0$
2. $u(\frac{L}{2}) = \max_{x\in[0,L]} u(x), v(\frac{L}{2}) = 0$
3. $u(x) > 0, x \in [0, L];\ \ v(x) > 0, x \in [0, \frac{L}{2});\ \ v(x) < 0, x \in (\frac{L}{2}, L]$

$\lambda = \frac{L^2}{D}$ を $u(\frac{L}{2})$ で表すことを目指す．(2.20) に u' をかけて，$x \in [0, \frac{L}{2})$ に対して $(x, \frac{L}{2})$ で積分する．

$$\begin{aligned} 0 &= \int_x^{L/2} \left[Du''(y)u'(y) + g(u(y))u'(y) \right] dy \\ &= D \int_x^{L/2} \left[\frac{1}{2}(u'(y)) \right]' dy + \int_x^{L/2} g(u(y))\, du(y) \\ &= \frac{D}{2} \left[u'(\tfrac{L}{2}) \right]^2 - \frac{D}{2} \left[u'(x) \right]^2 + \int_{u(x)}^{u(L/2)} g(u)\, du \\ &= -\frac{D}{2} \left[u'(x) \right]^2 + G\big(u(\tfrac{L}{2})\big) - G\big(u(x)\big) \end{aligned}$$

ここで，$s := u(\frac{L}{2})$ とおいて，整理すると，

$$\left[u'(x)\right]^2 = \frac{2}{D}\left[G(s) - G\big(u(x)\big)\right]$$

を得る．ルートをとって，変数を分離すれば，

$$\int_0^{L/2} dx = \sqrt{\frac{D}{2}} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{G(s) - G(u)}}\, du,$$

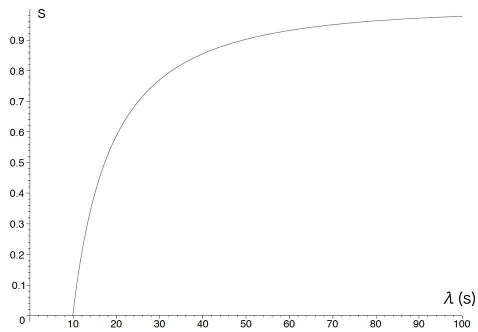
すなわち，

$$L = \sqrt{2D} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{G(s) - G(u)}}\, du.$$

右辺の積分 $T(s)$ は $u = 0$ から次の $u = 0$ に変わるのに必要な時間を表していることから time mapping とよばれる．$\lambda = \frac{L^2}{D}$ だったから，結局，

$$\lambda = 2\left(\int_0^s \frac{1}{\sqrt{G(s) - G(u)}}\, du\right)^2.$$

u が $u(\frac{L}{2}) = s$ を満たす (2.20) の解ならば，$\lambda = \frac{L^2}{D}$ は s を用いて上式で表される．よって，分岐図は $(\lambda(s), s)$ の意味で描ける．



Time mapping の積分は手計算で求めるのが難しいので数値計算を用いた．また，$T(s)$ の定性的な解析より次のことがわかる：

$$\lim_{s \to 0+} \lambda(s) = \pi^2, \qquad \lim_{s \to 1-} \lambda(s) = \infty, \qquad \lambda'(s) > 0.$$

得られた結果を定理にまとめる．

定理 2.7

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda g(u), \qquad t > 0,\ x \in (0,1)\\
&u(t,0) = u(t,1) = 0, \qquad t > 0\\
&u(0,x) = f(x), \qquad x \in (0,1)
\end{aligned}$$

の定常解について次が言える．

(1) $0 < \lambda < \pi^2$ のとき，ただ一つの非負の定常解 $\overline{u} \equiv 0$ があり，漸近安定である．

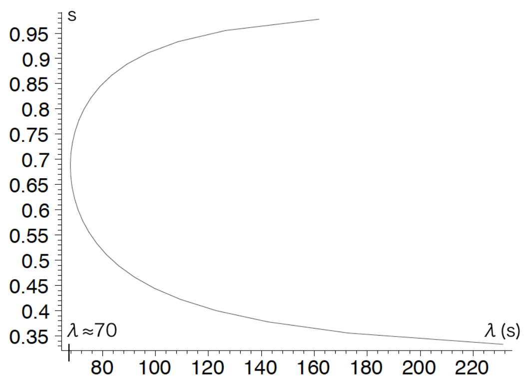
(2) $\lambda > \pi^2$ のとき，ちょうど二つの非負の定常解がある：不安定な定常解 $\overline{u} \equiv 0$ と漸近安定な正の定常解 $u_\lambda(x)$

これは人口が無限大に爆発するマルサスのモデルより自然な結果である．

最後に，アリー効果を取り入れた

$$u_t = u_{xx} + \lambda u(1-u)(u-a)$$

の定常解の分岐図について触れる．このモデルでは，$a \in (0.5, 1)$ のとき正の定常解がどの λ に対しても存在しない．一方で，$a \in (0, 0.5)$ ならば，次のような分岐図を得る：



$\lambda > \lambda_* \approx 70$ ならば，人口は条件つきで生き延びる．つまり，初期の人口が十分大きければ，正の定常解に近づく．逆に，人口が少なければ，$\overline{u} \equiv 0$ の漸近安定な定常解に収束する．

このとき，臨界パッチ長 $L_0 = \sqrt{\lambda_*}$ はロジスティックモデルより大幅に大きく，ロジスティックモデルのように線形化で得られる値ではない．

このテーマのモチベーションであったパターンは次のように定義される：
パターンは反応拡散方程式の安定で定数でない定常解である．

反応拡散系のモデルで様々な興味深いパターンが現れるが，詳しいことは [7, 8] などのテキストを参照するとよい．

演習問題

問題 2.15 変数変換

$$\tilde{t} = at, \qquad \tilde{x} = \sqrt{\frac{a}{D}}x, \qquad \tilde{u} = \frac{u}{N}$$

を用いて,

$$
\begin{aligned}
&u_t = Du_{xx} + +au\left(1-\frac{u}{N}\right), \qquad t>0,\ x\in(0,L)\\
&u(t,0)=u(t,L)=0, \qquad t>0\\
&u(0,x)=f(x), \qquad x\in(0,L)
\end{aligned}
$$

を新しい変数で書き直せ.

問題 2.16 アリー効果を含むモデル方程式

$$
\begin{aligned}
&u_t = Du_{xx} + au\left(1-\frac{u}{N}\right)\left(\frac{u}{M}-1\right), \qquad t>0,\ x\in(0,L)\\
&u(t,0)=u(t,L)=0, \qquad t>0\\
&u(0,x)=f(x), \qquad x\in(0,L)
\end{aligned}
$$

を無次元化せよ.

問題 2.17 (2.13) の数値スキームを次の境界条件に対応するように変更せよ.

(1) $u_x(t,0)=c_1, \quad u_x(t,1)=c_2$

(2) $u_x(t,0)=bu(t,0), \quad u_x(t,1)=-bu(t,1),\ b>0$

それぞれのスキームをプログラムに実装して,数値計算を行え.

問題 2.18 初期値境界値問題

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} + \lambda u(1-u), \qquad t>0,\ x\in(0,L)\\
&u_x(t,0)=u_x(t,L)=0, \qquad t>0\\
&u(0,x)=f(x), \qquad x\in(0,L)
\end{aligned}
$$

を正の初期関数 $f(x)>0$ に対してプログラムに実装し,数値実験を通してどんな正の初期値と正の $\lambda>0$ に対しても解が $t\to\infty$ のとき 1 に収束することを確認せよ.

問題 2.19 初期値境界値問題

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} + \lambda u(1-u)(u-0.05), \qquad t>0,\ x\in(0,1)\\
&u_x(t,0)=u_x(t,1)=0, \qquad t>0\\
&u(0,x)=f(x), \qquad x\in(0,1)
\end{aligned}
$$

を以下のパラメータを用いて数値計算して,解の定性的な振る舞いを調べよ.

(1) $\lambda=20,\ f(x)>0$

(2) $\lambda=80,\ f(x)=a\sin(\pi x),\ a=0.3,0.6,1$

問題 2.20 拡散マルサス方程式

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} + \pi^2 u, \qquad t > 0,\ x \in (0,1)\\
&u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, \qquad t > 0\\
&u(0,x) = f(x), \qquad x \in (0,1)
\end{aligned}$$

の定常解 $\overline{u} \equiv 0$ の安定性について調べよ．また，$\overline{u}(x) = \sin(\pi x)$ も定常解であることを示し，その安定性を調べよ．

問題 2.21 定理2.4の証明のアイデアを用いて，

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} + \lambda u(1-u), \qquad t > 0,\ x \in (0,L)\\
&u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0, \qquad t > 0\\
&u(0,x) = f(x), \qquad x \in (0,L)
\end{aligned}$$

が $\lambda \leq \pi^2$ のとき正の定常解をもたないことを示せ．
（ヒント：正の定常解が存在するとして，$\phi(x) = \sin(\pi x)$ という関数を方程式にかける．）

問題 2.22 $(\lambda, u) = (9\pi^2, 0)$ も

$$\begin{aligned}
&u'' + \lambda u(1-u) = 0, \qquad x \in (0,1)\\
&u(0) = u(1) = 0
\end{aligned}$$

の分岐点である．摂動法を用いて，分岐点の近傍での解を

$$\lambda = 9\pi^2 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \cdots, \qquad u(x) = \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \cdots$$

という近似的な形で求めよ．$u_1(x) = k\sin(3\pi x)$ であることを示し，$a_1 = 1$ と仮定して u_2 に対する方程式を解くことで k を定めよ．

問題 2.23 問題2.22の設定で分岐点 $(\lambda, u) = (4\pi^2, 0)$ の場合，$a_1 = 0, u_1 = 0$ となるという意味で $\lambda = \pi^2$ や $\lambda = 9\pi^2$ の場合と少し異なることを示し，ゼロでない最初の u_i を求めよ．

問題 2.24 摂動法を用いて

$$\begin{aligned}
&u'' + \lambda u(1-u) = 0, \qquad x \in (0,1)\\
&u'(0) = u'(1) = 0
\end{aligned}$$

の分岐点 $(\lambda, u) = (\pi^2, 0)$ の近傍の解の近似を求めよ．

問題 2.25 $a, b > 0$ としたモデル

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} + \lambda \left[u(1-u) - \frac{au}{a+bu} \right], \qquad t > 0,\ x \in (0,1) \\
&u(t,0) = u(t,1) = 0, \qquad t > 0 \\
&u(0,x) = f(x), \qquad x \in (0,1)
\end{aligned}
$$

の数値シミュレーションを正の初期データ f に対して行え．これは個体が狩猟・収穫される状況を表す，いわゆる Holling type II モデルである．

問題 2.26 問題

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} + \lambda u(1-u), \qquad t > 0,\ x \in (0,1) \\
&u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, \qquad t > 0 \\
&u(0,x) = f(x), \qquad x \in (0,1)
\end{aligned}
$$

について，$\overline{u}(x) \equiv 1$ が漸近安定な定常解で，$\overline{u}(x) \equiv 0$ が不安定な定常解であることを示．

問題 2.27 $\overline{u}(x) \equiv c$ が $u' = g(u)$ の安定な（不安定な）定常解ならば，$\overline{u}(x) \equiv c$ が問題

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} + g(u), \qquad t > 0,\ x \in (0,1) \\
&u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, \qquad t > 0 \\
&u(0,x) = f(x), \qquad x \in (0,1)
\end{aligned}
$$

の漸近安定な（不安定な）定常解であることを示．

問題 2.28 数値シミュレーションをして，アリー効果を考慮したモデル

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} + \lambda u(1-u)(u-a), \qquad t > 0,\ x \in (0,1) \\
&u(t,0) = u(t,1) = 0, \qquad t > 0 \\
&u(0,x) = f(x), \qquad x \in (0,1)
\end{aligned}
$$

に対する分岐図を次のパラメータの場合に図示せよ：

$$
(1)\ \ a = 0.4, \quad (2)\ \ a = 0.1, \quad (3)\ \ a = 0, \quad (4)\ \ a = -0.2, \quad (5)\ \ a = -1, \quad (6)\ \ a = -10.
$$

分岐図の定性的な性質を見て，パラメータ a の分岐点を推定せよ．

References

[1] 岡崎 誠，べんりな変分原理，共立出版，1993.

[2] 桑村 雅隆，パターン形成と分岐理論，共立出版，2015.

[3] R. Cristoferi, *Calculus of Variations, lecture notes*, 2016
(URL: https://www.math.cmu.edu/cna/Publications/publications2016/papers/16-CNA-007.pdf)

[4] Bernard Dacorogna, *Introduction to the Calculus of Variations*, Imperial College Press, 2015.

[5] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, AMS, Providence, Rhode Island, 1998.

[6] Mark Kot, *A First Course in the Calculus of Variations*, American Mathematical Society, 2014.

[7] J.D. Murray, *Mathematical Biology: I. An Introduction*, Springer, 2002.

[8] J.D. Murray, *Mathematical Biology: II. Spatial Models and Biomedical Applications*, Springer, 2003.

[9] J. Nocedal, S.J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer, 2006.