非線型解析 ・ 講義ノート

更新：1 月 20 日（最終版）

Karel Švadlenka・京都大学

2019 年 後期

Contents

1　復習

この章ではこの講義の前に位置する昨年の講義「非線型解析入門」の変分問題に関する内容を復習しておく．詳しいところは，昨年の講義ノートを参照して下さい．

1.1　最急降下曲線とオイラー・ラグランジュ方程式

Brachistochrone problem

平面内の 2 点 $A = [a, \alpha], B = [b, \beta]$ が与えられ，$\alpha > \beta$ を満たすとする．質点が重力だけで出発点 A から終点 B にでたどり着くのに必要な時間を最短にする経路を求めよ．

下図の設定で，質点が動く経路が関数 $u(x)$ のグラフで表せるとする．このグラフの長さを L，質点が点 A から $u(x)$ のグラフに沿って s だけの距離を動いた時点での質点の速度を $\tilde{v}$ とおく．そのとき，A から B に到着するのにかかる時間は

$$T = \int_0^T dt = \int_0^L \frac{dt}{ds}\, ds = \int_0^L \frac{1}{\tilde{v}(s)}\, ds = \int_a^b \frac{1}{v(x)} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx$$

である．ただし，ここで $v(x)$ は座標 x における質点の速度である．

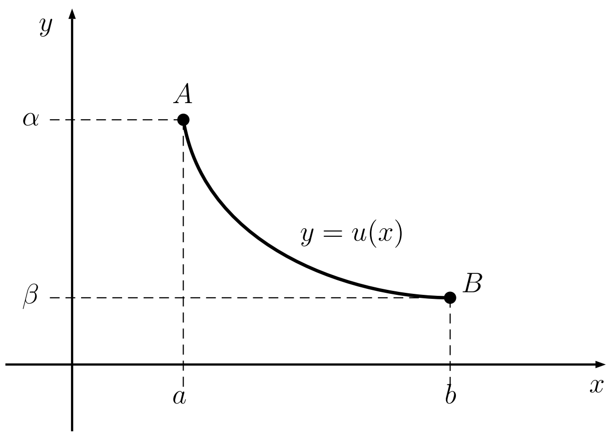


図 1：最速曲線の設定

速度 v をエネルギー保存の法則より計算できる．質点の質量を m，重力加速度を g とすれば，

$$\frac{1}{2} m v^2(x) + mgu(x) = mg\alpha$$

より　$v(x) = \sqrt{2g(\alpha - u(x))}$.

A と B を結ぶ経路 $u(x)$ が決まれば，移動にかかる時間は

$$T[u] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (u'(x))^2}{\alpha - u(x)}}\, dx$$

で与えられる．境界条件

$$u(a) = \alpha, \qquad u(b) = \beta.$$

を満たす経路 $y = u(x)$ のうち，時間 $T[u]$ を最小にするものを求めることが課題である．

対象となる関数の空間を決めれば，この問題を次の一般的な形で書くことができる：

変分問題

$$\inf_{u\in X} J[u] \tag{1.1}$$

ただし， $$J[u] = \int_a^b f\big(x, u(x), u'(x)\big)\,dx, \quad X = \left\{u \in C^1([a,b]);\ u(a) = \alpha,\, u(b) = \beta\right\}.$$

汎関数 J が関数 $f(x,u,\xi) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を通して，$x, u(x)$ と $u'(x)$ に一般的な形で依存するようにした（関数 f の変数は，第一変数は x，第二変数は u，第三変数は ξ という名前をつけた）．

最小化問題 (1.1) の解の候補を求めることをラグランジュのアイデアに沿って考える．試験関数（test function）$\varphi \in C_0^1(a,b)$ を任意に選ぶ（ここで，$C_0^1(a,b)$ は，$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ を満たす 1 回連続微分可能な関数 φ の空間である）．求める解を $\overline{u} \in X$ とすれば，関数 $u_\varepsilon(x) := \overline{u}(x) + \varepsilon\varphi(x)$ は

$$J[\overline{u}] \le J[u_\varepsilon] \qquad \forall\varepsilon \in \mathbb{R}$$

を満たす．関数 $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $j(\varepsilon) := J[u_\varepsilon]$ で定義すると，この式は

$$j(0) \le j(\varepsilon) \qquad \forall\varepsilon \in \mathbb{R}$$

と書き換えられる．しかし，これは j が $\varepsilon = 0$ において最小値を持つということを意味する．従って，汎関数の定義で現れる関数 f が滑らかであれば（以下では $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ と仮定する），j も滑らかな関数となり，

$$j'(0) = 0, \qquad j''(0) \ge 0 \tag{1.2}$$

が最小値の必要条件となる．

$$j(\varepsilon) = \int_a^b f\big(x, \overline{u}(x) + \varepsilon\varphi(x), \overline{u}'(x) + \varepsilon\varphi'(x)\big)\,dx$$

だから，$j'(0) = 0$ を具体的に計算すると，

$$\int_a^b \big[f_\xi\left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\right)\varphi'(x) + f_u\left(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\right)\varphi(x)\big]\,dx = 0 \tag{1.3}$$

という方程式を得る．ただし，f_u, f_ξ は偏微分 $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial \xi}$ を表す記号である．(1.3) の第 1 項で部分積

分を行うことで，

$$\int_a^b \left[-\frac{d}{dx}\left(f_\xi\left(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)\right)\right)+f_u\left(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)\right)\right]\varphi(x)\,dx=0 \quad \forall\varphi\in C^1([a,b])$$

with $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ がわかる．φ が境界点で消えるため，境界項が現れない．そこで，次の変分法の基本補題を用いる．

Fundamental lemma of the calculus of variations

関数 $v\in C([a,b])$ が条件

$$\int_a^b v(x)\varphi(x)\,dx=0 \qquad \forall\varphi\in C^1([a,b]) \text{ with } \varphi(a)=\varphi(b)=0 \tag{1.4}$$

を満たすならば，$v\equiv 0$ in $[a,b]$ が成り立つ．

この補題により，$[\cdot]$ の中身が恒等的にゼロであるので，

$$-\frac{d}{dx}\left(f_\xi\left(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)\right)\right)+f_u\left(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)\right)=0 \qquad \forall x\in(a,b) \tag{1.5}$$

というオイラー・ラグランジュ方程式（Euler-Lagrange equation）を得る．f_ξ のなかに u の微分が入っており，それをさらに x について微分しているので，一般には 2 階微分方程式である．よって，この導出を正当化するため $\overline{u}\in C^2([a,b])$ を仮定する必要がある．

関数 f が x に陽に依存しない場合，$\overline{u}'\neq 0$ が成り立つ限り，オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dx}\big(f-\overline{u}'f_\xi\big)=0 \qquad \text{または} \qquad f-\overline{u}'f_\xi=C, \quad C\in\mathbb{R} \tag{1.6}$$

という方程式と同値である．最急降下曲線の問題では，

$$f(x,u,\xi)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+\xi^2}{\alpha-u}}$$

であるから，上式に代入して，$C\sqrt{2g}$ を C で置き換えれば，

$$\sqrt{\frac{1+(\overline{u}'(x))^2}{\alpha-\overline{u}(x)}}-\overline{u}'(x)\frac{\overline{u}'(x)}{\sqrt{\alpha-\overline{u}(x)}\sqrt{1+(\overline{u}'(x))^2}}=C,$$

整理して，

$$(\overline{u}'(x))^2=\frac{1-C^2(\alpha-\overline{u}(x))}{C^2(\alpha-\overline{u}(x))}$$

を得る．計算を省略するが，$R = \frac{1}{2C^2}$ とおくと，

$$\begin{aligned} x(\phi) &= a + R(\phi - \sin\phi) \\ y(\phi) &= \alpha - R(1 - \cos\phi) \end{aligned}$$

で与えられる経路はオイラー・ラグランジュ方程式の解であることがわかる．これは，水平な直線 $y = \alpha$ の下側を転がる半径 R の円の上にある点が描く軌跡で，サイクロイドと呼ばれる．ここで，$\phi = 0$ を代入すると，$(x(0), y(0)) = (a, \alpha)$ となるので，左端における境界条件が満たされる．右端での境界条件を満たすには，ϕ の範囲と R を適切に定めればよい．下図でわかるように，$R \in (0, \infty)$ を変えていくことによって描かれるサイクロイドは $y < \alpha$ の半平面を埋め尽くす．また，この半平面の任意の点を通るサイクロイドはただ一つである．

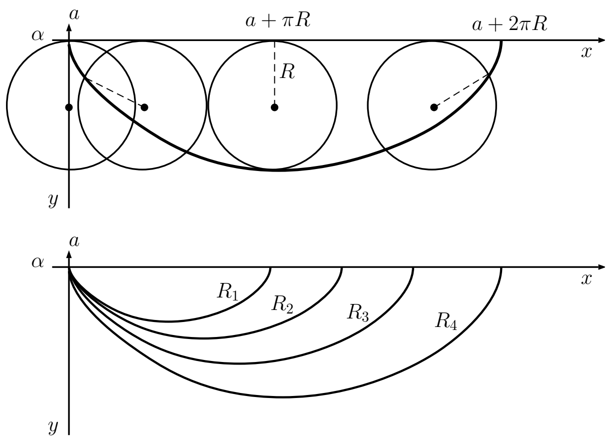


図 2：サイクロイド

1.2　根本的な疑問点

上記の導出を振り返ってみると，オイラー・ラグランジュ方程式は最小値のための必要条件にすぎないことがわかる．つまり，ある関数 $\overline{u}$ がオイラー・ラグランジュ方程式の解であっても，最小値であるとは限らない．さらに，上の議論を C^2-級関数の場合に限っているから，例えば，C^2-級関数のなかでは最小値が存在せず，区分的に C^1-級関数のなかでは存在する，という状況も考えられる．

例 1.1　どのようなことが起こりうるかを把握し，直感を養うために，いくつか例を挙げる．汎関数の原型を

$$J_0[u] = \int_0^1 \left(1 - \left[u'(x)\right]^2\right)^2 dx$$

として，関数空間を二通り考える：

$$\begin{aligned} X_0 &= \left\{u \in C^0([0,1];\ u(0) = u(1) = 0\right\} \\ X_1 &= \left\{u \in C^1([0,1];\ u(0) = u(1) = 0\right\} \end{aligned}$$

J_0 に対するオイラー・ラグランジュ方程式は (1.6) に従って，

$$\left(1-[u'(x)]^2\right)\left(1+3[u'(x)]^2\right)=C$$

と書けて，この解は明らかに $u'(x)=const$，すなわち線型関数である．境界条件を満たす線型関数は $u(x)=0$ しかない．

(1) まず，J_0 の最小化問題を考える．$J_0 \geq 0$ だから，$J_0[u]=0$ なる u を見つけることができれば，u が最小化関数であることが言える．また，J_0 の値を小さくしようと思えば，関数 u の微分をできるだけ $+1$ か -1 になるようにとればよいということが明らかである．しかし，$u \in X_1$ の場合，ゼロ境界条件を維持しながら，すべての点で $u'=+1$ または $u=-1$ にするのが不可能である．また，下図を見れば，$n \to \infty$ のとき $J_0[u_n] \to 0$ を満たす関数列 $\{u_n\}$ が存在し，$\inf_{u\in X_1} J_0[u]=0$ であることがわかる．このとき，J_0 の下限は達成されない．

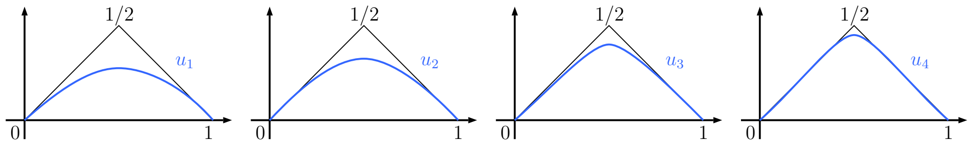


図 3：X_1 において J_0 の inf に近づく関数列

一方で，X_0 における下限は達成されるだけではなく，傾き $+1$ と -1 の直線をうまくつなぎ合わせれば最小化関数を無限に作れる（下図を参照）．

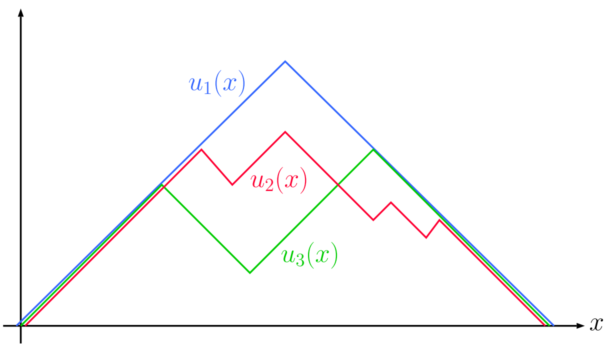


図 4：X_0 での J_0 の最小化関数の例

(2) つぎに汎関数

$$J_1[u]=J_0[u]+\int_0^1 (u(x))^2\,dx$$

を考える．新しく加わった項は（最小化問題で）関数の値を小さくする効果がある．X_1 での下限は J_0 の場合と同様，達成されない．そして，X_0 での J_1 の下限は 0 であることは図 5 のような列 $\{u_n\}\subset X_0$ をとればわかる．

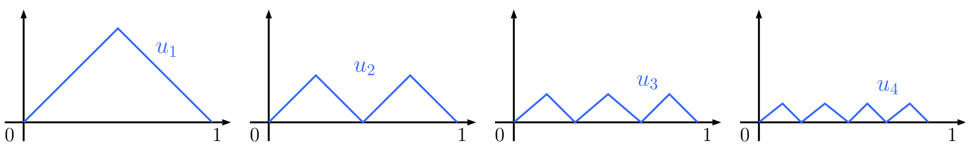


図 5：X_0 において J_1 の inf に近づく関数列

ここで，

$$J_0[u_n] = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

そして，

$$\int_0^1 (u_n(x))^2 \, dx = \frac{1}{24n^2}$$

だから，$n \to \infty$ のとき $J_1[u_n] \to 0$ が成り立つ．

興味深いことに，このとき，L^2-ノルムでも最大値ノルムでも $u_n \to 0$ で，$J_1[u_n] \to 0$ であるにもかかわらず，$J_1[0] > 0$ となっている．これは，最小値の存在を言うのに肝心な下半連続性という性質を J_1 は備えていないということを意味する．

このような現象は自然におけるパターン形成でよく見られる．例えば，金属などの材料では，エネルギーの最小化は微細構造（microstructure）の形成を引き起こす．しかし，微細構造は図 5 のように無限に細かくなっていくわけではなく，エネルギー汎関数 J_1 で考慮していない要因の作用によりある大きさのスケールで落ち着く．

(3) 最後に，汎関数

$$J_2[u] = J_0[u] + \varepsilon \int_0^1 \left(u''(x)\right)^2 \, dx, \qquad \varepsilon > 0$$

を考える．ただし，ε は小さな正の数を想定して，最終的には $\varepsilon \to 0$ とする．u の 2 階微分が汎関数に現れるので，X_1 での最小値のみ求める．J_0 の最小化は傾き ± 1 を要求するのに対し，2 階微分の項は u の"曲がり具合"を表しているので，曲がるところ（＝ 1 階微分が大きく変化する＝傾きが $+1$ から -1 に変わるまたはその逆）ができるだけ少ないことを要求する．よって，図 6 のような最小化関数が得られることが予想できる．

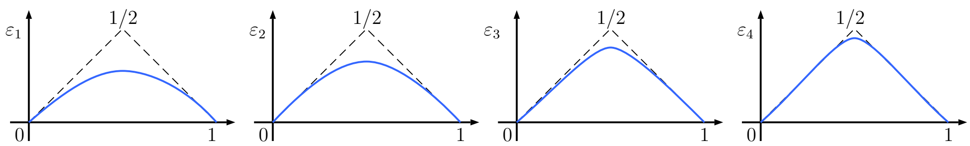


図 6 : ε を小さくしていったときの X_1 における J_2 の最小化関数の振る舞い

実際，オイラー・ラグランジュ方程式を解くと，このような解 u_ε が得られ，最小化関数は一意的に定まる．$\varepsilon \to 0$ とすると，

$$u_\varepsilon(x) \to u(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

これは J_0 の X_0 での最小値の一つである（図 4 または図 5 の u_1 を参照）．すなわち，J_0 に小さい項を加えて，$\varepsilon \to 0$ とすることによりその効果を消すと，もともと無限にあった J_0 の最小化関数のうちただ一つのものが選択される．このような汎関数の修正項を selection principle と呼ぶ（この場合は「グラフが折れる点をできるだけ少なくする」というものである）．

この例を通して，いくつかの基本的な疑問点が浮かび上がる．

(1) (1.1) の inf が達成されるか？

(2) どのような関数空間をとれば，inf が達成されるか？

(3) オイラー・ラグランジュ方程式の解が極小値であるための十分条件があるのか？

この講義で，これらの疑問への答えを見つけていく．
まとめとして，最小値の定義を述べておく．

最小値・極小値の定義

(1) 汎関数 J の X における下限が $J[\overline{u}]$ で達成されるとは，

$$J[\overline{u}] \leq J[u] \qquad \forall u \in X \tag{1.7}$$

という意味である．最小値を与える関数を最小化関数または minimizer と呼び，以降では $\overline{u}$ という記号で表す．

(2) 一方で，極小値の場合は，$\overline{u}$ のある近傍に限定すれば (1.7) が成り立つ，という状況である．有限次元ではすべてのノルムが同値であるため，近傍を指定するときにどのノルムを用いても構わない．しかし，ここで考える最小化は無限次元である関数空間のなかで行うため，ノルムの取り方によって答えが変わる可能性がある．以下では，次の二つのノルムを使う：

$$\|u\|_{C^0([a,b])} = \max_{x\in[a,b]} |u(x)|, \qquad \|u\|_{C^1([a,b])} = \max_{x\in[a,b]} |u(x)| + \max_{x\in[a,b]} |u'(x)|.$$

(2a) 弱い極小値 $\overline{u} \in X$ は次で定義される：

$$\exists \delta > 0 \ \text{ satisfying } \qquad J[\overline{u}] \leq J[u] \quad \forall u \in X \ \text{ such that } \ \|\overline{u} - u\|_{C^1([a,b])} < \delta. \tag{1.8}$$

(2b) 強い極小値 $\overline{u} \in X$ は次で定義される：

$$\exists \delta > 0 \ \text{ satisfying } \qquad J[\overline{u}] \leq J[u] \quad \forall u \in X \ \text{ such that } \ \|\overline{u} - u\|_{C^0([a,b])} < \delta. \tag{1.9}$$

弱い極小値の場合，u の値と微分と両方が $\overline{u}$ のものに近い関数 u だけが比較の対象となるが，強い極小値の場合，u の値のみ $\overline{u}$ の値に近い関数 u がすべて比較の対象となるので，条件がより厳しくなる．そのため，弱い極小値が強い極小値になるとは限らない．

$\overline{u} \in C^1([a,b])$ が (1.1) の弱い極小値であれば，オイラー・ラグランジュ方程式 (1.5) を満たさなければならない，ということが第 1 変分の計算によりわかる（上では C^2-級で確認したが，C^1-級に拡張できる）．オイラー・ラグランジュ方程式の解を変分問題の停留曲線と呼び，対応する汎関数の値を停留値と呼ぶ．停留値が極小値でも極大値でもない場合がある．

弱い極小値を求めるなら，オイラー・ラグランジュ方程式を満たさなければならないという必要条件があるから，極小値のための十分条件を考えて，オイラー・ラグランジュ方程式の（普通は数少ない）解のなかで判定すればよい（これについては1.3で扱う）．一方，強い極小値を求める場合，オイラー・ラグランジュ方程式の解になっているとは限らないので，格段と難しくなる．オイラー・ラグランジュ方程式の解が強い極小値であるかどうかを決めるための十分条件は知られている（例えば，[9] 10 章以降）が，この条件が満たされなかったとき，他の極小値が存在するかについて何も言えない．そのため，この講義では最小値の存在にも着目する．

1.3　極小回転面と極小値のための十分条件

面積最小の回転面の問題

非負の関数 $u(x)$ のグラフを x-軸のまわりで回転させてできる回転面のうち，面積が最小のものを求めよ．ただし，グラフの x の範囲を区間 $[a,b]$ とし，左端の回転面の半径を $\alpha > 0$，右端の半径を $\beta > 0$ と固定する．

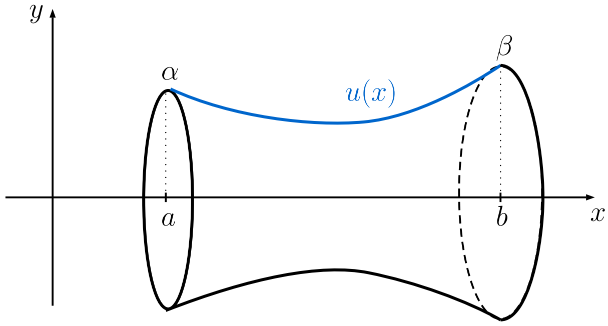


図 7：最小な面積をもつ回転面の問題の設定

上記の問題を式を用いて書くと，

$$\inf_{u\in X} J[u], \qquad J[u] = 2\pi\int_a^b u(x)\sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx, \quad X = \left\{u \in C^1([a,b]);\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta\right\}. \tag{1.10}$$

1.1節で紹介した一般的な設定での被積分関数は $f(x,u,\xi) = 2\pi u\sqrt{1+\xi^2}$ で，x に陽に依存しないため，対応するオイラー・ラグランジュ方程式は $f - u' f_\xi = C,\quad C \in \mathbb{R}$ と書ける．代入・整理して，

$$\frac{\overline{u}}{\sqrt{1+(\overline{u}')^2}} = C.$$

これを解くと，

$$\overline{u}(x) = C\cosh\left(\frac{x-D}{C}\right), \qquad C, D \in \mathbb{R}$$

という一般解を得る．懸垂線（英語で catenary）と呼ばれる曲線である．定数 C, D は境界条件 $\overline{u}(a) = \alpha, \overline{u}(b) = \beta$ より決めることになるが，非線形な連立方程式で解析的には解けないため，

$(a,b)=(-h,h), \alpha=\beta=k$ という対称的な場合のみ考える．このとき境界条件は

$$C\cosh\left(\frac{-h-D}{C}\right)=k=C\cosh\left(\frac{h-D}{C}\right)$$

を意味する．cosh が偶関数だから，等式が成り立つのは $-h-D=h-D$ のときと $-h-D=-(h-D)$ のときであるが，前者は $h=0$ で意味をなさないので，後者から従う $D=0$ が成り立たなければならない．そこで，$z:=\frac{h}{C}$ とおくと，$C\cosh z=k$ という式になり，$\frac{k}{C}=\frac{k}{h}z$ より，

$$\cosh z=\frac{k}{h}z$$

という方程式を z について解けばよい．これも解析的には解けないが，グラフを用いて解の個数を確かめることができる．

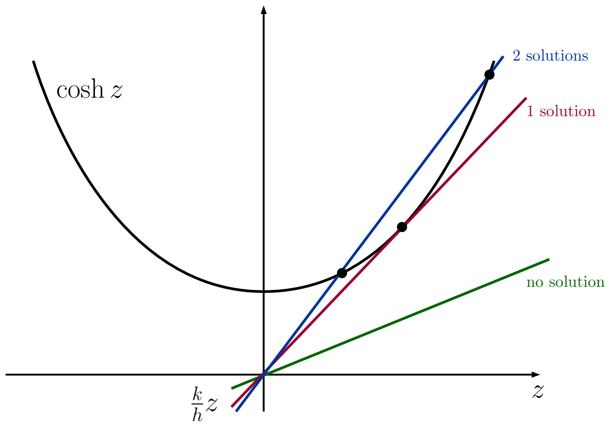


図 8：方程式 $\cosh z=\frac{k}{h}z$ をグラフィカルに解く

$\frac{k}{h}$ がある臨界値 k_c（$k_c\approx 1.50888$ と数値的に計算できる）より小さければ，解が存在せず，臨界値 k_c に等しければ，解がちょうど 1 個存在し，k_c より大きければ解が 2 個あることがわかる．この二つの解は以下のような浅い懸垂線と深い懸垂線である．

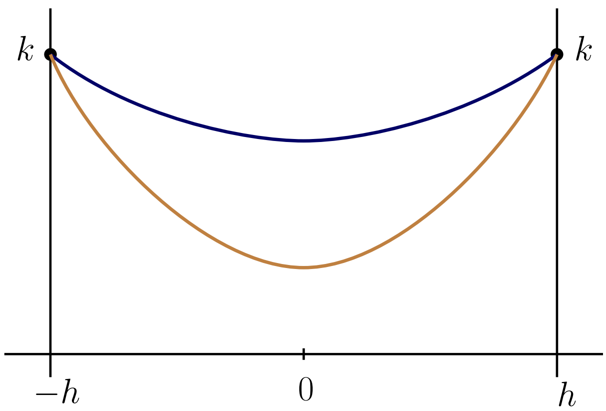


図 9：オイラー・ラグランジュ方程式を満たす 2 本の懸垂線

ここからは，オイラー・ラグランジュ方程式の解 $\overline{u}$ が極小値を与えるかどうかをどのように見

分けるかについて考える．設定としては，$f \in C^3([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ として，変分問題 (1.1) に対応するオイラー・ラグランジュ方程式の解 $\overline{u} \in X \cap C^2([a,b])$ が存在するとする．

$\varphi \in C_0^1(a,b) = \{v \in C^1(a,b);\ v(a) = v(b) = 0\}$, に対し，$j(\varepsilon) = J[\overline{u} + \varepsilon\varphi]$ とおく．$\overline{u}$ が弱い極小値ならば，$j'(0) = 0$ そして $j''(0) \geq 0$ がすべての $\varphi \in C_0^1(a,b)$ に成り立つ，という極小値の必要条件がある．また，$j'(0) = 0$ そして $j''(0) > 0$ がすべての $\varphi \in C_0^1(a,b), \varphi \not\equiv 0$ について成り立てば，$\overline{u}$ は弱い極小値である，という十分条件がある．いずれにしても，j の 2 階微分が重要であるから，それを計算しておく．

$$\begin{aligned} j'(\varepsilon) &= \int_a^b \left[f_u\left(x, \overline{u}(x) + \varepsilon\varphi(x), \overline{u}'(x) + \varepsilon\varphi'(x)\right)\varphi(x) \right. \\ &\qquad \left. + f_\xi\left(x, \overline{u}(x) + \varepsilon\varphi(x), \overline{u}'(x) + \varepsilon\varphi'(x)\right)\varphi'(x)\right] dx \\ j''(0) &= \int_a^b \left[f_{uu}(x,\overline{u},\overline{u}')\varphi^2 + 2f_{u\xi}(x,\overline{u},\overline{u}')\varphi\varphi' + f_{\xi\xi}(x,\overline{u},\overline{u}')(\varphi')^2 \right] dx \end{aligned}$$

$P(x) = f_{uu}(x,\overline{u},\overline{u}'),\ Q(x) = f_{u\xi}(x,\overline{u},\overline{u}'),\ R(x) = f_{\xi\xi}(x,\overline{u},\overline{u}')$ とおいて，

$$\int_a^b \frac{d}{dx}[w(x)\varphi^2(x)]\,dx = 0 \qquad \forall w \in C^1([a,b])$$

に注意すると，$j''(0)$ を

$$j''(0) = \int_a^b \left[(P + w')\varphi^2 + 2(Q+w)\varphi\varphi' + R(\varphi')^2\right] dx$$

と書くことができる．これは

$$j''(0) = \int_a^b \left[R\left(\varphi' + \frac{Q+w}{R}\varphi\right)^2 + \left((P+w') - \frac{(Q+w)^2}{R}\right)\varphi^2 \right] dx$$

のように変形できるので，関数 w を微分方程式

$$w' = -P + \frac{(Q+w)^2}{R} \tag{1.11}$$

を満たすようにとれば，上の積分の符号が R の符号に支配されることが見込まれる．実際，以下で示すように，$R \geq 0$ in $[a,b]$ は $\overline{u}$ が極小値であるための必要条件である．しかし，$R \geq 0$ を $R > 0$ に変えても，十分条件ではない．その理由は，方程式 (1.11) の解が区間 $[a,b]$ 全体で存在するとは限らないからである．

ルジャンドルの必要条件

$$R(x) = f_{\xi\xi}(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)) \geq 0 \qquad \forall x \in [a,b]$$

は，汎関数 $I[u]$ が $\overline{u}$ において極小値を達成するための必要条件である．

回転面の問題で，Legendre の条件を確認する．$f(x,u,\xi) = 2\pi u\sqrt{1+\xi^2}$ より

$$f_{\xi\xi}(x,\overline{u},\overline{u}') = 2\pi\frac{\overline{u}}{(1+(\overline{u}')^2)^{3/2}} = 2\pi\frac{C}{\cosh^2(\frac{x-D}{C})}$$

であるため，すべての正の関数 $\overline{u}$ について正となり，この必要条件を用いて解を排除することができない．

これを受けて，他の条件について考える．微分方程式 (1.11) が区間 $[a,b]$ で解をもてば，十分条件が得られる．(1.11) はリッカチの方程式（Riccati equation）で一般には解けないから，変換

$$w(x) = -Q - R\frac{\nu'(x)}{\nu(x)} \tag{1.12}$$

を $\nu(x) \neq 0\ \forall x \in [a,b]$ の仮定のもとで行い，線形な 2 階微分方程式（ヤコビ方程式）

$$\frac{d}{dx}(R\nu') + (Q'-P)\nu = 0 \qquad \text{または} \qquad \nu''(x) + \frac{R'}{R}\nu' + \frac{Q'-P}{R}\nu = 0 \tag{1.13}$$

に直す．境界条件を満たす解 ν が一意的に存在し二つの独立な基本解 ν_1, ν_2 の線形結合 $\nu(x) = C_1\nu_1(x) + C_2\nu_2(x)$ で書けるという一般的な理論があり，このような線形で斉次な方程式は扱いやすいので，ありがたいことである．

十分条件

次の 2 つの条件

(a) $R(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$

(b) $\nu(x) \neq 0\ \forall x \in [a,b]$ を満たすヤコビ方程式 (1.13) の解 ν が存在する

が満たされれば，第 2 変分 $j''(0)$ が，恒等的に零でないすべての φ について正となる．

実は，ヤコビはオイラー・ラグランジュ方程式との関係に気づき，

$$\nu_1 = \frac{\partial\overline{u}}{\partial c_1}, \qquad \nu_2 = \frac{\partial\overline{u}}{\partial c_2}$$

がヤコビ方程式の二つの特殊解であることを昨年の講義で得た．そこで，ヤコビは

$$\Delta(x,a) = \nu_2(a)\nu_1(x) - \nu_1(a)\nu_2(x)$$

という解に着目した．$\Delta(x,a)$ は $x = a$ でゼロになるが，その右にある $\Delta(\cdot,a)$ の最初の零点 $\overline{a}$ を a の**共役点**と呼ぶ．
もし，$\overline{a} > b$ なら，変数を少しシフトすることで $[a,b]$ でゼロにならないようなヤコビ方程式の解が作れるから，十分条件より $\overline{u}$ が minimizer であることが保証される．一方で，$\overline{a} = b$ のとき，第 3 変分以上を考える必要がある．また，$\overline{a} < b$ のとき，$\overline{u}$ が minimizer にはならないことが証明されている（詳しくは，[5] の 78 ページを参照）．まとめると，次の条件を得た．

ヤコビの必要条件

$$\Delta(x,a) \neq 0 \qquad \forall x \in (a,b)$$

は，$\overline{u}$ が弱い極小値であるための必要条件である．

以上で極小値のための三つの必要条件：オイラー・ラグランジュ方程式，Legendre の条件と Jacobi の条件を紹介した．一方で，上で述べたように，十分条件も得られる．

十分条件

次の三つの条件が成り立てば，$\overline{u}$ は弱い極小値である．

(1) $\overline{u}$ はオイラー・ラグランジュ方程式の解である．

(2) 強い Legendre の条件：$R(x) = f_{\xi\xi}(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)) > 0 \ \forall x \in [a,b]$.

(3) 強い Jacobi の条件：$\Delta(x,a) \neq 0 \ \forall x \in (a,b]$.

回転面の問題に戻ろう．対称な境界条件 $u(-h) = u(h) = k$ を課す場合，解析的なアプローチができる．ヤコビ方程式の二つの解は

$$\nu_1(x) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial C} = \cosh\left(\frac{x-D}{C}\right) - \left(\frac{x-D}{C}\right)\sinh\left(\frac{x-D}{C}\right), \qquad \nu_2(x) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial D} = -\sinh\left(\frac{x-D}{C}\right)$$

となり，共役点 $\overline{a}$ は

$$\frac{\nu_1(\overline{a})}{\nu_2(\overline{a})} = \frac{\nu_1(a)}{\nu_2(a)}$$

という方程式を満たす．$\overline{z} = \frac{\overline{a}-D}{C}, z = \frac{a-D}{C}$ とおけば，この方程式は

$$\overline{z} - \coth \overline{z} = z - \coth z$$

と変形される．奇関数 $z - \coth z$ のグラフは以下に示す．

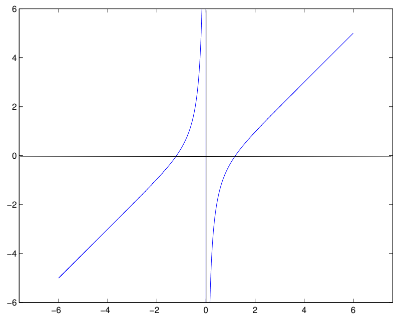


図 10：関数 $z - \coth z$ のグラフ

考えている対称な場合は $D=0, a=-h<0$ であるから，$z=-\frac{h}{C}<0$．したがって，$z-\coth z$ のグラフが z-軸と交わる点 $z_c \approx -1.199679$ より小さい z について Jacobi の条件が満たされない（このとき，$\overline{a}<|a|=h=b$ となるから，深い懸垂線に対応）．逆に，z_c より大きい負の z について Jacobi の条件が満たされる（浅い懸垂線に対応）．

1.4　Dido 女王の問題と制約条件

Didoの問題

点 $(-a,0)$ と点 $(a,0)$ を結び，長さ ℓ をもつ関数 $u(x)$ のグラフのうち，x-軸とグラフに囲まれた面積が最大となる関数 u を求めよ．

すなわち，

$$J[u]=\int_{-a}^{a} u(x)\,dx$$

を条件

$$u(-a)=0, \qquad u(a)=0, \qquad \int_{-a}^{a}\sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx=\ell$$

のもとで最大にする C^1-関数 $u(x)$ を求める．

このような積分型の制約条件がつく変分問題（等周問題ともよばれる）を解くことを目指して，一般的な設定から始める．つまり，$f\in C^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}), g\in C^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ として，変分問題

$$\inf_{u\in X} J[u], \qquad J[u]=\int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx \tag{1.14}$$
$$X=\left\{u\in C^1([a,b]);\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta,\ \int_a^b g(x,u(x),u'(x))\,dx=0\right\}$$

の minimizer が満たすオイラー・ラグランジュ方程式を導くことを考える．

制約条件を満たす関数のなかで最小値を求めるため，変分を制約条件を満たす範囲で計算しなければならず，摂動として任意の $\varphi\in C_0^1(a,b)$ について単純に $u+\varepsilon\varphi$ をとることができない．そこで，制約条件を満たすようにこの摂動を修正するために，固定した関数 w に対してもう一つの自由度 δ を導入し，$u+\varepsilon\varphi+\delta w$ が X の元となるように陰関数定理により δ を ε の関数として決める．

u を minimizer とする．

$$\frac{d}{dx}\left[g_\xi(x,u(x),u'(x))\right]\neq g_u(x,u(x),u'(x))$$

を満たす $x \in (a,b)$ が存在すると仮定すると，

$$\int_a^b \left[g_\xi(x,u(x),u'(x))w'(x) + g_u(x,u(x),u'(x))w(x)\right]\,dx \neq 0$$

を満たす w がとれる．また，w を定数倍すれば，

$$\int_a^b \left[g_\xi(x,u(x),u'(x))w'(x) + g_u(x,u(x),u'(x))w(x)\right]\,dx = 1$$

とできる．

$\varphi \in C_0^1(a,b)$ を任意にとり，上の w と $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\begin{aligned} F(\varepsilon,\delta) &= J[u+\varepsilon\varphi+\delta w] = \int_a^b f\left(x, u+\varepsilon\varphi+\delta w, u'+\varepsilon\varphi'+\delta w'\right)\,dx \\ G(\varepsilon,\delta) &= \int_a^b g\left(x, u+\varepsilon\varphi+\delta w, u'+\varepsilon\varphi'+\delta w'\right)\,dx \end{aligned}$$

とおく．このとき，次が成り立つ：

$$G(0,0) = 0, \qquad G_\delta(0,0) = 1.$$

陰関数定理を適用して，$\varepsilon_0 > 0$ と $v_\varphi(0) = 0$ を満たす関数 $v_\varphi \in C^1([-\varepsilon_0,\varepsilon_0])$ があり，

$$G(\varepsilon, v_\varphi(\varepsilon)) = 0 \qquad \forall\varepsilon \in [-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$$

が成り立つ．つまり，このような ε について $u+\varepsilon\varphi+v_\varphi(\varepsilon)w \in X$ が言える．上式を ε で微分すると，

$$G_\varepsilon(\varepsilon, v_\varphi(\varepsilon)) + G_\delta(\varepsilon, v_\varphi(\varepsilon))v_\varphi'(\varepsilon) = 0 \qquad \forall\varepsilon \in [-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$$

を得るので，

$$v_\varphi'(0) = -G_\varepsilon(0,0).$$

$F(0,0) \leq F(\varepsilon, v_\varphi(\varepsilon))\ \ \forall\varepsilon \in [-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$ より，

$$\frac{d}{d\varepsilon}F(\varepsilon, v_\varphi(\varepsilon))\Big|_{\varepsilon=0} = F_\varepsilon(0,0) + F_\delta(0,0)v_\varphi'(0) = 0.$$

$F_\varepsilon(0,0)$ は φ に依存するが，$F_\delta(0,0)$ は φ に依存しないから，$\lambda = F_\delta(0,0)$ とおけば，$F_\varepsilon(0,0) - \lambda G_\varepsilon(0,0) = 0$，すなわち，

$$\int_a^b \left(\left[f_\xi(x,u,u')\varphi' + f_u(x,u,u')\varphi\right] - \lambda\left[g_\xi(x,u,u')\varphi' + g_u(x,u,u')\varphi\right]\right)\,dx = 0$$

を得る．部分積分と φ の任意性より

$$\frac{d}{dx}\left[f_\xi(x,u,u')\right] - f_u(x,u,u') = \lambda\left(\frac{d}{dx}\left[g_\xi(x,u,u')\right] - g_u(x,u,u')\right).$$

よく見ると，これは汎関数

$$\int_a^b \left[f(x,u(x),u'(x)) - \lambda g(x,u(x),u'(x))\right]\,dx \tag{1.15}$$

に対する（制約条件なしの）オイラー・ラグランジュ方程式であることがわかる．つまり，条件つき最小化問題 (1.14) の極小値 $\overline{u}$ が存在すれば，$\lambda \in \mathbb{R}$ があって，$\overline{u}$ が汎関数 (1.15) に対するオイラー・ラグランジュ方程式の解である（言い換えれば，この汎関数の停留値を与える）．この λ のことをラグランジュ未定乗数と言う．ラグランジュ未定乗数 λ は，minimizer が制約条件を満たすという条件より決まる．

上の Dido の問題では区間 $(-a,a)$ をとって，

$$u(-a) = u(a) = 0, \qquad f(x,u,\xi) = u, \qquad g(x,u,\xi) = \sqrt{1+\xi^2} - \frac{\ell}{2a}$$

としている．極大値 $\overline{u}$ が存在するなら，$\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して，$\overline{u}$ は

$$\int_{-a}^a \left[u(x) - \lambda\left(\sqrt{1+(u'(x))^2} - \tfrac{\ell}{2a}\right)\right]\,dx$$

に対するオイラー・ラグランジュ方程式の解である．オイラー・ラグランジュ方程式は

$$1 + \lambda\frac{d}{dx}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}}\right) = 0$$

であるが，これを積分して解くと，

$$u(x) = \pm\sqrt{\lambda^2 - (x-C_1)^2} + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

がわかる．すなわち，u のグラフは円の一部である．

境界条件 $u(-a) = u(a) = 0$ と長さが指定されている条件より C_1, C_2, λ を求める．円の式で $x = \pm a$ とすれば，$(a-C_1)^2 = \lambda^2 - C_2^2 = (-a-C_1)^2$ が従うので，$C_1 = 0$ を得る．また，λ が円の半径，a/λ がグラフが表す円弧の半角の sin であるから，$2a \le \ell$ であれば（区間の長さが $2a$ だから，ℓ がこれより大きいことを想定している），C_2 と λ も一意に決まる．

2　滑らかでない極小値を考える

この章では，変分問題の解の対象を滑らかでない関数に広げて，物理的な意味での実際の極小値もしくは最小値が存在するか，どのような性質をもつか，という疑問に答えることを目標とする．

2.1　リプシッツ関数における最小化

1.2節の例を見ると，滑らかでない関数を最小化の対象とするのが自然であることがわかる．シャボン玉のクラスターや材料における微細構造など，実際の現象でもそのような関数が現れる．歴史気的には区分的に滑らかな関数における最小化が最初に考えられた．すなわち，関数のグラフに微分が不連続になるような点,「角」を許すことになる．ここでは，少し先回りをして，より広いリプシッツ関数のなかでの最小化問題を考える．

例 2.1　動機として測地線の問題を取り上げる．すなわち，$\mathbb{R}^3$ における曲面上の 2 点を結ぶ曲線のうち，長さが最も短い曲線を見つける問題である．
平面内の 2 点 $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ の場合，曲線を $(u_1(s), u_2(s)), s \in [0,1]$ と表すことができる．このとき，最小化問題は以下の形をとる：

$$\inf_X \int_0^1 \sqrt{(u_1'(s))^2 + (u_2'(s))^2}\, ds, \quad X = \{(u_1, u_2);\ (u_1, u_2)(0) = (a_1, a_2),\ (u_1, u_2)(1) = (b_1, b_2)\}.$$

X を C^1-級関数に限定すれば，オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\left(\frac{u_1'}{\sqrt{(u_1')^2 + (u_2')^2}}\right)' = 0, \qquad \left(\frac{u_2'}{\sqrt{(u_1')^2 + (u_2')^2}}\right)' = 0$$

となる（u_1 と u_2 の変分を別々に計算すれば，上の二つの式が得られる）．これを同時に解くと，u_1' と u_2' がそれぞれ定数であることがわかる．つまり，求める曲線は直線である．
この議論では C^1-級でない関数（角を持つ曲線）のなかで長さがより短くなる場合を排除できていない．しかし，区分的に滑らかな関数など，より広い関数空間へ対象を広げると，オイラー・ラグランジュ方程式が成り立つとは言えないので，測地線が直線であるという最終的な証明にはならない．

曲面が $\psi(x, y, z) = 0$ で陰的に与えられた一般の場合，測地線の問題は汎関数

$$\int_0^1 \sqrt{(u_1'(s))^2 + (u_2'(s))^2 + (u_3'(s))^2}\, ds$$

を最小化する問題になるが，このとき

$$\psi(u_1(s), u_2(s), u_3(s)) = 0 \qquad \forall s \in [0,1]$$

という制約条件を満たす曲線 $(u_1(s), u_2(s), u_3(s))$, $s \in [0,1]$ のなかで最小値を求める．これは無限個（各 $s \in [0,1]$ に対して一つ）の制約条件を意味するので，通常のラグランジュ未定乗数の方法が適用できない．

そこで，問題を簡単にして，半径 1 の円柱上の測地線を解いてみよう．このとき，$\psi(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$ で，円柱上の曲線は

$$(u_1(s), u_2(s), u_3(s)) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s), z(s)), \qquad s \in [0,1]$$

のように表現できる．逆に，このように表されるすべての曲線は円柱上にある．

$$(u_1')^2 + (u_2')^2 + (u_3')^2 = [(-\sin\theta)\theta']^2 + [(\cos\theta)\theta']^2 + [z']^2 = (\theta')^2 + (z')^2$$

より，二つの点を $(\theta, z) = (0,0)$ と (θ_f, z_f) とすれば，次の変分問題を得る：

$$\inf_X \int_0^1 \sqrt{(\theta'(s))^2 + (z'(s))^2}\, ds, \quad X = \{(\theta, z);\ (\theta,z)(0) = (0,0),\ (\theta,z)(1) = (\theta_f + 2\pi k, z_f)\}.$$

これは平面内の測地線と全く同じ形の問題なので，解は C^1-級ならば，

$$\theta(s) = (\theta_f + 2\pi k)s, \qquad z(s) = z_f s$$

となる．これに対応する曲線の長さは $\sqrt{(\theta_f + 2\pi k)^2 + z_f^2}$ だから，$k=0$ とすれば最小となる．よって，解は螺旋 $(\theta_f s, z_f s)$ となる（z-軸のまわり半回転以内）．
しかし，平面の場合と同様，そもそも測地線が存在するのか，滑らかな曲線であるのか，わからないので，上の議論は最終的な答えを出していない．

例 2.2

$$J[u] = \int_0^5 (u'+1)^2 (u')^2\, dx$$

の minimizer を境界条件

$$u(0) = 2, \qquad u(5) = 1$$

のもとで求める．

$f(x,u,\xi) = (\xi+1)^2\xi^2$ が ξ にしか依らないので，オイラー・ラグランジュ方程式は $f_\xi = const$，つまり，

$$4(u')^3 + 6(u')^2 + 2u' = const$$

となり，一般解は

$$\overline{u}(x) = c_1 x + c_2,$$

境界条件を満たす解は

$$\overline{u}(x) = -\frac{1}{5}x + 2.$$

- ルジャンドルの条件：

$$R = f_{\xi\xi} = 2(6(\overline{u}')^2 + 6\overline{u}' + 1) = \frac{2}{25} > 0$$

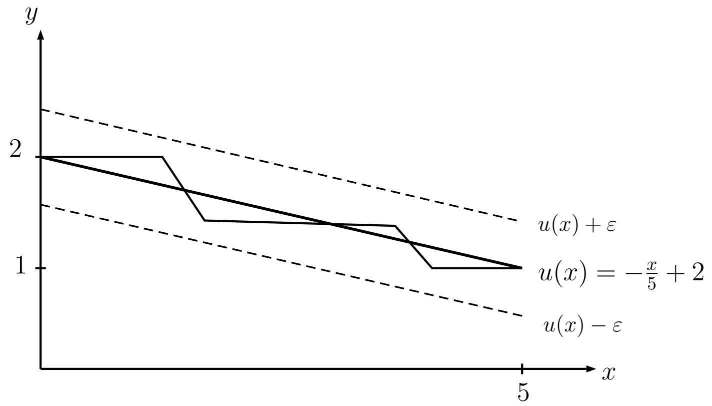
より満たされる．

- ヤコビの条件：

$$\nu_1(x) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial c_1} = x, \qquad \nu_2(x) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial c_2} = 1$$

より $\Delta(x,0) = x$ で，この関数は $x = 0$ 以外の零点をもたないため，ヤコビ条件も満たされる．

十分条件が満たされるにもかかわらず，$\overline{u}(x) = -\frac{1}{5}x + 2$ の任意の近傍に $J[u]$ をより小さくする関数 u が存在する．実際，下図のように，u が傾き 0 と -1 を持つ線分からなる折れ線だと，$J[u] = 0$ となる．傾きが変わる頻度を大きくすれば，この u が上の $\overline{u}$ に限りなく近づくようにできる．このように得た関数 u は滑らかではないが，角を軟化することによって，いくらでも滑らかにすることができ，滑らかな関数で汎関数の値を限りなくゼロに近づけることができる．



この現象はこれまで考えてきたことと矛盾しない理由は，折れ線の関数が弱い極小値に対して要求している「C^1-ノルムで近い」という条件を満たしていないことである．実際，この折れ線の微分は 0 か -1 で $\overline{u}(x) = -\frac{1}{5}x + 2$ の微分 $-\frac{1}{5}$ に近くないから，弱い極小値のみ考える限り，比較の対象外となる．

滑らかでない極小値を許すには，これまでの理論を C^1-級より広い関数空間に拡張する必要がある．まずは，リプシッツ関数とそれに関係する絶対連続関数と有界変動関数の定義を思い出す．

定義（リプシッツ関数・絶対連続関数・有界変動関数）

関数 $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ が**リプシッツ連続**である（$u\in \mathrm{Lip}[a,b]$）とは，定数 $L>0$ が存在して，

$$|u(x)-u(y)|\leq L|x-y| \qquad \forall x,y\in[a,b]$$

が成り立つ，という意味である．
関数 $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ が**絶対連続**である（$u\in \mathrm{AC}[a,b]$）とは，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在して，

$$\sum_i (b_i-a_i)<\delta \quad \Rightarrow \quad \sum_i |u(b_i)-u(a_i)|<\varepsilon$$

が互いに素な有限個の区間 $[a_i,b_i]\subset[a,b]$ の全ての族について成り立つ，という意味である．
関数 $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ が**有界変動**である（$u\in \mathrm{BV}[a,b]$）とは，

$$\sup_{\{x_i\}}\sum_{i=0}^{N-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|<+\infty$$

が成り立つ，という意味である．ただし，sup は区間 $[a,b]$ の有限分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$ についてとっている．

このような関数の基本性質を述べる．

関数空間の関係

定理 2.1

$$C^1([a,b])\ \subset\ \mathit{Lip}[a,b]\ \subset\ \mathit{AC}[a,b]\ \subset\ \mathit{BV}[a,b]\ \subset\ [a,b]\text{ 上 } \textit{a.e.}\text{ 微分可能な関数}$$

有界変動関数の性質（Jordan の定理）

定理 2.2 関数 $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ は有界変動関数であるのは，単調な関数 u_1,u_2 が存在し，$u=u_1-u_2$ と書けるときとそのときのみである．
従って，有界変動関数の微分 $u'(x)$ がほとんどいたる $x\in[a,b]$ で存在する．

絶対連続関数の表現

定理 2.3 次の二つの条件が同値である：

(1) 関数 u は $[a,b]$ で絶対連続である．

(2) 積分可能な関数 $v(x)$ が存在して

$$u(x)=u(a)+\int_a^x v(t)\,dt \qquad \forall x\in[a,b].$$

Proof. （概要）

- (1) ⇒ (2): u が絶対連続ならば有界変動である．よって，$u'(x)$ がほとんどすべての $x \in [a,b]$ において存在し，$[a,b]$ 上で積分可能である．

$$\tilde{u}(x) := u(a) + \int_a^x u'(t)\,dt, \qquad x \in [a,b]$$

とおくと，$\tilde{u}'(x) = u'(x)$ が a.e. $x \in [a,b]$ について成り立つ（微分積分の基本定理）．よって，$\tilde{u} - u$ は定数関数であるが，$\tilde{u}(a) = u(a)$ より $\tilde{u} = u$ in $[a,b]$（それぞれの主張は証明が必要であるが，ここでは省略する）．

- (2) ⇒ (1): v が可積より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在し，

$$\lambda(E) \le \delta \qquad \text{ならば} \qquad \int_E |v(t)|\,dt < \varepsilon$$

が成り立つ．

互いに素な有限個の区間 $[a_i,b_i] \subset [a,b]$ が $\sum_i (b_i - a_i) < \delta$ を満たすとき，

$$\sum_i |u(b_i) - u(a_i)| = \sum_i \left| \int_{a_i}^{b_i} v(t)\,dt \right| \le \sum_i \int_{a_i}^{b_i} |v(t)|\,dt < \varepsilon.$$

よって，u は絶対連続である．

□

リプシッツ関数と絶対連続関数の関係

定理 2.4 次の二つの条件が同値である：

(1) 関数 $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ はリプシッツ連続である（リプシッツ定数 L）．

(2) $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ は絶対連続であり，かつ $|u'(x)| \le L$ *a.e.* $x \in [a,b]$.

この定理の多変数ベクトル値関数への拡張は Rademacher の定理と呼ばれる．

リプシッツ関数の位置付けがわかったので，変分問題を具体的に書く：

変分問題（リプシッツ関数）

$$\inf_{u \in X} J[u] \tag{2.1}$$

ただし，$\quad J[u] = \int_a^b f\big(x, u(x), u'(x)\big)\,dx, \quad X = \{u \in \mathrm{Lip}[a,b];\ u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta\}.$

汎関数 J に対して次の（オイラー・ラグランジュ方程式の導出のときより弱い）仮定を置く：

(A1) $f(x,u,\xi)$ は x,u,ξ の連続関数である

(A2) 微分 f_u, f_ξ は存在し，連続である

このとき，$J[u]$ の定義に出てくる積分が $u \in \mathrm{Lip}[a,b]$ に対してルベーグ積分として well defined であることに注意しよう．実際，

- u は $[a,b]$ で連続より可測，u' は連続関数の極限として可測，$f(x,u,\xi)$ は連続なので，合成関数 $f(x,u(x),u'(x))$ は $[a,b]$ で可測である．
- $x \in [a,b]$ の範囲では $x, u(x), u'(x)$ ともに有界である．$f(x,u,\xi)$ が連続なので，$|f(x,u(x),u'(x))| \le M$ a.e. $x \in [a,b]$ を満たす $M > 0$ が存在する．

あとは次の補題を適用すればよい．

補題． f が $[a,b]$ において可測で，$|f(x)| \le g(x)$ a.e. $x \in [a,b]$ を満たすルベーグ可積関数 g が存在すれば，f は $[a,b]$ でルベーグの意味で可積である．

$\overline{u}$ が J の $C^2([a,b])$ における極小値ならば，$\mathrm{Lip}[a,b]$ における極小値でもある（問題2.2）ので，変分問題 (2.1) の設定は古典的な C^2-級の理論の自然な拡張である．

オイラー・ラグランジュ方程式に代わる必要条件があるかを見ていこう．もともとのオイラー・ラグランジュ方程式の導出を思い出すと，部分積分をして，テスト関数 φ の微分を $f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))$ に押し付けたが，今回は $f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))$ が微分可能とは限らないので，部分積分ができない．

du Bois-Reymond の定理

定理 2.5 仮定 *(A1),(A2)* の下，$\overline{u} \in Lip[a,b]$ が (2.1) の弱い極小値ならば，定数 $c \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)) = c + \int_a^x f_u(t,\overline{u}(t),\overline{u}'(t))\,dt, \qquad a.e.\ x \in [a,b] \tag{2.2}$$

という**積分型オイラー・ラグランジュ方程式**が成り立つ．

Proof. $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ を満たすリプシッツ関数 φ に対して，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b \frac{f(x,\overline{u}(x)+\varepsilon\varphi(x),\overline{u}'(x)+\varepsilon\varphi'(x)) - f(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))}{\varepsilon}\,dx$$

の極限の存在を示す．f_u, f_ξ が連続だと仮定しているから，(u,ξ) の有界集合では f は (u,ξ) についてリプシッツ連続である．$x \in [a,b]$ の範囲では $\overline{u}(x), \varphi(x), \overline{u}'(x), \varphi'(x)$ が有界なので，ε が十分小さければ，定数 L があって，上記の積分の被積分関数は絶対値で $L(|\varphi(x)| + |\varphi'(x)|)$ でおさえられる．よって，ルベーグの優収束定理より上の極限は存在し，その値は

$$\int_a^b \left(f_u(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))\varphi(x) + f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))\varphi'(x) \right)\,dx = 0$$

に等しい．一つ目の項で部分積分を施すと，

$$\int_a^b \left(-\int_a^x f_u(t,\overline{u}(t),\overline{u}'(t))\,dt + f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)) \right) \varphi'(x)\,dx = 0$$

を得るが，積分の中に定数 c を加えても，そのまま成り立つ：

$$\int_a^b \left(c - \int_a^x f_u(t,\overline{u}(t),\overline{u}'(t))\,dt + f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)) \right) \varphi'(x)\,dx = 0. \tag{2.3}$$

関数 φ を

$$\varphi(x) = \int_a^x \left(c - \int_a^s f_u(t,\overline{u}(t),\overline{u}'(t))\,dt + f_\xi(s,\overline{u}(s),\overline{u}'(s)) \right) ds$$

のように選び，c を $\varphi(b) = 0$ となるように選ぶと，(2.3) は

$$\int_a^b \left| c - \int_a^x f_u(t,\overline{u}(t),\overline{u}'(t))\,dt + f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)) \right|^2 dx = 0$$

となるので，定理が示された．□

$\overline{u} \in C^2([a,b])$ ならば，積分型オイラー・ラグランジュ方程式と通常のオイラー・ラグランジュ方程式は同値である．

例 2.3

$$\min \int_0^1 \left(u'(x)\right)^3 dx, \qquad u(0)=0,\;\; u(1)=1$$

を考える．$f(x,u,\xi) = \xi^3$ より，$f_u \equiv 0, f_\xi = 3\xi^2$．よって，積分型オイラー・ラグランジュ方程式は

$$(u'(x))^2 = c^2 \qquad \text{a.e. } x \in [0,1]$$

となる．u を C^2-級関数に限定すれば，境界条件を満たす解はただ一つ，$\overline{u}(x) = x$ である．しかし，$u \in \mathrm{Lip}[0,1]$ を許すなら，解は無限にある．例えば，$c > 1$ に対して傾き $+c$ または $-c$ をもつ区分的線形関数はすべて積分型オイラー・ラグランジュ方程式の解となる．しかし，これらの解がすべて極小値であるとは言えない．極小値を見分けるための追加の判定条件が必要である．

判定条件として次の 3 つは便利である：

- 正則性に基づく条件（解ならばある正則性をもつという情報を基に，解の候補の一部を排除できる）
- Weierstrass の必要条件（強い極小値のための必要条件である）
- $\overline{u}$ の微分が不連続となる「角」で成り立つ条件（例えば，[9] の 10 章を参照）

正則性の定理

定理 2.6 $\overline{u} \in Lip[a,b]$ が積分型オイラー・ラグランジュ方程式の解であるとする．仮定 *(A1),(A2)* に加えて，関数 $\xi \mapsto f(x,\overline{u}(x),\xi)$ が *a.e.* $x \in [a,b]$ に対して狭義凸であるとする．このとき，$\overline{u} \in C^1([a,b])$ である．
さらに，$f \in C^m$ $(m \geq 2)$ ならば，$\overline{u} \in C^m([a,b])$ が成り立つ．

証明は [3], p.312 などを参照されたい．

Weierstrass の必要条件

定理 2.7 $\overline{u} \in Lip[a,b]$ が強い極小値ならば

$$f(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)+q) - f(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)) \geq f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))q \qquad \forall q \in \mathbb{R} \;\; a.e.\; x \in [a,b].$$

f が微分可能で，ξ について凸ならば2.7の条件は自動的に満たされるので，この定理が役に立つのは f が微分可能でないときや ξ について凸でないときである．証明は例えば [3], p.348 で確認できる．

次の定理は，ゆるい正則性の条件の下でグローバルな最小値が言えるので，興味深い．

凸性による十分条件

定理 2.8 変分問題 (2.1) において，$\overline{u} \in X$ が積分型オイラー・ラグランジュ方程式を満たすとする．このとき，$f(x,u,\xi)$ がすべての x に対し (u,ξ) について凸ならば，$\overline{u}$ は変分問題 (2.1) の最小化関数である．

Proof. 念のため，凸関数の定義を述べておく．

凸関数の定義

定義 2.9 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合であるとする．

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \qquad \forall x,y \in \Omega,\ \forall \lambda \in [0,1]$$

を満たす関数 $f:\Omega \to \mathbb{R}$ を凸関数と言う．さらに，

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \qquad \forall x,y \in \Omega,\ x \neq y,\ \forall \lambda \in (0,1)$$

が成り立つならば，狭義凸関数であると言う．

注 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ が凸関数であることと次の条件が同値である：

$$f(x) \geq f(y) + \nabla f(y)\cdot(x-y) \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^n.$$

$u \in X$ を任意にとり，$p(x) = c + \displaystyle\int_a^x f_u(t, \overline{u}(t), \overline{u}'(t))\,dt$ と定義する．このとき，積分型オイラー・ラグランジュ方程式は

$$(p'(x), p(x)) = \nabla_{u,\xi} f(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)) \qquad \text{a.e. } x \in [a, b] \tag{2.4}$$

と書けて，次のことがわかる：

$$\begin{aligned} J[u] - J[\overline{u}] &= \int_a^b \big(f(x, u(x), u'(x)) - f(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x))\big)\,dx \\ &\geq \int_a^b (p'(x), p(x)) \cdot (u(x) - \overline{u}(x), u'(x) - \overline{u}'(x))\,dx \qquad (2.5) \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx}\left(p(x) \cdot (u(x) - \overline{u}(x))\right)\,dx \\ &= 0. \qquad (2.6) \end{aligned}$$

(2.5) は (2.4) と f の凸性より従う．一方，(2.6) は u と $\overline{u}$ が同じ境界条件を満たすことより従う． □

注 上の定理で $\overline{u} \in C^2([a, b])$ ならば，C^2-級関数における最小値のための十分条件が与えられている．しかし，以前に扱った古典的なルジャンドルとヤコビによる十分条件と以下の点で異なる：

- 正則性の仮定がゆるくなっている
- 強いルジャンドル条件（$f_{\xi\xi} > 0$）が要求されない
- 弱い極小値だけではなくグローバルな最小値であることを言っている
- 制約条件がある問題に拡張しやすい（問題2.5）

例 2.4 測地線の例2.1に戻る．ここでは，汎関数の関数 f は

$$f(x, u_1, u_2, \xi_1, \xi_2) = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$$

となり，(u_1, u_2, ξ_1, ξ_2) について凸である．定理2.8より，この例の前半で見つけた線型な停留曲線が最小値を与えることがわかる．

演習問題

問題 2.1 定理2.4を示せ．

問題 2.2 変分問題 (2.1) の設定で，$\overline{u}$ が J の $C^2([a, b])$ における極小値ならば，Lip$[a, b]$ における極小値でもあることを示せ．

詳細： 次のステップを踏んで示すことができる．

1. まず，(a)-(d) を実行して，次の補題を示す：リプシッツ関数 $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ と $\varepsilon > 0$ に対し

て多項式 $p(x)$ が存在し，

$$p(a)=u(a),\quad p(b)=u(b),\quad \|p'\|_{L^\infty}\le\|u'\|_{L^\infty}+\varepsilon,\quad \|p-u\|_{L^\infty}+\|p'-u'\|_{L^1}\le\varepsilon.$$

(a) Lusin の定理を用いて，次を満たす連続関数 $v:[a,b]\to\mathbb{R}$ を見つける：

$$\|v\|_{L^\infty}\le\|u'\|_{L^\infty},\qquad v=u'\ \text{測度}\ \varepsilon\ \text{以下の集合を除いて}.$$

(b) Weierstrass の定理を用いて，$\|v-r\|_{L^\infty}<\varepsilon$ を満たす多項式 r を見つける．

(c) 条件

$$|c|\le\varepsilon\frac{b-a+2\|u'\|_{L^\infty}}{b-a}$$

を満たす定数 $c\in\mathbb{R}$ をうまくとれば，

$$p(x)=u(a)+\int_a^x r(t)\,dt+c(x-a)$$

で定義した関数が $p(a)=u(a), p(b)=u(b)$ を満足し，次の評価が得られることを示す：

$$\|p'\|_{L^\infty}\le\|u'\|_{L^\infty}+\varepsilon+|c|,\quad \max\left\{\|p-u\|_{L^\infty},\|p'-u'\|_{L^1}\right\}\le\varepsilon\{b-a+2\|u'\|_{L^\infty}\}+(b-a)|c|.$$

(d) 以上の事実から定理の証明を完成させる．

2. f が局所的にリプシッツ関数ならば，$u\in\mathrm{Lip}[a,b]$ と $\varepsilon>0$ に対して多項式 w が存在し，次が成り立つことを示す：

$$w(a)=u(a),\quad w(b)=u(b),\quad \|u-w\|_{L^\infty}<\varepsilon,\quad |J(u)-J(w)|<\varepsilon.$$

3. $r,R>0$ に対して，変分問題 (2.1) を集合

$$X=\left\{u\in\mathrm{Lip}[a,b];\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta,\ \|u\|_{L^\infty}<r,\ \|u'\|_{L^\infty}<R\right\}$$

に限定したとき，J の X における下限と，X の定義で $\mathrm{Lip}[a,b]$ を「すべての多項式を含む関数集合」に変えた任意の集合 X' における下限が等しいことを示す．

4. 題意を弱い極小値と強い極小値について示す．

問題 2.3 定理2.6を用いて，ヤコビの条件 $\Delta(x,a)\neq 0\,\forall x\in(a,b)$ が弱い極小値のための必要条件であることを示せ．

詳細：　弱い極小値 $\overline{u}$ の共役点 $\overline{a}\in(a,b)$ が存在すると仮定して，次のステップを踏んで背理法で示す．

1. $h_1(x):=f_{\xi\xi}(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))$, $h_2(x):=f_{uu}(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))-\frac{d}{dx}f_{u\xi}(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))$ とおくと，

$\varphi(a)=\varphi(b)$ を満たす $\varphi\in\mathrm{Lip}[a,b]$ に対して

$$I[\varphi]:=\int_a^b\left(h_1(x)(\varphi'(x))^2+h_2(x)\varphi^2(x)\right)\,dx\geq 0$$

が成り立つことを第 2 変分を計算して示す．

2. 仮定より，$v(a)=v(\overline{a})=0$ なるヤコビ方程式の非自明な解 v が存在する．この解に対して $v'(\overline{a})\neq 0$，そして
$$\int_a^b\left(h_1(x)(v'(x))^2+h_2(x)v^2(x)\right)\,dx=0$$
が成立することを示す．

3. $v(x):=0, x\in[\overline{a},b]$ として，v の定義域を $[a,b]$ に拡張する．よって，v は汎関数 I の $X=\{\varphi\in\mathrm{Lip}[a,b];\,\varphi(a)=\varphi(b)=0\}$ における最小値を与える．定理2.6を適用して矛盾を得る．

問題 2.4 変分問題 (2.1) において

$$f(x,u,\xi)=g(u)\sqrt{1+\xi^2}$$

とする．ただし，$g\in C^m(m\geq 2)$．$\overline{u}\in\mathrm{Lip}[a,b]$ が弱い極小値で，$g(\overline{u}(x))>0\ \forall x\in[a,b]$ が成り立つとき，$\overline{u}\in C^m([a,b])$ であることを示せ．

問題 2.5 （創造的な問題）変分問題 (2.1) に

$$u\in V_1,\qquad u'\in V_2,\qquad\quad V_1,V_2\text{ は凸集合}$$

のような制約条件をつけた問題に対して，定理2.8の主張を修正し，その証明を与えよ．

問題 2.6 定理2.8で f が (u,ξ) について狭義凸ならば，$\overline{u}$ が問題 (2.1) のただ一つの解であることを示せ．証明を見て，u と ξ の両方の変数についての狭義凸性が必要になるか答えよ．
さらに，具体的な例として，最小化問題

$$\min\quad\int_0^1\left((u(x))^2+(u'(x))^2\right)\,dx\qquad\text{in}\quad X=\left\{u\in C^2([0,1]);\ u(0)=0,\ u(1)=1\right\}$$

の停留値が唯一の最小値であることを示せ．

問題 2.7 定理2.1において，真の包含関係であること，すなわちそれぞれの集合が異なることを示せ．

問題 2.8 例2.3の問題

$$\min\int_0^1\left(u'(x)\right)^3\,dx,\qquad u(0)=0,\ \ u(1)=1$$

において，$u(x)=x$ が弱い極小値を与えることを示した．Weierstrass の条件を用いて，強い極小値ではないことを示せ．

2.2　絶対連続関数における最小化

リプシッツ関数の設定では存在定理が得られないため，許容関数空間を絶対連続な関数 AC($[a,b]$) に広げることを考える．実際，絶対連続な関数では（汎関数がある条件を満たせば）最小値の存在が証明できるようになる．古典理論では，ヤコビの定理などの十分条件もあるが，最小値ではなく，極小値しか保証されない．

例 2.5

$$\min \int_0^1 (1+u(x))\left(u'(x)\right)^2\,dx, \qquad u \in C^2([0,1]),\ \ u(0)=0,\ \ u(1)=3$$

という最小化問題を解く．
オイラー・ラグランジュ方程式は

$$(1+u(x))\left(u'(x)\right)^2 = c, \qquad x \in [0,1]$$

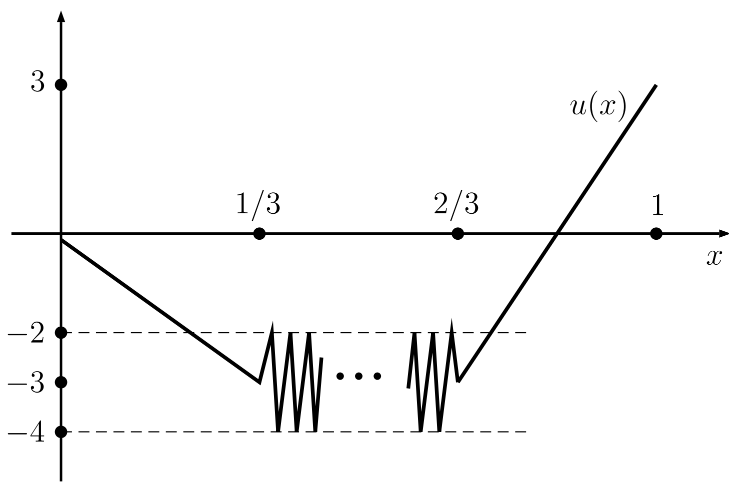
となる．c は定数で，$(1+u(0))(u'(0))^2 = (u'(0))^2$ より 0 以上でなければならない．$c=0$ ならば $u \equiv 0$ でなければならないので，$u(1)=3$ と矛盾する．よって，$c>0$ で，$[0,1]$ において $u'(x)>0$ である．従って，微分方程式は

$$\sqrt{1+u(x)}\,u'(x) = \sqrt{c}, \qquad x \in [0,1]$$

の形になり，これを境界条件の下で解くと，

$$\overline{u}(x) = (7x+1)^{2/3} - 1$$

を得る．対応する汎関数の値は $J[\overline{u}] = \sqrt{14/3}$ である．ヤコビの十分条件を適用すれば極小値であることが示せるが，実は，次のような関数をとれば問題の解ではないことがわかる．ここで，ほとんどすべての $x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ で $|u'(x)| = M$ となるように関数を定義して，$M \to \infty$ とすると，$J[u] \to -\infty$ となる．



上記の議論の間違っているところは，最小値の存在を仮定していることにある．すなわち，最小値の存在がわからなければ，上のような推論が成り立たない．

最小値の存在を示すため，対象の関数空間を広げて，絶対連続関数のなかでの変分問題を見る．

変分問題（絶対連続関数）

$$\inf_{u\in X} J[u] \tag{2.7}$$

ただし，　$J[u] = \int_a^b f\big(x, u(x), u'(x)\big)\, dx, \quad X = \{u \in \mathrm{AC}[a,b];\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta\}.$

リプシッツ関数の場合，微分が有界だったが，$u \in \mathrm{AC}$ の微分が有界とは限らないので，$J[u]$ が定義されるよう f に対して適切な条件を課す必要がある．例えば，以下の Tonelli の定理では，f を下から有界な連続関数としている．このとき，$x \mapsto f(x,u(x),u'(x))$ という写像が下から有界な可測関数だから，$J[u]$ の積分はルベーグ積分の意味で意味をもつ（当然，$+\infty$ になる可能性がある）．

以下の Leonida Tonelli による定理（1915 年）は変分問題の存在理論で画期的な結果である．

Tonelli の定理

定理 2.10 f が連続で，ξ について凸な関数で，

$$\exists r>1, C_1>0, C_2\in\mathbb{R} \quad \textit{such that} \quad f(x,u,\xi) \ge C_1|\xi|^r + C_2 \quad \forall (x,u,\xi)\in[a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

という強圧性条件を満たすならば，変分問題 *(2.7)* の最小値が存在する．

Proof. 汎関数の値 $J[u]$ が有界であるような $u \in X$ が存在する（例えば，境界条件を満たす線形関数）ので，最小化列 $\{u_n\} \subset X$ がとれる：

$$\lim_{n\to\infty} J[u_n] = \inf_{u\in X} J[u].$$

十分大きな n に対して，

$$\int_a^b \big(C_1|u_n'|^r + C_2\big)\, dx \le J[u_n] \le \inf_{u\in X} J[u] + 1$$

が成り立つから，列 $\{u_n'\}$ は $L^r(a,b)$ で一様有界である，すなわち，n に依存しない定数 C があって，$\|u_n'\|_{L^r(a,b)} \le C\ \forall n$ が成り立つ．
有界列となると，実数の場合に成立する Weierstrass の定理と同様に，収束する部分列が取り出せるというふうに考えたくなる．無限次元空間でもこのような部分列がとれることは全く明らかではないが，収束の意味をうまく定義すれば，可能である．この証明の紹介は以下ですることにして，

そのまとめとして，L^r が回帰的空間だから，単位球が weakly compact のため，ある $w \in L^r(a,b)$ に弱収束する部分列がとれると述べておく．簡単のため，この部分列に対して同じ記号 $\{u_n'\}$ を用いる．

AC$([a,b])$ の元 $\overline{u}$ を

$$\overline{u}(x) = \alpha + \int_a^x w(y)\,dy, \qquad x \in [a,b]$$

で定義する．弱収束より任意の $x \in [a,b]$ について

$$\int_a^x u_n'(y)\,dy = \int_a^b u_n'(y)\chi_{(a,x)}(y)\,dy \to \int_a^b w(y)\chi_{(a,x)}(y)\,dy = \int_a^x w(y)\,dy.$$

ただし，$\chi_{(a,x)}$ は区間 (a,x) の特性関数である．ここで，特性関数が有界で，すべての L^p-空間，とくに $L^{r'}(a,b)$（$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$）に入るから，弱収束の試験関数として使えることを用いた．

上の式のすべての部分に α を足すと，左辺は $u_n(x)$，右辺は $\overline{u}(x)$ に等しい．したがって，u_n は $\overline{u}$ に各点収束する．さらに，$\overline{u}(b)=\beta$ がわかる．

f の連続性と ξ についての凸性を利用すると，

$$J[\overline{u}] \le \lim_{n\to\infty} J[u_n] = \inf_{u\in X} J[u] \tag{2.8}$$

が証明できる（この重要なステップの詳細を以下で示す）．よって，$\overline{u}$ は最小値を与える．　□

この定理が切り開いたいわゆる直接法は次の構成要素を含む：

- 最小化列の存在とその部分列の適切な収束（通常は u_n' は弱収束，u_n は各点または一様収束）
- 汎関数の下半連続性（$J[\overline{u}] \le \liminf_{n\to\infty} J[u_n]$）
- 境界条件や（あれば）制約条件が極限で保存される性質（一様収束で保存される条件，微分の弱収束で保存される条件：弱収束の場合は凸性が必要となる場合が多い）

L^p-空間の弱位相について

L^p 空間

定義 2.11 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．$p \in [1,\infty)$ に対して，関数 u が $L^p(\Omega)$ に属するとは，u が可測で，$|u|^p$ が Ω 上で可積である，という意味である．
関数 u が $L^\infty(\Omega)$ に属するとは，u が *essentially bounded* である，すなわち，$M \in \mathbb{R}$ が存在して，$|u(x)| \leq M$ *a.e.* $x \in \Omega$ が成り立つ，という意味である．
ノルムを次のように定義するとノルム空間となる：

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} &= \inf\{M : \ |u(x)| \leq M \ a.e. \ x \in \Omega\} \end{aligned}$$

従って，$u \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty, p \in [1,\infty]$.
また，このノルムで L^p は完備である，つまり，バナッハ空間である．

双対空間

定義 2.12 ノルム空間 X の双対空間 X^* は X 上の連続な線型汎関数の空間で，そのノルムは

$$\|F\|_{X^*} = \sup\{F(u) : \ u \in X, \ \|u\|_X \leq 1\}$$

と定義される．ただし，$F(u)$ を $\langle F, u\rangle$ と書くことが多い．

L^p 空間の双対空間（Riesz の定理）

定理 2.13 $p \in [1,\infty)$ に対して，$(L^p)^*$ は $L^{p'}$ と同一視できる．ただし，p' は $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ を満たす（$p = 1$ のとき，$p' = \infty$）．すなわち，この二つの空間は *isometric* である：全単射 $T : L^{p'} \to (L^p)^*$ が存在して，

$$\|Tu\|_{(L^p)^*} = \|u\|_{L^{p'}} \qquad \forall u \in L^{p'}. \tag{2.9}$$

このとき，T は具体的に次のように表される：

$$\langle Tu, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x) \, dx \qquad v \in L^p(\Omega). \tag{2.10}$$

一方で，L^∞ の双対空間は L^1 より広い空間である．

Proof. Hölder 不等式

$$\left| \int_\Omega u(x)v(x) \, dx \right| \leq \|u\|_{L^{p'}(\Omega)} \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

を用いて，(2.10) で定義される写像 T が (2.9) を満たすことを示す．あとは，T が全射であることを示せばよい． □

最小化問題の解の存在を言うには，対象の集合のコンパクト性が重要になる．無限次元空間では単位球がコンパクトでないことから窺えるように，コンパクト性を得るのが難しい．そこで，コンパクト集合を増やすため，開集合を減らして位相を弱くすることを考える．そうすると，逆に汎関数の連続性が示しにくくなる．解が見つかるようなバランスのよい位相を決めるのがこのような問題のポイントとなるが，ここではまず最も弱い位相について紹介する．

ノルム空間 X とその双対空間 X^* に対して，位相 $\sigma(X, X^*)$ を以下の集合

$$V(u, F, r) = \{v \in X : \ |F(v-u)| < r\}, \qquad u \in X,\ F \in X^*,\ r > 0$$

をすべて含む最小の位相として定義する．
この位相は X^* のすべての汎関数を連続にする最も弱い（開集合が少ない）位相である．実際，F が連続であるのと，$V(x, F, r)$ が全ての $x \in X$ とすべての $r > 0$ について開集合であるのと，同値である．
X が有限次元空間ならば，弱い位相 $\sigma(X, X^*)$ ともともとのノルムによる強い位相 $\sigma(X, \|\cdot\|_X)$ は一致する．しかし，無限次元なら，弱い位相は強い位相より真に小さくなる．
二つの重要な定理を述べる．

弱位相

定理 2.14 列 $\{u_n\} \subset X$ が弱位相 $\sigma(X, X^*)$ で $u \in X$ に収束するのは，すべての $F \in X^*$ に対して $F(u_n)$ が $F(u)$ に（実数列として）収束するときとそのときのみである．

Proof. すべての $F \in X^*$ が連続だから，$u_n \to u$（弱位相で）より $F(u_n) \to F(u)$（数列として）が従うのは明らかである．次に，すべての $F \in X^*$ に対して $F(u_n) \to F(u)$ を満たす列 $\{u_n\} \subset X$ をとる．u の任意の近傍 W は $V = \bigcap_{j=1,\dots,J} V(u, F_j, r)$ の形をもつ集合を含む．各 j に対して，N_j が存在し，

$$n \geq N_j \qquad \Rightarrow \qquad |F_j(u_n - u)| < r$$

が成り立つ．$N := \max_{j=1,\dots,J} N_j$ とおけば，

$$n \geq N \qquad \Rightarrow \qquad u_n \in \bigcap_{j=1,\dots,J} V(u, F_j, r) \subset W$$

を得る．よって，$\sigma(X, X^*)$ の位相で $u_n \to u$． □

凸集合の閉包

定理 2.15 C が X の凸な部分集合ならば，C の弱い位相での閉包と強い位相での閉包は一致する．言い換えると，X の凸な部分集合が強い位相で閉であることと弱い位相で閉であることは同値である．

Proof. 強い位相での C の閉包 $\mathrm{cl}_s C$ は，C を含むすべての強閉集合の共通部分である．同様に，弱い位相での C の閉包 $\mathrm{cl}_w C$ は，C を含むすべての弱閉集合の共通部分である．弱閉集合が必ず強閉集合であるので，$\mathrm{cl}_s C \subset \mathrm{cl}_w C$ が従う．

逆の包含関係は背理法で示す．$u \in \mathrm{cl}_w C \setminus \mathrm{cl}_s C$ が存在したとすると，Hahn-Banach 定理より $F \in X^*$ と $r \in \mathbb{R}$ があって，

$$\langle F, u\rangle < r < \langle F, v\rangle \qquad \forall v \in \mathrm{cl}_s C.$$

よって，u は $S = F^{-1}[r, \infty)$ という集合の元ではない．しかし，F が弱い位相で連続だから，この集合 S は弱閉集合で，$C \subset S$ を満たす．結果として，$u \notin \mathrm{cl}_w C$ という矛盾にたどり着く．□

回帰的空間

定義 2.16 まず，包含写像 $J : X \to X^{**}$ を定義する．Ju は次の条件で定義される X^{**} の元である：

$$\langle Ju, F\rangle = \langle F, u\rangle \qquad \forall F \in X^*.$$

ノルムを保存する

$$\|Ju\|_{X^{**}} = \sup_{F:\|F\|_{X^*}\le 1} \langle Ju, F\rangle = \sup_{F:\|F\|_{X^*}\le 1} \langle F, u\rangle = \|u\|_X$$

写像であるから，X と $J(X) \subset X^{**}$ の *isometry* である．
$J(X) = X^{**}$ が成り立つとき，J が回帰的（*reflexive*）であるという．

L^p の reflexivity

定理 2.17 $1 < p < \infty$ ならば，$L^p(\Omega)$ は回帰的空間である．
$L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ は回帰的ではない．

証明は例えば [3], p.106 を参照．
次に，回帰的空間がコンパクト性の性質を備えていることを見る．

単位球の弱コンパクト性

定理 2.18 バナッハ空間 X が回帰的であるのは，その単位閉球が弱コンパクトであるときとそのときのみである．

証明は例えば [3], p.99 を参照.

凸集合の弱コンパクト性

定理 2.19 回帰的バナッハ空間 X の凸な有界閉集合は弱点列コンパクトである．

Proof. （概要）雰囲気を感じるために，証明の概要だけ述べる．$\{u_n\}$ を凸な有界閉集合 A に含まれる列としたとき，ある $u \in A$ に弱収束する部分列 $\{u_{n_i}\}$ の存在を示したい．

- $r > 0$ があって，$\{u_n\} \subset rB$ が成り立つ（B は X の単位球）．
- $\{u_n\}$ で生成される X の閉部分空間を L とする．L が可分で回帰的であることが示せる．
- 定理2.18により，B_L と rB_L は L で弱コンパクトである（B_L は L の単位球）．
- L^* が可分より，rB_L に制限された L の弱位相を生成する距離が存在する．
- したがって，rB_L が L において弱位相で点列コンパクトであり，ある $u \in L$ に弱収束する部分列 $\{u_{n_i}\}$ がとれる：
$$\langle F, u_{n_i} \rangle \to \langle F, u \rangle \qquad \forall F \in L^*.$$
- しかし，$L^* = \{F|_L : \ F \in X^*\}$ であるから，$\{u_{n_i}\}$ が X において u に弱収束すると言える．
- A は凸な閉集合だから，定理2.15より弱位相で閉である．よって，$u \in A$.

□

汎関数の下半連続性について

次に (2.8) が成り立つことを示そう．
以下ではより一般的な設定を考える．有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ で定義される汎関数

$$J[u, z] = \int_\Omega f(x, u(x), z(x))\, dx$$

において，$f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ であるとする（u, z をベクトル値関数にもできるが，ここではスカラー値のみ扱う）．また，最小化問題での制約条件を見込んで，集合 $Q \subset \Omega \times \mathbb{R}$ が与えられ，

$$(x, u(x)) \in Q, \qquad \text{a.e. } x \in \Omega$$

でなかればならないとする．

f に対して以下の仮定をおく：

(A1) f は (x,u,z) について連続で，z について凸である

(A2) $\alpha \in L^1(\Omega), \beta \in L^\infty(\Omega)$ が存在し，

$$f(x,u,z) \geq \alpha(x) + \beta(x)z \qquad \forall (x,u) \in Q,\ z \in \mathbb{R}$$

(A3) Q は $\Omega \times \mathbb{R}$ の閉集合である

仮定 (A1) を (u,z) についての半連続性などに弱くできるが，ここでは Tonelli の定理の仮定に合わせている．

汎関数の下半連続性

定理 2.20 *f が (A1), (A2), (A3) を満たすとする．$(x,u_n(x)) \in Q$ a.e. を満たす可測な関数の列 $\{u_n\}$ が u_* に a.e. 収束し，関数列 $\{z_n\}$ が $L^r(\Omega)$ で z_* に弱収束するとする．ただし，$r>1$ である．このとき，*

$$J[u_*,z_*] \leq \liminf_{n\to\infty} J[u_n,z_n].$$

Proof. 証明のポイントは，どのように z_n について線型な項にのみ現れるようにして，$\{z_n\}$ の弱収束が利用できる状況に持ち込めるか，ということころにある．これを実現するために，共役関数の概念を用いて，固定した $\delta>0$ に対して次の関数を定義する：

$$H(x,u,p) = \sup_{w\in\mathbb{R}} \left(pw - f(x,u,w) - \frac{\delta}{r}|w|^r \right).$$

まず，H の性質を調べておく．

(H1) r' を $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$ となるようにとると，定数 $c>0$ が存在して

$$H(x,u,p) \leq c|p-\beta(x)|^{r'} - \alpha(x) \qquad \forall (x,u) \in Q,\ p \in \mathbb{R}$$

証明：仮定 (A2) を用いると，

$$\begin{aligned} H(x,u,p) &= \sup_{w\in\mathbb{R}} \left(pw - f(x,u,w) - \frac{\delta}{r}|w|^r \right) \\ &\leq \sup_{w\in\mathbb{R}} \left(pw - \alpha(x) - \beta(x)w - \frac{\delta}{r}|w|^r \right) \\ &= \frac{1}{r'\delta^{r'-1}}|p-\beta(x)|^{r'} - \alpha(x) \end{aligned}$$

最後の等式は w についての最大値を具体的に計算しただけである．よって，$c=\frac{1}{r'\delta^{r'-1}}$ と

おけばよい．

(H2) 固定した $(x,u)\in Q$ に対して，$p\mapsto H(x,u,p)$ は連続である．
証明：$p\mapsto H(x,u,p)$ は (A1) より p について凸，(H1) より有界だから，連続である．

(H3) $v\mapsto H(x,v,p)$ は次の意味で上半連続である：

$$(x,v_n)\in Q,\quad v_n\to u \qquad\Rightarrow\qquad H(x,u,p)\geq \limsup_{n\to\infty} H(x,v_n,p)$$

証明：$\lim_{n\to\infty} H(x,v_n,p)\geq L\in\mathbb{R}$ のとき，$H(x,u,p)\geq L$ を示せばよい．

$$A_n=\left\{w\in\mathbb{R}:\ pw-\alpha(x)-\beta(x)w-\frac{\delta}{r}|w|^r\geq H(x,v_n,p)-1\right\}$$

とおくと，A_n はコンパクト集合であり，$H(x,v_n,p)$ の定義における $\sup_{w\in\mathbb{R}}$ を $\sup_{w\in A_n}$ に制限できるから，この sup はある w_n で達成される．
列 $\{w_n\}$ が有界である．これは，n が十分大きければ $H(x,v_n,p)\geq L-1$ とできるので，このような n に対して，集合 A_n は $\left\{w\in\mathbb{R}:\ pw-\alpha(x)-\beta(x)w-\frac{\delta}{r}|w|^r\geq L-2\right\}$ というコンパクト集合に含まれるからである．
よって，必要に応じて部分列をとれば，$w_n\to w$ とできる．(A1) を適用して，

$$\begin{aligned}
H(x,u,p) &\geq pw-f(x,u,w)-\frac{\delta}{r}|w|^r\\
&= pw-\lim_{n\to\infty} f(x,v_n,w_n)-\frac{\delta}{r}|w|^r\\
&= \limsup_{n\to\infty}\left(pw_n-f(x,v_n,w_n)-\frac{\delta}{r}|w_n|^r\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} H(x,v_n,p)\geq L
\end{aligned}$$

(H4) 任意の $w\in\mathbb{R}$ に対して

$$f(x,u,w)+\frac{\delta}{r}|w|^r=\sup_{p\in\mathbb{R}}\left(pw-H(x,u,p)\right).$$

証明：$g\not\equiv\infty$ なる関数 $g(p):\mathbb{R}\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ の共役関数 $g^*:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ は

$$g^*(p)=\sup_{w\in\mathbb{R}}\left(pw-g(w)\right)$$

と定義される．よって，$H(x,u,p)$ は $g(p)=f(x,u,p)+\frac{\delta}{r}|p|^r$ という関数の共役関数である．「$g\not\equiv\infty$ が凸で下半連続ならば $g=g^{**}$ が成り立つ」という Moreau の定理を適用すれば，(H4) の主張が従う．

(H5) $u:\Omega\to\mathbb{R}$ が $(x,u(x))\in Q$ a.e. を満たす可測関数で，$p:\Omega\to\mathbb{R}$ が可測ならば，$x\mapsto H(x,u(x),p(x))$ は可測である．

証明：$\{w_i\}$ が $\mathbb{R}$ のなかの稠密な可算集合ならば，

$$H(x,u(x),p(x)) = \sup_i \left(p(x)w_i - f(x,u(x),w_i) - \frac{\delta}{r}|w_i|^r \right) \qquad \text{a.e.}$$

よって，左辺は可算個の可測関数の sup として可測である．

これらの性質を用いて，定理の主張を示す．(A3) より $(x,u_*(x)) \in Q$ a.e. であることに注意して，次の評価を行う．

$$\begin{aligned}
J[u_*,z_*] &= \int_\Omega f(x,u_*(x),z_*(x))\,dx \\
&\le \int_\Omega \Big(f(x,u_*(x),z_*(x)) + \tfrac{\delta}{r}|z_*(x)|^r \Big)\,dx \\
&= \int_\Omega \sup_{p\in\mathbb{R}} \Big(z_*(x)p - H(x,u_*(x),p) \Big)\,dx && (2.11) \\
&= \sup_{p\in L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \Big(z_*(x)p(x) - H(x,u_*(x),p(x)) \Big)\,dx && (2.12) \\
&\le \sup_{p\in L^\infty(\Omega)} \left[\lim_{n\to\infty} \int_\Omega z_n(x)p(x)\,dx - \int_\Omega \limsup_{n\to\infty} H(x,u_n(x),p(x))\,dx \right] && (2.13) \\
&\le \sup_{p\in L^\infty(\Omega)} \left[\lim_{n\to\infty} \int_\Omega z_n(x)p(x)\,dx - \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega H(x,u_n(x),p(x))\,dx \right] && (2.14) \\
&= \sup_{p\in L^\infty(\Omega)} \left[\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \Big(z_n(x)p(x) - H(x,u_n(x),p(x)) \Big)\,dx \right] \\
&\le \liminf_{n\to\infty} \sup_{p\in L^\infty(\Omega)} \left[\int_\Omega \Big(z_n(x)p(x) - H(x,u_n(x),p(x)) \Big)\,dx \right] \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left[\int_\Omega \sup_{p\in\mathbb{R}} \Big(z_n(x)p - H(x,u_n(x),p) \Big)\,dx \right] && (2.15) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \Big(f(x,u_n(x),z_n(x)) + \tfrac{\delta}{r}|z_n(x)|^r \Big)\,dx && (2.16) \\
&\le \liminf_{n\to\infty} J[u_n,z_n] + \delta \limsup_{n\to\infty} \|z_n(x)\|^r_{L^r(\Omega)}
\end{aligned}$$

z_n が L^r で弱収束し，弱収束列がノルム有界である（問題2.16）から，$\limsup_{n\to\infty} \|z_n(x)\|^r_{L^r(\Omega)}$ は有界である．δ が任意だったので，定理の主張が従う．

ただし，(2.11) と (2.16) は (H4) を用いた．
(2.12) と (2.15) では積分と sup の順番を交換しているが，この交換は明らかではない（[3], p.119 を参照）．
(2.13) の第 1 項では z_n の弱収束を用い，第 2 項では (H3) を用いた．
(2.14) では Fatou の補題を用いた．

Fatou の補題

定理 2.21 $\{g_n\}$ を測度空間 (S, Σ, μ) 上の非負可測関数の列とする．関数 $g : S \to [0, \infty]$ を各点毎に　$g(x) = \liminf_{n\to\infty} g_n(x), \quad x \in S$　と定義する．このとき g は可測であり，

$$\int_S g\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_S g_n\, d\mu$$

が成立する．

非負性を得るには，

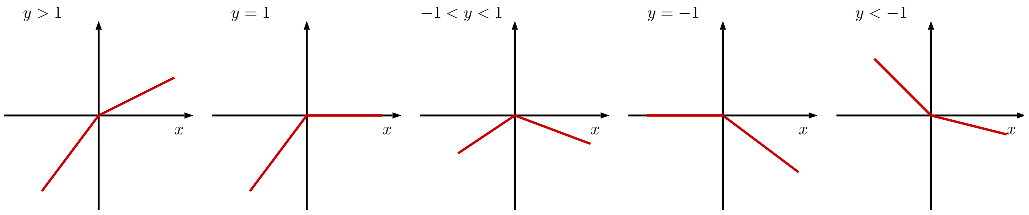
$$g_n(x) = c|p(x) - \beta(x)|^{r'} + |\alpha(x)| - H(x, u_n(x), p(x))$$

とおく．実際，(H1) を思い出すと，$g_n(x) \geq 0$ となる．さらに，$p \in L^\infty(\Omega)$ より $c|p(x) - \beta(x)|^{r'} + |\alpha(x)|$ は可積であるから，Fatou の補題を g_n に適用できる． □

例 2.6 共役関数の具体例として，$\varphi(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ の共役 $\varphi^*(y)$ を求める．

$$\varphi^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \{xy - \varphi(x)\} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \{xy - |x|\} = \begin{cases} 0 & (y \in [-1, 1]) \\ +\infty & (|y| > 1) \end{cases}$$

最後の上限の値は $\{\cdot\}$ のなかの関数のグラフからすぐにわかる：



許容関数を絶対連続な関数に広げたことで，必要条件であるオイラー・ラグランジュ方程式が満たされるということが証明できなくなる．実際，リプシッツ関数における証明では，優収束定理を用いて $j'(0)$ の存在を示したが，AC では微分が発散する可能性があるため，この議論が適用できない．しかも，技術的な問題ではなく，Tonelli の定理の仮定を満たす滑らかな汎関数でもオイラー・ラグランジュ方程式が成り立たない反例が作れる．

また，Tonelli の定理の仮定を満たす滑らかな汎関数でも，AC における inf が Lip における inf より真に小さいという Lavrentiev phenomenon が起こり得る．これは数値計算の観点から絶望的な状況である．「C^2 における最小値が Lip における最小値である」というリプシッツ関数への拡張の際に言えたことに対応する主張「Lip における最小値が AC における最小値である」が成り立たず，忠実な拡張にはなっていないわけである．

例 2.7 B. Manià（1934）による Lavrentiev 現象の例を挙げる．

$$J[u]=\int_0^1\left(u^3(x)-x\right)^2(u'(x))^6\,dx,\qquad u(0)=0,\ \ u(1)=1$$

とすると，

$$\inf_{u\in \mathrm{AC}[0,1]} J[u] < \inf_{u\in \mathrm{Lip}[0,1]} J[u]$$

が成り立つ．

実際，任意の u に対して $J[u]\geq 0$ が成立し，$\overline{u}(x)=\sqrt[3]{x}$ に対して $J[\overline{u}]=0$ であるので，$\overline{u}$ は AC$[0,1]$ における最小化関数である．

一方，u を境界条件を満たす任意のリプシッツ関数とすれば，$h(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{2}$ に対して $x_0\in(0,1)$ が存在し，

$$u(x)\leq h(x)\quad x\in[0,x_0],\qquad u(x_0)=h(x_0).$$

よって，$u^3(x)-x\leq h^3(x)-x=-\frac{7}{8}x\leq 0$ に注意すれば，$(u^3(x)-x)^2\geq(h^3(x)-x)^2$ なので，

$$\left(u^3(x)-x\right)^2\xi^6\geq\left(h^3(x)-x\right)^2\xi^6=\left(\frac{7x}{8}\right)^2\xi^6,\qquad x\in[0,x_0],\ \xi\in\mathbb{R}.$$

Hölder 不等式を用いると，

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{x_0}}{2}=\int_0^{x_0}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}u'(x)\,dx\ &\leq\ \left(\int_0^{x_0}x^{-2/5}\,dx\right)^{5/6}\left(\int_0^{x_0}x^2(u'(x))^6\,dx\right)^{1/6}\\ &=\ \left(\frac{5}{3}\right)^{5/6}\sqrt{x_0}\left(\int_0^{x_0}x^2(u'(x))^6\,dx\right)^{1/6}\end{aligned}$$

を得るので，上の二つの不等式を合わせれば，結局，

$$J[u]\geq\int_0^{x_0}\left(u^3(x)-x\right)^2(u'(x))^6\,dx\geq\left(\frac{7}{8}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^5\frac{1}{2^6x_0}\geq\frac{7^23^5}{8^25^52^6}>0.$$

さらに，汎関数を

$$J[u]=\int_0^1\left[\left(u^3(x)-x\right)^2(u'(x))^6+\varepsilon|u'(x)|^{5/4}\right]dx,\qquad u(0)=0,\ \ u(1)=1$$

のように modify して，$\varepsilon>0$ を十分小さきすれば，$\xi=u'(x)$ について狭義凸な汎関数でも Lavrentiev 現象が起きることが示せる．

この例は，シンプルな形の汎関数でも Lavrentiev 現象が起こることを示しているものとして数学的に面白いが，実際の現象のモデルでもこの現象が起こりうるかについて示唆していない．このことは，[8] の論文で扱われており，非線型弾性の分野において Lavrentiev 現象が発生するような物理的に意味のある汎関数を提示している．

ある仮定をおけば，Lavrentiev phenomenon を排除し，存在と必要条件と両方が成立する状況を再現できる．以下では，その仮定の例を二つ挙げるが，その前に中核となる仮定に名前をつけておく．強圧性条件を弱くしたものである．

Nagumo growth

定義 2.22 f が $\overline{u}$ に沿って *Nagumo growth* であるとは，$\lim_{x\to\infty}\frac{\theta(x)}{x} = +\infty$ を満たす関数 $\theta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ が存在し，

$$f(x,\overline{u}(x),\xi) \geq \theta(|\xi|) \qquad \forall x \in [a,b],\ \ \xi \in \mathbb{R}$$

が成り立つ，という意味である．

Tonelli-Morrey の定理

定理 2.23 f, f_u, f_ξ が x,u,ξ について連続で，任意の有界集合 $S \subset \mathbb{R}$ に対して定数 C と可積関数 $d(x)$ が存在し，

$$|f_u(x,u,\xi)| + |f_\xi(x,u,\xi)| \leq C\left(|\xi| + |f(x,u,\xi)|\right) + d(x) \qquad \forall (x,u,\xi) \in [a,b] \times S \times \mathbb{R}$$

が成り立てば，任意の弱い極小値 $\overline{u}$ は積分型オイラー・ラグランジュ方程式を満たす．
さらに，f が ξ について凸で，$\overline{u}$ に沿って *Nagumo growth* ならば，$\overline{u}$ はリプシッツ連続である．

この定理の仮定の下で Lavrentiev 現象が起こらず，オイラー・ラグランジュ方程式が成り立つことが言えるから好都合である．

Proof. 証明では昨年度の講義でも登場した次の du Bois-Raymond の補題を用いる：$g \in L^1(a,b)$ が

$$\int_a^b g(x)\varphi'(x)\,dx = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathrm{Lip}[a,b] \ \text{ s.t. } \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \tag{2.17}$$

を満たすならば，定数 $c \in \mathbb{R}$ が存在して，$g(x) = c$ a.e. $x \in [a,b]$.

$\overline{u}$ がオイラー・ラグランジュ方程式を満たすことを示すには，

$$g(x) = f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)) - \int_a^x f_u(t,\overline{u}(t),\overline{u}'(t))\,dt$$

とおいて，(2.17) が成立することを確かめればよい．
定理の仮定の下では $g \in L^1(a,b)$ であることに注意する．また，$\|\varphi\| + \|\varphi'\| \leq 1$ を満たす φ に議論を限ってもよい．$\overline{u}'(x)$ と $\varphi'(t)$ が定義される $x \in [a,b]$ に対して

$$G(x,s) = f(x,\overline{u}(x) + s\varphi(x), \overline{u}'(x) + s\varphi'(x)) - f(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)), \qquad s \in [0,1]$$

と定義する．$\overline{u}$ が弱い極小値だから，s が十分小さければ，

$$\int_a^b G(x,s)\,dx \geq 0, \qquad s << 1$$

が成り立つ．定理の仮定より a.e. $x \in [a,b], s \in [0,1]$，

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{ds}G(x,s)\right| &= \left|f_u(x,\overline{u}(x)+s\varphi(x),\overline{u}'(x)+s\varphi'(x))\varphi(x)+f_\xi(x,\overline{u}(x)+s\varphi(x),\overline{u}'(x)+s\varphi'(x))\varphi'(x)\right| \\ &\leq C\left(\left|\overline{u}'(x)+s\varphi'(x)\right|+\left|f(x,\overline{u}(x)+s\varphi(x),\overline{u}'(x)+s\varphi'(x))\right|\right)+d(x) \\ &\leq C\left(1+\left|\overline{u}'(x)\right|+|G(x,s)|+\left|f(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))\right|\right)+d(x) \\ &= C|G(x,s)|+\tilde{d}(x).\end{aligned}$$

ただし，$\tilde{d}(x)=C\left(1+|\overline{u}'(x)|+|f(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))|\right)+d(x)$ は可積関数である．ここで，Gronwall の補題

Gronwall の補題

定理 2.24 $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ が絶対連続で，$\gamma,\beta\in L^1(a,b)$, $\gamma\geq 0$ に対して

$$|u'(x)| \leq \gamma(x)|u(x)|+\beta(x), \qquad a.e.\ x\in[a,b]$$

を満たすならば，

$$|u(x)-u(a)| \leq \int_a^x e^{\int_t^x \gamma(r)\,dr}\Big(\gamma(t)|u(a)|+\beta(t)\Big)\,dt$$

がすべての $x\in[a,b]$ について成り立つ．

を適用すると，

$$|G(x,s)-G(x,0)| \leq \int_0^s e^{C(s-t)}\Big(C|G(x,0)|+\tilde{d}(x)\Big)\,dt$$

を得るが，$G(x,0)=0$ より $M>0$ があって，十分小さい s に対して

$$|G(x,s)| \leq \frac{1}{C}\left(e^{Cs}-1\right)\tilde{d}(x) \leq M\tilde{d}(x)s.$$

よって，ルベーグの優収束定理を用いると，

$$\begin{aligned}0 &\leq \lim_{s\to 0+}\int_a^b \frac{G(x,s)-G(x,0)}{s}\,dx = \int_a^b \frac{d}{ds}G(x,s)|_{s=0+}\,dx \\ &= \int_a^b \Big(f_u(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))\varphi(x)+f_\xi(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))\varphi'(x)\Big)\,dx \\ &= \int_a^b g(x)\varphi'(x)\,dx.\end{aligned}$$

最後の等式で部分積分を行なった．φ を $-\varphi$ で置き換えても同じ議論ができるので，等号が成立し，(2.17) が示された．

関数 $p(x) = c + \int_a^x f_u(t, \overline{u}(t), \overline{u}'(t))\,dt$ は積分型オイラー・ラグランジュ方程式より a.e. $x \in [a,b]$ で $f_\xi(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x))$ に等しいので，追加の仮定である凸性を用いると，

$$f(x, \overline{u}(x), 0) - f(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)) \geq p(x)(0 - \overline{u}'(x)) \qquad \text{a.e. } x \in [a,b]$$

を満たす．これを $\overline{u}$ に沿った Nagumo growth と合わせると，

$$\theta\big(|\overline{u}'(x)|\big) \leq f(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)) \leq f(x, \overline{u}(x), 0) + p(x)\overline{u}'(x) \qquad \text{a.e. } x \in [a,b].$$

$f(x, \overline{u}(x), 0)$ と $p(x)$ が共に有界で，θ は超線型的に増大することから $\overline{u}'(x) \in L^\infty(a,b)$ が従う． □

次に，汎関数 J を決める関数 f が x に陽に依存しない場合についての結果を紹介する．

Clarke-Vinter の定理

定理 2.25 $\overline{u} \in AC[a,b]$ が強い極小値で，f が x に陽に依存しない連続関数で，ξ について凸，$\overline{u}$ に沿って *Nagumo growth* をもつならば，$\overline{u}$ はリプシッツ連続である．

証明は [3], p.330 を参照．

これまでの議論を振り返ってまとめると，

- $C^2[a,b]$ の関数空間はオイラー・ラグランジュ方程式まで簡単に扱えるための自然な空間である．
- 滑らかでない極小値を許すには，関数空間を Lip$[a,b]$ に広げた．この空間では，滑らかでない極小値を可能にしながら，必要条件（積分型オイラー・ラグランジュ方程式）が導けてちゃんとした理論が構築できる．また，もとの C^2-級関数につなげるための正則性理論もある．
- 最小値の存在を得るには，関数空間をさらに広げて，AC$[a,b]$ を考えると，存在が言えるのに加えて，追加条件が満たされれば，もとの Lip$[a,b]$ につながる結果がある．
- 研究の過程で，区分的に滑らかな関数に関する理論も考えられたが，AC-関数から区分的に滑らかな関数への橋がないため不完全である．

演習問題

問題 2.9 $1 \leq p < q \leq \infty$ のとき，有界集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対して，$L^q(\Omega) \subsetneq L^p(\Omega)$ が成り立つことを示せ．

問題 2.10 開集合 Ω と $p \in [1, \infty]$ に対して $u \in L^p(\Omega)$ とする．p' を $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ となるように

とる．

$$\langle T_u, g\rangle = \int_\Omega u(x)g(x)\,dx, \qquad g \in L^{p'}(\Omega)$$

で定義される T_u が $L^{p'}(\Omega)$ の双対空間の元であり，$\|T_u\|_{L^{p'}(\Omega)^*} = \|u\|_{L^p(\Omega)}$ が成り立つことを示せ．

問題 2.11 ノルム空間 X において，次が成り立つことを示せ：

(1) $u_n \to u$ が強収束すれば，$\|u\| = \lim_{n\to\infty}\|u_n\|$ が成り立つ．

(2) $u_n \to u$ が弱収束すれば，$\|u\| \le \liminf_{n\to\infty}\|u_n\|$ が成り立つ．

問題 2.12 ノルム空間 X に弱い位相をつけて，X^{**} に位相 $\sigma(X^{**}, X^*)$ をつけたら，包含写像 $J : X \to X^{**}$ が連続であることを示せ．

問題 2.13 X が回帰的空間であるための必要十分条件は $J(B_X) = B_{**}$ であることを示せ．ただし，B_X は X の単位閉球，B_{**} は X^{**} の単位閉球である．

問題 2.14 回帰的バナッハ空間 X の閉部分空間 L が回帰的空間であることを示せ．

問題 2.15 S が回帰的バナッハ空間 X の空でない凸な閉部分集合ならば，任意の $x \in X$ に対して S において最も近い点 $p \in S$（つまり，$d(x, S) = \|x - p\|$ を満たす点）が存在することを示せ．これより，S のなかでノルムが最小となる点が存在することを導け．

問題 2.16 ノルム空間 X の列 $\{u_n\}$ が弱収束すれば，$\|u_n\|_X$ が有界な列であることを示せ．

問題 2.17 部分問題のステップを踏んで，以下の特別な場合の Tonelli の定理の詳細な証明を与えよ．

Tonelli の定理

$f(x,u) : [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x,\xi) : [a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が連続で，f は下に有界で，g は ξ について凸で次を満たすとする：

$$\exists r > 1,\ \exists C > 0 \quad \text{such that} \quad g(x,\xi) \ge C|\xi|^r \quad \forall (x,\xi) \in [a,b]\times\mathbb{R}.$$

このとき，$J[u] = \displaystyle\int_a^b \big(f(x,u(x)) + g(x,u'(x))\big)\,dx$ の $X = \{u \in \mathrm{AC}([a,b]); u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$ における最小化関数が存在する．

(1) $\{u_n'\}$ が $L^r(a,b)$ で有界であるような最小化列 $\{u_n\} \subset X$ が存在することを示す．

(2) $\{u_n\}$ が同程度連続だから，部分列（$\{u_n\}$ とする）と $\overline{u} \in \mathrm{AC}([a,b])$ があって，$u_n \to \overline{u}$ が一様収束し，$u_n' \to \overline{u}'$ が $L^r(a,b)$ において弱収束することを示す．

(3) $\displaystyle\int_a^b f(x,\overline{u}(x))\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x,u_n(x))\,dx$ を示す．

(4) 写像 $\xi \mapsto \int_a^b g(x,\xi(x))\,dx$ が $L^r(a,b)$ で下半連続であることを示す．

(5) $\displaystyle\int_a^b g(x,\overline{u}'(x))\,dx \le \liminf_{n\to\infty}\int_a^b g(x,u_n'(x))\,dx$ を示し，$\overline{u}$ が minimizer であると結論する．

問題 2.18 $J[u]=\displaystyle\int_0^1 \bigl(u^2(x)+((u'(x))^2-1)^2\bigr)\,dx$ は凸性以外，Tonelli の定理のすべての仮定を満たすが，$u(0)=u(1)=0$ の境界条件を満たす minimizer が存在しないことを確かめよ．

問題 2.19 $J[u]=\displaystyle\int_0^1 \bigl(u^2(x)+u'(x)[1+\min\{u'(x),0\}]\bigr)\,dx$ の境界条件 $u(0)=0, u(1)=1$ を満たす minimizer が存在しないことを確かめ，Tonelli の定理が適用できない理由を明らかにせよ．

問題 2.20 閉集合 $S\subset\mathbb{R}$ に対して，変分問題 (2.7) に

$$u(x)\in S, \qquad x\in[a,b]$$

という制約条件をつけても，Tonelli の定理がそのまま成り立つことを示せ．ただし，f の強圧性条件を $x\in S$ に限ってもよい．

問題 2.21 変分問題 (2.7) において，$f(x,u,\xi)=f(x,u)+g(\xi)$ と書けて，f,g が C^1-級関数で，$C\ge 0$ が存在し，

$$|g'(\xi)|\le C\Bigl(1+|\xi|+|g(\xi)|\Bigr) \qquad \forall\xi\in\mathbb{R}$$

が成り立つとき，変分問題の弱い極小値が積分型オイラー・ラグランジュ方程式を満たすことを示せ．

問題 2.22 部分問題を解くことで次の変分問題を解析せよ：

$$\min\int_0^1 e^{u(x)+(u'(x))^2}\,dx, \qquad u\in \mathrm{AC}[0,1],\ \ u(0)=0,\ u(1)=1.$$

(1) 直接法を用いて，最小値が存在することを示す．

(2) 最小値が一つに決まることを示す．

(3) 汎関数が Tonelli-Morrey の定理の仮定を満たさないことを確認する．

(4) 変分問題の解がリプシッツ連続であることを示す．

(5) 次の境界値問題の解がただ一つ存在することを導く：

$$u''(x)=\frac{1-(u'(x))^2}{1+(u'(x))^2}, \qquad u\in C^\infty([0,1]),\ \ u(0)=0,\ u(1)=1.$$

3　多変数関数における最小化

3.1　古典的な理論

この節では，未知関数が多変数関数である変分問題

$$\inf_{u\in X} J[u], \quad J[u] = \int_\Omega f(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x}), \nabla u(\boldsymbol{x}))\, d\boldsymbol{x}, \quad X = \{u \in C^2(\overline{\Omega});\ u - u_0 = 0 \text{ on } \partial\Omega\} \tag{3.1}$$

を考える．ここで，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が有界開集合，関数 u_0 はその境界 $\Gamma := \partial\Omega$ 上で与えられている．関数 f の変数を依然として $\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\xi}$ と表すが，ここでは $(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ となる．

まずは，扱いやすい滑らかな設定について調べる．すなわち，X は上記のように $C^2(\overline{\Omega})$-級関数の空間（2 階偏微分まで Ω で存在し，連続で，Γ まで連続的に拡張できる関数のこと）で，f も C^2-級であるとする．このとき，1 変数関数の場合と同じように，最小値の存在は言えないが，必要条件であるオイラー・ラグランジュ方程式が成り立つことが示せる：

オイラー・ラグランジュ方程式（多変数）

定理 3.1 変分問題 (3.1) の弱い極小値 $\overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ はオイラー・ラグランジュ方程式

$$\mathit{div}\, \nabla_{\boldsymbol{\xi}} f(\boldsymbol{x}, \overline{u}(\boldsymbol{x}), \nabla\overline{u}(\boldsymbol{x})) = f_u(\boldsymbol{x}, \overline{u}(\boldsymbol{x}), \nabla\overline{u}(\boldsymbol{x})) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{3.2}$$

を満たす．

Proof. 試験関数を $\varphi \in C_0^2(\Omega)$ と選ぶ．すなわち，Ω のなかでコンパクトな台をもつ C^2-級関数である．関数

$$j(\varepsilon) = J[\overline{u} + \varepsilon\varphi]$$

が $\varepsilon = 0$ で極小値をもつことに注意すると，

$$j'(0) = \int_\Omega \{f_u(\boldsymbol{x}, \overline{u}(\boldsymbol{x}), \nabla\overline{u}(\boldsymbol{x}))\varphi(\boldsymbol{x}) + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} f(\boldsymbol{x}, \overline{u}(\boldsymbol{x}), \nabla\overline{u}(\boldsymbol{x})) \cdot \nabla\varphi(\boldsymbol{x})\}\, d\boldsymbol{x} = 0$$

を得る．φ が Ω の境界上で消えることを思い出し，発散定理を適用すると，

$$\int_\Omega \{f_u(\boldsymbol{x}, \overline{u}(\boldsymbol{x}), \nabla\overline{u}(\boldsymbol{x})) - \operatorname{div} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} f(\boldsymbol{x}, \overline{u}(\boldsymbol{x}), \nabla\overline{u}(\boldsymbol{x}))\}\, \varphi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^2(\Omega)$$

が従う．$\{\cdot\}$ の中身が連続関数より，Ω 上で恒等的にゼロでなければならないことは，1 変数と同様の背理法で簡単に示される． □

1 変数関数の議論をフォローするとすれば，次にリプシッツ関数における変分問題を考えるこ

となる．しかし，ここではリプシッツ関数に関する 2 つの代表的な結果を証明なしで述べて，解の存在が言える一般の設定に進むことにする．

最初の定理で f が局所リプシッツであることを仮定する．これは，任意の有界集合 $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ に対して $k \in L^1(\Omega)$ が存在して，

$$|f(\boldsymbol{x}, u_1, \boldsymbol{\xi}_1) - f(\boldsymbol{x}, u_2, \boldsymbol{\xi}_2)| \le k(\boldsymbol{x})|(u_1, \boldsymbol{\xi}_1) - (u_2, \boldsymbol{\xi}_2)|, \quad \forall (u_1, \boldsymbol{\xi}_1), (u_2, \boldsymbol{\xi}_2) \in S, \text{ a.e. } \boldsymbol{x} \in \Omega$$

が成り立つ，という意味である．

弱いオイラー・ラグランジュ方程式

定理 3.2 $\overline{u} \in \mathit{Lip}(\Omega)$ が変分問題

$$\inf_{u \in X} J[u], \quad J[u] = \int_\Omega f(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x}), \nabla u(\boldsymbol{x}))\, d\boldsymbol{x}, \quad X = \{u \in \mathit{Lip}(\Omega);\ u - u_0 = 0 \text{ } \mathit{on}\, \partial\Omega\} \quad (3.3)$$

の解で，f が $\boldsymbol{x}$ について可測で，$(u, \boldsymbol{\xi})$ について局所リプシッツならば，可積関数 $\boldsymbol{p} : \Omega \to \mathbb{R}^n$，$q : \Omega \to \mathbb{R}$ が存在して，次の 2 条件が成立する：

$$\Big(q(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\Big) \in \partial_C f\,(\boldsymbol{x}, \overline{u}(\boldsymbol{x}), \nabla \overline{u}(\boldsymbol{x})) \qquad \mathit{a.e.}\ \boldsymbol{x} \in \Omega \quad (3.4)$$

$$\int_\Omega \{q(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla\varphi(\boldsymbol{x})\}\, d\boldsymbol{x} = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathit{Lip}_0(\Omega). \quad (3.5)$$

ただし，$\mathrm{Lip}_0(\Omega)$ は $\partial\Omega$ 上でゼロとなるリプシッツ関数のことである．

上の定理で，$\partial_C f$ は以下のように定義される f の $(u, \boldsymbol{\xi})$ についての一般化勾配である．まず，Banach 空間 X におけるリプシッツ関数 $f : X \to \mathbb{R}$ の方向 v での一般化方向微分 $f^\circ(x; v)$ を定義する：

$$f^\circ(x; v) = \limsup_{y \to x, t \downarrow 0} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}.$$

すると，$\partial_C f(x)$ は次で定義される X^* の凸な部分集合である：

$$\zeta \in \partial_C f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f^\circ(x; v) \ge \langle \zeta, v \rangle \ \ \forall v \in X.$$

したがって，$f^\circ(x; \cdot)$ は $\partial_C f(x)$ の支持関数（support function）である．
f が凸で下半連続ならば，$\partial_C f(x)$ は f の x における劣微分 $\partial f(x)$ と一致する．劣微分は劣勾配の集合であり，f の x における劣勾配とは次を満たす $\zeta \in X^*$ のことである：

$$f(y) - f(x) \ge \langle \zeta, y - x \rangle \qquad \forall y \in X.$$

いずれにしても，f が C^1-級の場合，定理の $\partial_C f$ はただ 1 つのベクトル $(f_u, \nabla_{\boldsymbol{\xi}} f)$ の集合となるため，$q = f_u, \boldsymbol{p} = \nabla_{\boldsymbol{\xi}} f$ と言える．

例 3.1

(1) $f(x)=|x|$ のとき，f は凸な 1 変数関数なので，一般化勾配と劣微分は一致する．通常の意味で微分ができないのは点 $x=0$ のみなので，この点での劣微分を求めればよい．

$$\partial f(0)=\{\zeta\in\mathbb{R};\ |y|-|0|\geq\zeta(y-0)\ \forall y\in\mathbb{R}\}=[-1,1]$$

であるので，

$$\partial f(x)=\partial_C f(x)=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ [-1,1] & (x=0)\\ 1 & (x>0)\end{cases}$$

$x=0$ での劣微分が f のグラフを下から支える支持超平面の傾きの集合であることに注意する．

(2) ノルム空間 X におけるノルム関数 $f(x)=\|x\|_X$ のとき，$\partial_C f(0)=\partial f(0)=\overline{B}(0,1)$，すなわち，単位閉球である．

(3) $f(x)=-|x|$ のとき，

$$\partial f(0)=\{\zeta\in\mathbb{R};\ -|y|-|0|\geq\zeta(y-0)\ \forall y\in\mathbb{R}\}=\emptyset$$

であるが，一般化勾配は空集合ではない．それを確かめるために，まず一般化方向微分を計算しておく．$t>0, v>0$ に対して，

$$\frac{f(y+tv)-f(y)}{t}=\begin{cases}v & (y\leq -tv)\\ -\frac{2y+tv}{t} & (-tv\leq y\leq 0)\\ -v & (y\geq 0)\end{cases},$$

そして，$t>0, v<0$ に対して，

$$\frac{f(y+tv)-f(y)}{t}=\begin{cases}v & (y\leq 0)\\ \frac{2y+tv}{t} & (0\leq y\leq -tv)\\ -v & (y\geq -tv)\end{cases},$$

となるので，$y\to x, t\to 0+$ とすることで

$$f^\circ(x;v)=\begin{cases}v & (x<0)\\ |v| & (x=0)\\ -v & (x>0)\end{cases}$$

を得る．従って，

$$\partial_C f(0)=\{\zeta\in\mathbb{R};\ f^\circ(0;v)=|v|\geq\zeta v\ \forall v\in\mathbb{R}\}=[-1,1].$$

もう一つの定理は，境界条件を活用して，関数 $f(x,u,\xi)$ が x,u に依存しない場合に限って，解の存在を示す．かなり厳しい制約ではあるが，Dirichlet 汎関数や極小曲面の汎関数はこの範疇に入る．

Hilbert-Haar の定理

定理 3.3 変分問題 (3.3) において，$f(\xi)$ が凸で，x,u に依存しないとする．境界上の関数 u_0 が有界傾きの条件（定数 L）を満たすなら，変分問題 (3.3) の解（＝最小化関数）$\overline{u}$ が存在し，そのリプシッツ定数は L である．

$u_0:\Gamma\to\mathbb{R}$ が有界傾きの条件（定数 L）を満たすとは，任意の点 $\boldsymbol{x}_0\in\Gamma$ に対して，アファイン関数 $\varphi^-,\varphi^+:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$\varphi^-(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\zeta}^-_{\boldsymbol{x}_0}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+u_0(\boldsymbol{x}_0),\qquad \varphi^+(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\zeta}^+_{\boldsymbol{x}_0}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+u_0(\boldsymbol{x}_0),$$

が存在し，次を満たすという意味である：

$$\left|\boldsymbol{\zeta}^-_{\boldsymbol{x}_0}\right|\le L,\quad \left|\boldsymbol{\zeta}^+_{\boldsymbol{x}_0}\right|\le L,\qquad \varphi^-(\boldsymbol{x})\le u_0(\boldsymbol{x})\le\varphi^+(\boldsymbol{x})\ \ \forall\boldsymbol{x}\in\Gamma.$$

これは関数 u_0 だけではなく，境界 Γ（つまり，領域 Ω）に対する条件でもある．
Ω が一様に狭義凸な領域で，u_0 が $C^2(\mathbb{R}^n)$-級関数の Γ への制限ならば，この条件が満たされることを Miranda による定理が教えてくれる．

3.2　ソボレフ空間における理論

本節では，多変数関数についての変分問題を扱う．リプシッツ関数においては一般の存在の結果が得られないので，1 変数と同様に許容関数空間を広げる必要がある．1 変数の絶対連続関数に多変数で対応しているのはソボレフ空間 $W^{k,p}(\Omega)$ である．これは次の補題より裏付けられる．

Lemma

つぎの主張は同値である：

(1) $u\in W^{1,1}(a,b)$

(2) 関数 $v\in\mathrm{AC}([a,b])$ が存在し，$u(x)=v(x)$ a.e. $x\in(a,b)$（このとき $u'=v'$）

ソボレフ空間 $W^{1,p}(\Omega)$ の定義を述べる．Ω を依然として有界領域とする．まずは弱微分の概念を紹介する．関数 $u\in L^p(\Omega)$ が L^p で弱微分可能であるとは，$\boldsymbol{w}=(w_1,\ldots,w_n)\in(L^p(\Omega))^n$ が存在し，

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,dx=-\int_\Omega w_i(x)\varphi(x)\,dx\qquad\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega),\ \ i=1,\ldots,n$$

が成り立つということである．w_i を u の x_i についての弱微分とよぶ．
$C_0^\infty(\Omega)$ が $L^p(\Omega)$ の中に稠密だから，弱微分が存在すれば一意である．また，$u\in C^1(\Omega)$ ならば，

部分積分して，弱微分 w_i が偏微分 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ と一致することがわかる．弱微分の記号は通常の微分と同じものを用いる．

$1 \leq p \leq \infty$ に対して，ソボレフ空間 $W^{1,p}(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ において弱微分をもつ $L^p(\Omega)$-関数の空間である．ノルムを以下のように定める：

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

例 3.2　$f(x) = |x|$ という 1 変数関数の弱微分は

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ +1 & (x > 0) \end{cases}$$

である．これは弱微分の定義から確かめることができる．L^p-空間で議論しているため，$x = 0$ において f' を定義しなくても問題ないことに注意する．
しかし，$f'(x)$ という関数は弱微分できない（f の 2 階弱微分が存在しない）．実際，弱微分が存在すれば，ほとんど至るところで 0 でなければならないが，これは弱微分の定義と矛盾する．

ソボレフ空間の性質

定理 3.4

- $W^{1,p}(\Omega)$ は *Banach* 空間である．
- $p \in (1, \infty)$ ならば，$W^{1,p}(\Omega)$ は回帰的である．

許容関数をソボレフ空間に広げると，（ある条件が満たされれば）最小値の存在は示せるが，1 変数の場合と比べて，理論は複雑になる．その主な理由には，$W^{1,p}$ の関数が連続であるとは限らないということがある．そもそも，L^p 関数（ひいては $W^{1,p}$ 関数も）同値類であり，測度ゼロの集合で値を変えても同じ関数と見なされる．すなわち，「連続ではない」というのは，同値類の中に連続な代表関数がないという意味である．例えば，次のことが言える：

ソボレフ空間の性質

補題 3.5

- $u(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^{-\alpha}$ が $L^1(\Omega)$ に属するのは，$\alpha < n$ のときとそのときのみである．
- $u(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^{-\alpha}$ が $W^{1,p}(\Omega)$ に属するのは，$\alpha < \frac{n-p}{p}$ のときとそのときのみである．

よって，$n > 1$ ならば，$W^{1,1}(\Omega)$ は不連続な関数を含む．

ソボレフ空間に属する関数は必ずしも連続ではないということは境界条件の指定を困難にする．すなわち，L^p-関数の Ω の境界上の値を好きに変えても同じ関数である．L^p-空間ではこの問題を解決する方法がないが，$W^{1,p}$-空間は弱微分が存在するおかげでより連続に近い関数からなる．こ

の事実を用いて，$W^{1,p}$-関数の境界上の値（いわゆる跡，trace）を一意に定義できる．

しかし，ここではより簡単な方法で境界条件を定義する．すなわち，$C_0^\infty(\Omega)$ の $W^{1,p}$-ノルムでの閉包を

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ W^{1,p}\text{-}\lim_{i\to\infty} u_i;\ u_i \in C_0^\infty(\Omega) \right\}$$

とおいて，関数 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ が境界上でゼロであることを $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ と解釈する．証明は容易ではないが，これを裏付ける次の事実が示される：$\Gamma = \partial\Omega$ が C^1-級で，$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ならば，

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma \qquad \Leftrightarrow \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

したがって，以降では u_0 を Ω 全体で定義されるリプシッツ関数であるとして，境界条件を次のように表す：

$$\inf_{u\in X} J[u], \quad J[u] = \int_\Omega f(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x}), \nabla u(\boldsymbol{x}))\, d\boldsymbol{x}, \quad X = \{u \in W^{1,p}(\Omega);\ u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)\}. \tag{3.6}$$

3.2.1　基本の具体例：Dirichlet 積分

最初に，以下の具体的な最小化問題を扱う．その後，一般的な汎関数について述べる．

Dirichlet 積分の最小化問題

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ をリプシッツ境界をもつ有界領域として，$u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ とする．

$$\inf_{u\in X} J[u], \qquad J[u] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x}, \quad X = \{u \in W^{1,2}(\Omega);\ u - u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)\} \tag{3.7}$$

ここで，$|\nabla u|$ は u の勾配のユークリッド・ノルムである．

Dirichlet 積分の最小値の存在

定理 3.6 *最小化問題 (3.7) はただ一つの最小値 $\overline{u} \in X$ が存在する．この最小値は弱い Laplace 方程式*

$$\int_\Omega \nabla\overline{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla\varphi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 0 \qquad \forall\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{3.8}$$

を満たす．
逆に，(3.8) を満たす関数 $\overline{u} \in X$ は (3.7) の最小値である．

Proof.

存在 は次の三つのステップで示す．

(a) （コンパクト性）$\{u_k\}_0^\infty$ を (3.7) の最小化列とする．すなわち，

$$J[u_k] \searrow \inf_{u\in X} J[u] =: m \geq 0 \qquad \text{as } k\to\infty.$$

最小化列の最初の関数 u_0 を境界条件を決める関数と同じにできる．

次のポアンカレ不等式

$$\exists C_P(\Omega,p) \text{ such that } \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_P\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u\in W_0^{1,p}(\Omega),\ p\in[1,\infty]$$

より

$$\begin{aligned}
\|u_k\|_{W^{1,2}} &= \|u_k\|_{L^2} + \|\nabla u_k\|_{L^2} \\
&\leq \|u_k-u_0\|_{L^2} + \|u_0\|_{L^2} + \|\nabla u_k\|_{L^2} \\
&\leq C_P\|\nabla u_k - \nabla u_0\|_{L^2} + \|u_0\|_{L^2} + \|\nabla u_k\|_{L^2} \\
&\leq (C_P+1)\|\nabla u_k\|_{L^2} + C_P\|\nabla u_0\|_{L^2} + \|u_0\|_{L^2} \\
&\leq (C_P+1)\sqrt{2J[u_0]} + (C_P+1)\|u_0\|_{W^{1,2}}.
\end{aligned}$$

最後の不等式は汎関数 J の形および $\{u_k\}$ が最小化列であることより従う．これは，関数列 $\{u_k\}$ が $W^{1,2}(\Omega)$ において有界であることなので，$L^p(\Omega), p\in(1,\infty)$ の弱コンパクト性より，$\overline{u}\in X$ と部分列 $\{u_{k_i}\}$ があって，

$$u_{k_i} \rightharpoonup \overline{u} \qquad \text{weakly in } W^{1,2}(\Omega) \quad \text{as } i\to\infty$$

が言える．正確には，∇u_{k_i} が $L^2(\Omega)$ である $w\in L^2(\Omega)$ に弱収束するような部分列 u_{k_i} を取り出した上で，この部分列から $L^2(\Omega)$ で $\overline{u}$ に弱収束する部分列 $u_{k_{i_j}}$ をさらに取り出す．このとき，$\nabla\overline{u}=w$ であることを弱微分の定義から示さないといけない．上式では，部分列の添字を省略している．

極限関数 $\overline{u}$ が境界条件を満たすことを確かめる．集合 X が凸だから，定理2.15により X が強い（$W^{1,2}$）位相で閉ならば，弱位相でも閉である．$W_0^{1,2}(\Omega)$ の定義より，X が $W^{1,2}$ の位相について閉であることがすぐに従う．よって，弱収束先が X の元であり，$\overline{u}$ は境界条件を満たす．

(b) （下半連続性）汎関数 J が弱下半連続であること，すなわち

$$u_k \rightharpoonup \overline{u} \ \text{ weakly in } W^{1,2}(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \liminf_{k\to\infty} J[u_k] \geq J[\overline{u}]$$

を満たすことを示す（ここで $\{u_k\}$ が一般の列で，最小化列でなくてもよい）．

$$2J[u_k] = \int_\Omega |\nabla u_k|^2\,d\boldsymbol{x} \;=\; \int_\Omega \left\{|\nabla\overline{u}|^2 + 2\nabla\overline{u}\cdot\nabla(u_k-\overline{u}) + |\nabla u_k - \nabla\overline{u}|^2\right\}\,d\boldsymbol{x}$$
$$\geq \int_\Omega \left\{|\nabla\overline{u}|^2 + 2\nabla\overline{u}\cdot\nabla(u_k-\overline{u})\right\}\,d\boldsymbol{x}$$

に注意すると，

$$J[u_k] \geq J[\overline{u}] + \int_\Omega \nabla\overline{u}\cdot\nabla(u_k-\overline{u})\,d\boldsymbol{x}$$

が従い，弱収束より右辺の最後の積分が $k\to\infty$ の極限で消える．

(c) （結論）(a) と (b) を合わせると，最小化列 $\{u_k\}$ の部分列に対して，

$$\inf_{u\in X} J[u] = \liminf_{i\to\infty} J[u_{k_i}] \geq J[\overline{u}]$$

が得られたので，$\overline{u}$ は最小値である．

一意性 は汎関数の凸性を用いる．

$$J[u] = J[v] = m$$

を満たす $u, v \in X$ が存在するとして，$u = v$ でなければならないことを示す．関数 $\xi \mapsto |\xi|^2$ が凸だから，$w := \frac{1}{2}(u+v)$ とすると，

$$m \leq J[w] \leq \frac{1}{2}J[u] + \frac{1}{2}J[v] = m$$

より w も minimizer である．つまり，

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v|^2 - \left|\frac{\nabla u + \nabla v}{2}\right|^2\right]\,d\boldsymbol{x} = 0.$$

$\xi \mapsto |\xi|^2$ が凸より，被積分関数はほとんど至るところでゼロでなければならない．さらに，$\xi \mapsto |\xi|^2$ の狭義凸性より $\nabla u = \nabla v$ a.e. in Ω を得る．u と v の $\partial\Omega$ 上のトレースが一致するので，ポアンカレ不等式より $u = v$ a.e. in Ω.

オイラー・ラグランジュ方程式 は $J[\overline{u}]$ と $J[\overline{u}+\varepsilon\varphi], \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega), \varepsilon \in \mathbb{R}$ との比較より得られる（$\overline{u}+\varepsilon\varphi \in X$ であることに注意）．実際，

$$0 \leq J[\overline{u}+\varepsilon\varphi] - J[\overline{u}] = \varepsilon\int_\Omega \nabla\overline{u}\cdot\nabla\varphi\,d\boldsymbol{x} + \varepsilon^2 J[\varphi]$$

が $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}$ について成り立つことからすぐに (3.8) が従う．
逆に，(3.8) が成り立つとして，$u \in X$ の任意の元に対して $\varphi = u - \overline{u}$ をとると，

$$J[u] = J[\overline{u}+\varphi] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\overline{u}+\nabla\varphi|^2\,d\boldsymbol{x} = J[\overline{u}] + \int_\Omega \nabla\overline{u}\cdot\nabla\varphi\,d\boldsymbol{x} + J[\varphi] \geq J[\overline{u}]$$

より $\overline{u}$ は最小値である． □

3.2.2 一般の存在定理

直接法の真髄を見るために，一般的な最小化問題

$$\inf_{x \in X} F(x), \qquad X \subset Y \ \ldots \text{ Banach 空間} \tag{3.9}$$

を考える．

一般の存在定理

次の仮定

(1) X は回帰的な Banach 空間 Y の凸な閉集合である

(2) $F : Y \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ は凸で下半連続である，また $\mathrm{dom}(F) \cap X \neq \emptyset$ を満たす

(3) すべての $M \in \mathbb{R}$ について $\{x \in X;\ F(x) \leq M\}$ は有界である

が満たされれば，問題 (3.9) の最小値が存在する．

定理に出てくる下半連続性（lower semicontinuity）は次の性質である：

$$x_n \to x \ \text{ in } X \qquad \Rightarrow \qquad F(x) \leq \liminf_{n \to \infty} F(x_n).$$

上の式で x_n の強い収束を弱収束で置き換えれば，弱下半連続性（weak lower semicontinuity）の定義になる．また，$\mathrm{dom}(F)$ とは $F(x) < \infty$ を満たす x の集合である．

Proof.

- $X \cap \mathrm{dom}(F) \neq \emptyset$ より，$F(x_0) < \infty$ を満たす $x_0 \in X$ が存在する．よって，$\inf_{x \in X} F$ は有限または $-\infty$ である．
- 最小化列 $\{x_n\}$ が存在する．すなわち，$f(x_n) \searrow \inf_X F$ が成り立つ．
- $F(x_n) \leq F(x_0) + 1\ \forall n \geq n_0$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在するから，仮定 (3) より $\{x_n\}$ は有界集合である．
- Y が回帰的空間だから，弱コンパクト性より部分列 $\{x_{n_i}\}$ があって，$x_{n_i} \rightharpoonup \overline{x} \in Y$ という弱収束が言える．
- 集合 X が閉で凸だから，弱い位相でも閉じている．したがって，$\overline{x} \in X$ がわかる．ここで定理2.15を用いた．また，エピグラフを考えることでこの定理の系として，次が言える：$F : Y \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が凸関数ならば，F が下半連続であることと弱半連続であることが同値である．
- 上の項目で紹介した系と F の凸性を合わせると，F が弱下半連続であることが従う：

$$F(\overline{x}) \leq \liminf_{i \to \infty} F(x_{n_i}) = \inf_{x \in X} F(x).$$

よって，$\overline{x}$ は最小値を与える．　□

注 Growth condition (3) は以下のいずれの場合に満たされる：

- X 自体が有界である
- F は強圧（coercive）である，すなわち，$\lim_{\|x\|\to\infty} F(x) = \infty$

我々が考えているソボレフ空間における変分問題

$$\inf_{u\in X} J[u], \quad J[u] = \int_\Omega f(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x}), \nabla u(\boldsymbol{x}))\, d\boldsymbol{x}, \quad X = \{u \in W^{1,p}(\Omega);\ u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)\}$$

の場合，問題のデータがどのような条件を満たせば，この一般的な定理に持ち込むことができるだろうか．例えば，次の定理がある．

Sobolev 空間における存在定理

定理 3.7 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ がリプシッツ連続な境界を持つ有界領域だとする．

(1) $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は *Carathéodory* 関数である，つまり，

- $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\xi})$ はすべての $(u, \boldsymbol{\xi})$ に対して可測である
- $(u, \boldsymbol{\xi}) \mapsto f(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\xi})$ はほとんどすべての $\boldsymbol{x} \in \Omega$ に対して連続である

(2) $\boldsymbol{\xi} \mapsto f(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\xi})$ はすべての $(\boldsymbol{x}, u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ について凸である

(3) $p > q \geq 1$ を満たす p, q，そして $C_1 > 0$ を満たす $C_1 \in \mathbb{R}$ と $C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ が存在し，次が成り立つ：

$$f(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\xi}) \geq C_1|\boldsymbol{\xi}|^p + C_2|u|^q + C_3 \qquad \forall(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\xi}) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

という条件が満たされれば，最小値 $\overline{u} \in X$ が存在する．
さらに，$(u, \boldsymbol{\xi}) \mapsto f(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\xi})$ がすべての $x \in \overline{\Omega}$ について狭義凸ならば，最小値は一意である．

注

- 仮定 (1) では $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ としてもよいが，そうすると，右辺が L^2-関数であるポアソン方程式 $-\Delta u = h, h \in L^2(\Omega)$ のような基本的な問題が扱えない（この場合，$f(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^2 - h(\boldsymbol{x})u$）．
- 関数 $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ がベクトル値関数の場合も同様の定理が成り立つが，仮定 (2) を緩めることができる．つまり，f が $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}) = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}, \det \boldsymbol{\xi})$ と表され，$(\boldsymbol{\xi}, \delta) \mapsto F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}, \delta)$ が全ての $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ に対して凸であれば十分である．例えば，$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{\xi}|^4 + 16(\det \boldsymbol{\xi})^2$ は $\boldsymbol{\xi}$ について凸ではないが，$F(\boldsymbol{\xi}, \delta) = |\boldsymbol{\xi}|^4 + 16\delta^2$ は $(\boldsymbol{\xi}, \delta)$ について凸である．
- 仮定 (3) においては，$p > 1$ が必要である．その反例は極小曲面の問題であるが，$n = 1$ のときの $f(x, u, \xi) = \sqrt{u^2 + \xi^2}$ に対する $X = \{u \in W^{1,1}(0, 1);\ u(0) = 0, u(1) = 1\}$ における

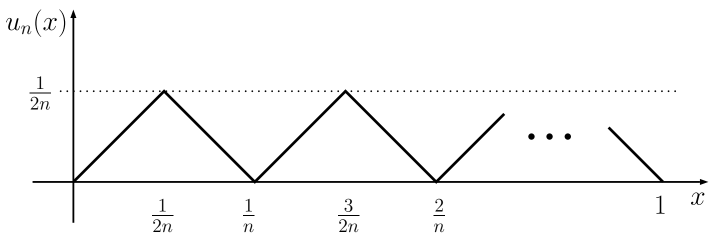
最小化問題も解を持たないというより簡単な反例となる．このとき定理の全ての仮定が満たされるが，(3) の仮定は $p=1$ でしか満たされない．

$J[u] \geq \int_0^1 u'(x)\,dx = 1$ より，汎関数の下限は 1 以上であるが，$u_n = 0$ in $[0, 1-\frac{1}{n}]$, $u_n(x) = nx-(n-1)$ in $[1-\frac{1}{n}, 1]$ とすると，$J[u_n] = \frac{1}{n}\sqrt{1+n^2} \to 1$ $(n\to\infty)$ より $\inf_X J = 1$ が従う．しかし，$J[\overline{u}] = 1$ となる関数 $\overline{u} \in X$ があれば，$J[\overline{u}] = \int_0^1 \sqrt{\overline{u}^2 + (\overline{u}')^2}\,dx \geq \int_0^1 \overline{u}'(x)\,dx = 1$ よりほとんどいたるところで $\overline{u} = 0$ でなければならず，$\overline{u}(1) = 1$ と $\overline{u}$ の連続性と矛盾する．

- 仮定 (3) においては，$C_1 > 0$ が必要である．その反例は，$n=1$ のときの $f(x,u,\xi) = x\xi^2$ に対する $X = \{u \in W^{1,2}(0,1);\, u(0) = 1, u(1) = 0\}$ での最小化問題である．このとき，$\inf_X J = 0$ であるが，$J[\overline{u}] = 0$ ならば，$\overline{u}' = 0$ a.e. より連続性と境界条件に矛盾する．

- 仮定 (3) においては，$p > q$ が必要である．その反例は，$n = 1, \lambda > \pi$ のときの $f(x,u,\xi) = \xi^2 - \lambda^2 u^2$ に対する $X = W_0^{1,2}(0,1)$ での最小化問題である．このとき，$\inf_X J = -\infty$ である．（問題3.4を参照）

- 仮定 (2) も必要である．その反例として，Bolza の例と呼ばれる問題がある．$n=1$ のときの $f(x,u,\xi) = (\xi^2-1)^2 + u^4$ に対する $X = W_0^{1,4}(0,1)$ での最小化問題である．このとき，図のような関数列をとれば，$\inf_X J = 0$ が示せる．しかし，$J[\overline{u}] = 0$ ならば，$\overline{u} = 0$, $|\overline{u}'| = 1$ a.e. でなければならず，$\overline{u}$ の連続性と矛盾する．



- f が凸性の条件 (2) を満たさなくても，f の convex envelope に対する最小化問題の minimizer の存在が言えるので，この minimizer をもとの問題の一般化した minimizer と考えることができる（[6] の 124 ページを参照）．

- この定理の他のバージョンは例えば，[3], Theorem 20.30, 20.31 を参照されたい．

3.2.3 Euler-Lagrange 方程式

オイラー・ラグランジュ方程式に現れる関数 f の微分がある growth 条件を満たせば，最小値の存在を仮定した上で，極小値の満たす Euler-Lagrange 方程式を導く．

オイラー・ラグランジュ方程式

定理 3.8 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ をリプシッツな境界をもつ有界領域，$p \geq 1$ とする．さらに，$f(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\xi}) \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ に対して C が存在し，

$$|f_u(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\xi})|, |f_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\xi})| \leq C\left(1 + |u|^{p-1} + |\boldsymbol{\xi}|^{p-1}\right) \qquad \forall (\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\xi}) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

が成り立つとする．このとき，$u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ に対して，$\overline{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ が変分問題

$$\inf_{u \in X} J[u], \quad J[u] = \int_\Omega f(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x}), \nabla u(\boldsymbol{x}))\, d\boldsymbol{x}, \quad X = u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) \tag{3.10}$$

の最小値を与えるならば，$\overline{u}$ は

$$\int_\Omega [f_u(\boldsymbol{x}, \overline{u}, \nabla \overline{u})\varphi + f_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}, \overline{u}, \nabla \overline{u}) \cdot \nabla \varphi]\, d\boldsymbol{x} = 0 \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

という弱いオイラー・ラグランジュ方程式を満たす．
さらに，$f \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ で，$\overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ ならば，$\overline{u}$ は強いオイラー・ラグランジュ方程式

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_{\xi_i}(\boldsymbol{x}, \overline{u}, \nabla \overline{u})] = f_u(\boldsymbol{x}, \overline{u}, \nabla \overline{u}) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$$

を満たす．
逆に，$(u, \boldsymbol{\xi}) \mapsto f(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\xi})$ がすべての $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$ について凸で，$\overline{u}$ が上記のオイラー・ラグランジュ方程式のいずれかの解であれば，$\overline{u}$ は変分問題 *(3.10)* の最小値である．

証明は，$J[u + \varepsilon\varphi]$ の ε についての微分を計算するが，極限と積分の交換で f に対して課した仮定を駆使して Lebesgue の優収束定理を用いる．

定理の $f_u, f_{\boldsymbol{\xi}}$ に対する仮定はオイラー・ラグランジュ方程式に現れる $\int f_u\varphi, \int f_{\boldsymbol{\xi}}\nabla\varphi$ の積分が意味をもつことを保証している．例えば，$p > 1$ のとき $p' = \frac{p}{p-1}$ を思い出して，

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f_u\varphi\right| \leq \left(\int_\Omega |f_u|^{p'}\right)^{1/p'} \|\varphi\|_{L^p(\Omega)} &\leq C\left(\int_\Omega (1 + |u|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1})\right)^{p/(p-1)} \|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq C\int_\Omega (1 + |u|^p + |\nabla u|^p)\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} < \infty\end{aligned}$$

この仮定をソボレフの埋蔵定理を用いて少し弱めることができる．また，f は x の変数については可測性のみ仮定してもかまわない．また，f が $(u, \boldsymbol{\xi})$ についてリプシッツのみの場合，オイラー・ラグランジュ方程式では f の一般化勾配が現れる（[3], Theorem 20.32, 20.33）．

最小値の存在を言うために関数空間を広げたせいで，最小値に関する情報の量が微分可能な設定より減ってしまう．つまり，最小値がソボレフ空間に属するということしかわからず，その微

分可能性などの正則性を示そうと思えば，追加で仕事をしないといけない．この部分を扱うのは正則性理論であるが，ここでは紹介を割愛する．

演習問題

問題 3.1 $p \in [1,\infty)$ に対して，$\{u_i\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ が次を満たすとする：

- u_i が $L^p(\Omega)$ で u に弱収束する
- $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ が $L^p(\Omega)$ で v_j に弱収束する（$j = 1, \ldots, n$）

このとき，$u \in W^{1,p}(\Omega)$ であり，$\nabla u = (v_1, \ldots, v_n)$ であることを示せ．

問題 3.2 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が有界領域ならば，$\mathrm{Lip}(\Omega) \subset W^{1,\infty}(\Omega)$ を示せ．よって，リプシッツ関数はすべての $W^{1,p}(\Omega), p \geq 1$ に入る．(Ω の境界に対して条件を課せば，逆も示せる．)

問題 3.3 補題3.5を示せ．

問題 3.4 部分問題のステップを踏んで，以下の定理を示せ．

Wirtinger's inequality

$a \in [0,\pi]$ とする．$u(0) = u(a) = 0$ を満たす全ての $u \in C^2([0,a])$ に対して

$$\int_0^a u^2(x)\, dx \leq \int_0^a (u'(x))^2\, dx.$$

ただし，$a > \pi$ のとき，上の不等式を満たさない関数 u が存在する．

(1) 関数 $\overline{u} \equiv 0$ が変分問題

$$\inf_{u \in X} I[u], \quad I[u] = \int_0^a \left[(u')^2 - u^2\right]\, dx, \quad X = \left\{u \in C^2([0,a]);\ u(0) = u(a) = 0\right\}$$

の停留値を与え，ルジャンドルの条件を満たすことを示す．

(2) $I[\lambda u] = \lambda^2 I[u]\ \forall u \in X$ という斉次性を用いて，$\overline{u}$ が上記の変分問題の弱い local minimizer であることと global minimizer であることが同値であることを示す．

(3) Cauchy-Schwarz の不等式を用いて，十分小さな a に対して $|u(x)|^2 \leq \int_0^a (u'(y))^2\, dy$ が $x \in [0,a]$ について成り立ち，このような a に対して，$\overline{u}$ が変分問題の解であることを示す．

(4) 十分大きな a に対して，$I[u] < 0$ を満たす関数 $u \in X$ が存在するから，このような a に対して，$\overline{u}$ は minimizer ではないことを示す．

(5) これまでの結果より，a がある値 a^* 以上なら，$\overline{u}$ が minimizer でなくなることが予測できる．$\overline{u}$ に対するヤコビ方程式を導き，$a^* = \pi$ が共役点であることを示す．

(6) $a = \pi$ の場合に関する考察を加えて，定理の証明を完成させる．

問題 3.5 定理3.6を汎関数

$$J[u] = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}|\nabla u(\boldsymbol{x})|^2 + \frac{1}{2}u^2(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}) \right\} d\boldsymbol{x} \tag{3.11}$$

に対して拡張せよ．ただし，$f \in L^2(\Omega)$ とする．

問題 3.6 Lax-Milgram の定理を用いて，汎関数 (3.11) の最小値の存在を示せ．

問題 3.7 境界条件がつかない変分問題

$$\inf_{u\in X} J[u], \quad J[u] = \int_\Omega f(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x}), \nabla u(\boldsymbol{x}))\, d\boldsymbol{x}, \quad X = W^{1,p}(\Omega) \tag{3.12}$$

において，f が定理3.7の仮定を満たせば，最小値が存在することを示せ．

また，具体的な問題

$$n = 2, \qquad f(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}(u^2 + |\boldsymbol{\xi}|^2) - g(\boldsymbol{x})u$$

において $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が連続のとき，最小値 $\overline{u}$ が $C^2(\overline{\Omega})$ に属するならば，次を満たすことを示せ：

$$-\Delta u + u = g \quad \text{in } \Omega, \qquad \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

ただし，$\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ における Ω への単位法線ベクトルである．境界上の式をノイマン境界条件とよぶ．

4 変分構造をもつ発展問題

これまで扱ってきた汎関数をある系のエネルギーとして捉え，それに対応する運動の法則を考える．以下では基本的な運動法則を 2 種類，紹介する：エネルギーを保存する運動とエネルギーを減少させる運動である．

4.1 勾配流

エネルギーを表す汎関数が与えられたとき，ある状態からスタートするこの汎関数に対する勾配流はエネルギーをある意味で最も早く減少させる動きとして定義される．

まず，有限次元，すなわち汎関数が多変数関数 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の場合で解説する．簡単のために φ が凸な C^2-関数であるとする．関数 φ のグラフが $\mathbb{R}^n$-空間での質点の位置によるエネルギー（いわゆる energy landscape）を表しているとして，ある場所 $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ に存在する質点がどのように動けばそのエネルギーを最も早く減らすことができるかを考える．負の勾配ベクトル $-\nabla\varphi(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{x}$ において関数 φ が最も早く減少している方向をもち，勾配の大きさはその減少の度合いを表

している．よって，点 $\boldsymbol{x}^0$ から始まる関数 φ に対する勾配流

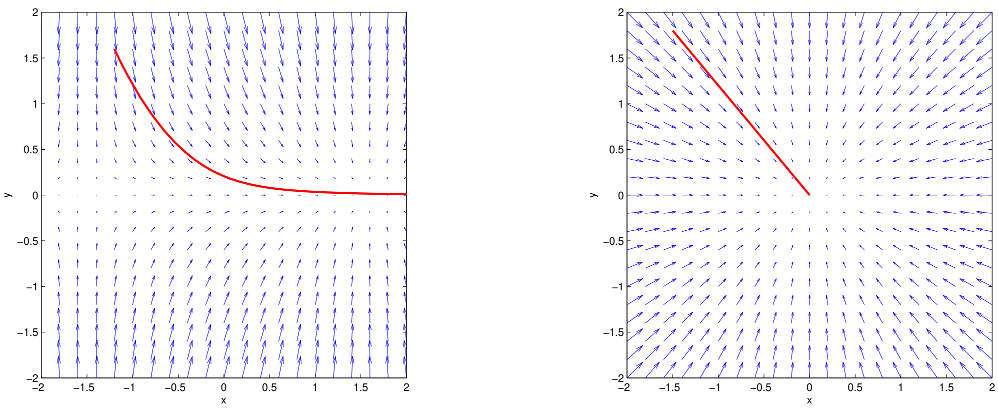
$$\boldsymbol{u} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

を次の常微分方程式に対する初期値問題の解である関数として定義するのが自然である：

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}^0) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}^0)) \qquad \forall t > 0 \tag{4.1}$$

$$u(0,\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{x}^0. \tag{4.2}$$

上記の微分方程式が n 本の式を連立させたものであることに注意する．スタート地点 $\boldsymbol{x}^0$ を固定するば，関数 $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}^0), t > 0$ は時刻 t をパラメータとする $\mathbb{R}^n$ 内の曲線を表す.



（左）関数 $y^2 - x\cos x$ の（マイナス）勾配ベクトル場とそれに沿った勾配流の経路の例

（右）以下の例で扱う関数 $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ の（マイナス）勾配ベクトル場と対応する勾配流

例 4.1 $n = 2, \varphi(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ のとき，$\varphi(x_1,x_2) = (\partial\varphi/\partial x_1, \partial\varphi/\partial x_2) = (x_1,x_2)$ だから，$-\nabla\varphi(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{u}$ となり，初期値問題は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{u}(t), \qquad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$$

として書かれる．この解は

$$\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}^0) = e^{-t}\boldsymbol{x}^0$$

となる．よって，$\varphi(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ の勾配流は初期点 $\boldsymbol{x}^0$ から原点に向かって直線上に動き，速度が指数的に減衰するような運動である．φ のグラフは原点に最小値をもつ回転放物面であることに気づけば，当然の結果である．

問題 (4.1)-(4.2) は明らかに力学系の問題である．よって，力学系の理論を適用して，その性質を調べることができる．例えば，次のことが言える．

勾配流の性質

定理 4.1 $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が C^2-級であるとする．

- (4.1) を満たす任意の $\boldsymbol{u}$ に対して，$\frac{d}{dt}(\varphi(\boldsymbol{u}(t))|_{t=0} \leq 0$ が成り立つ．等号が成立するのは，$\boldsymbol{x}^0$ が力学系 (4.1) の平衡点のときとそのときのみである．
- $\boldsymbol{x}^0$ が φ の孤立極小値ならば，$\boldsymbol{x}^0$ は (4.1) の漸近安定な平衡点である．
- $\boldsymbol{x}^\infty$ が (4.1) の軌道の ω-*limit* 点（すなわち，数列 $\{t_k\} \subset [0,\infty)$, $t_k \to \infty$ があって，(4.1) の解 $\boldsymbol{u}$ に対して $\boldsymbol{x}^\infty = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{u}(t_k)$）ならば，$\boldsymbol{x}^\infty$ は平衡点である．

Proof. （概要）

- (4.1) を満たす任意の $\boldsymbol{u}$ に対して，

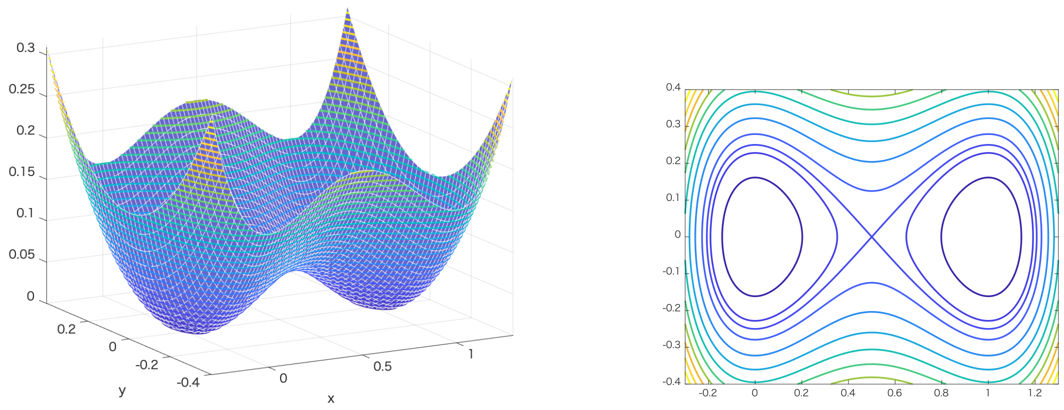
$$\frac{d}{dt}(\varphi(\boldsymbol{u}(t))|_{t=0} = \nabla\varphi(\boldsymbol{u}(t)) \cdot \boldsymbol{u}'(t)|_{t=0} = -|\nabla\varphi(\boldsymbol{u}(0))|^2 \leq 0.$$

- $V(\boldsymbol{u}) = \varphi(\boldsymbol{u}) - \varphi(\boldsymbol{x}^0)$ がある $\boldsymbol{x}^0$ の近傍 U でこの力学系の Lyapunov 関数であることに気づけばよい．つまり，V は次を満たす：
  (a) $V(\boldsymbol{x}^0) = 0$, $V(\boldsymbol{u}) > 0\ \forall \boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{x}^0$
  (b) $\nabla V(\boldsymbol{u}) \cdot (-\nabla\varphi(\boldsymbol{u})) < 0\ \forall \boldsymbol{u} \in U \setminus \{\boldsymbol{x}^0\}$
- $\alpha = \varphi(\boldsymbol{x}^\infty)$ とおけば，φ の連続性と軌道に沿って φ が減少することから $\alpha = \inf\{\varphi(\boldsymbol{u}(t)),\ t > 0\}$ が従う．これより $\boldsymbol{x}^\infty$ から始まる軌道に沿って φ が定数であることが示せる．よって，この定理の最初の主張より，$\boldsymbol{x}^\infty$ は平衡点である．

□

この定理より 2 つのシナリオしかないことがわかる：軌道が無限遠方に逃げるか，平衡点に収束するか，である．

例 4.2 $\varphi(x,y) = x^2(x-1)^2+y^2$ のとき，対応する力学系の平衡点は 3 点ある：$(0,0), (1,0), (\frac{1}{2},0)$．前者の 2 点は沈点，最後の点は鞍点である．
任意の C に対して，集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R};\ \varphi(\boldsymbol{x}) \leq C\}$ がコンパクトで，この集合に一度入った軌道は外に出ることがないので，すべての軌道が上の 3 点のどれかに収束する．
勾配流方程式の軌道が φ の等高線にすでに直交していることから，$x < \frac{1}{2}$ を満たす初期点 $\boldsymbol{x}^0 = (x,y)$ に対して，$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{u}(t) = (0,0)$，$x > \frac{1}{2}$ を満たす初期点 $\boldsymbol{x}^0 = (x,y)$ に対して，$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{u}(t) = (1,0)$，$x = \frac{1}{2}$ の直線で始まる軌道は $(\frac{1}{2},0)$ に収束する．



関数 φ のグラフとその等高線

今，多変数関数 φ の代わりにヒルベルト空間 H 上の汎関数 $F : H \to \mathbb{R}$ を考える．上と同じような勾配流を導入するには，まず汎関数の勾配を定義する．

汎関数の勾配

定義 4.2 線形作用素 $F'(v)(\cdot) : H \to \mathbb{R}$ が存在し，

$$\lim_{w \to 0, w \in H} \frac{|F(v+w) - F(v) - F'(v)(w)|}{\|w\|_H} = 0$$

が成り立つならば，この作用素を点 v における F のフレシェ*(Fréchet)* 微分と呼ぶ．

定義 4.3 汎関数 $F : H \to \mathbb{R}$ が点 $v \in H$ においてフレシェ微分可能であるとする．このとき，リースの定理より，

$$(g, w) = F'(v)(w) \qquad \forall w \in H$$

が成り立つような $g \in H$ が存在する．ただし，$(\cdot, \cdot)$ は H で定義される内積である（H の内積でなくてもかまわない）．この元 g を $\nabla F(v)$ と書き，v における F の勾配と呼ぶ．

勾配の定義は内積の取り方によって変わることが注意に値する．

例 4.3

(1) $H = \mathbb{R}^n, F = \varphi$ といった有限次元の場合，F の勾配は通常の公式

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)$$

で与えられる．

(2) ソボレフ空間 $H = W_0^{1,2}(0,1)$ で定義される汎関数 $F : W^{1,2}(0,1) \to \mathbb{R}$ を

$$F(u) = \int_0^1 \frac{1}{2}(u'(x))^2\,dx$$

で定め，L^2-内積

$$(f,g)_{L^2} = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

に関する勾配を求める．フレシェ微分は変分の計算と同様，

$$F'(v)(w) = \int_0^1 v'w'\,dx$$

となる．したがって，

$$F'(v)(w) = -\int_0^1 v''w\,dx = (-v'', w)_{L^2}$$

より，（弱い意味で）$\nabla F(v) = -v''$ であることがわかる．

(3) 次に同じソボレフ空間 $H = W_0^{1,2}(0,1)$ で同じ汎関数 F を考えるが，内積を $(W_0^{1,2})^{-1}$ の内積とする．簡単のために $H = W_0^{1,2}(0,1)$ とおくと，内積 $(f,g)_H = \int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx$ をもつヒルベルト空間で，H^{-1} は H^* のことでる．よって，$f \in H$ に線型汎関数

$$\varphi(g) = \int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx, \qquad \varphi : H \to \mathbb{R}$$

が対応する．$\varphi(g) = -(f'', g)_{L^2}$ だから，H と H^{-1} の同型写像を（弱い意味での）2 階微分として考えてもよい．H^{-1} の内積は

$$(\varphi, \psi)_{H^{-1}} = (f,g)_H$$

で定義される．ただし，φ, ψ はそれぞれ，f, g に対応する線型汎関数である．書き換えると，

$$(u,v)_{H^{-1}} = (\Delta^{-1}u, \Delta^{-1}v)_H.$$

ただし，$\Delta^{-1}u$ は $-w'' = u$ を満たす唯一の $w \in H$ のことである（2 回積分して，結果が $(0,1)$ の両端でゼロとなるよう積分定数を決めればよい）．

汎関数 F のフレシェ微分は

$$F'(v)(w) = \int_0^1 v'w'\,dx = (v,w)_H.$$

H^{-1}-内積に関する勾配は $(\nabla F(v), w)_{H^{-1}} = F'(v)(w)$ を満たす $\nabla F(v)$ であるので，これを書いて，2 回部分積分を施すと，

$$(\nabla F(v), w)_{H^{-1}} = (\Delta^{-1}(\nabla F(v)), \Delta^{-1}w)_H = (\Delta^{-2}(\nabla F(v)), w)_H = (v,w)_H$$

を得るので，$\nabla F(v) = v''''$（4 階微分）となる．

勾配流の定義

定義 4.4 ヒルベルト空間 H の元 u_0 から始まる，汎関数 $F : H \to \mathbb{R}$ に対する勾配流 $u : \mathbb{R} \times H \to H$ は次の条件を満たす関数として定義する：

$$\frac{d}{dt}u(t, u_0) = -\nabla F(u(t, u_0)), \qquad u(0, u_0) = u_0.$$

例 4.4 $u_0 \in W_0^{1,2}(0,1)$ が与えられたとき，最後の例で調べた汎関数

$$F(u) = \int_0^1 \frac{1}{2}(u'(x))^2\,dx \ \ : \ W^{1,2}(0,1) \to \mathbb{R}$$

に対する勾配流 $u(t)$ は各 $t > 0$ に対して $W_0^{1,2}(0,1)$ の元，つまり x の関数であるので，それを $u(t,x)$ と書くと，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), \qquad t > 0, x \in (0,1)\\
&u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in (0,1)\\
&u(t,x)|_{x\in\{0,1\}} = 0, \qquad t > 0
\end{aligned}$$

で決まる．これは熱方程式である．区間 $(0,1)$ を占めるはりがねが初期温度 $u_0(x)$ を与えられたとき，温度の時間変化を表すモデル方程式である．このときエネルギーが減少することが以下の形式的な計算よりわかる：

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{1}{2}(u'(t,x))^2\,dx = \int_0^1 u'u_t'\,dx = -\int_0^1 u''u_t\,dx + u'u_t\big|_{x=0}^1 = -\int_0^1 (u_t)^2\,dx < 0.$$

境界での $u'u_t$ の値が消えるのは，例えば，時間に依存しない Dirichlet 境界条件や斉次 Neumann 境界条件のときである．

例 4.5 $\mathbb{R}^d$ における向きづけ可能な超曲面の空間 $\mathcal{M}$ の接空間をすべての法線速度の空間

$$T_\Gamma\mathcal{M} = \{V : \Gamma \to \mathbb{R}\}, \qquad \Gamma \in \mathcal{M}$$

として定義する．つまり，Γ への単位法線ベクトル ν に対して，V は $\zeta \cdot \nu = V$ on Γ を満たすベクトル場 $\zeta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ に対応する．このとき，$\Gamma \in \mathcal{M}$ の摂動を $\Gamma_t = \{x + t\zeta(x);\ x \in \Gamma\}$ と定義できる．$T_\Gamma\mathcal{M}$ の内積を

$$(f,g) = \int_\Gamma fg\,d\mathcal{H}^{d-1}, \qquad f,g \in T_\Gamma\mathcal{M}$$

で定義したとき，「$J[\Gamma] = \Gamma$ の $(d-1)$-次元ルベーグ測度」（3 次元では Γ の面積，2 次元では Γ

の長さ）という汎関数の勾配は Γ の平均曲率であり，勾配流は「法線速度がマイナス平均曲率に等しい」という平均曲率流であることを $d=2$（具体的には，平面内の閉曲線）の場合に示す．

曲線 $\Gamma \in \mathcal{M}$ を媒介変数 s を用いて，

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = \gamma_1(s), y = \gamma_2(s),\ s \in [0,\ell]\}$$

のように表す．閉曲線としているので，$s = 0, \ell$ で周期条件を想定している．
$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ とおくとと，長さ汎関数は

$$J[\Gamma] = \int_0^\ell |\gamma'(s)|\, ds$$

である．J の方向微分を計算するには，Γ を曲線の one-parameter family に埋め込む必要がある．そのため，任意の滑らかなベクトル場 $\zeta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ をとり，$\Gamma_t = \{x + t\zeta(x);\ x \in \Gamma\}$ と定義する．$\phi(s) := \zeta(\gamma(s))$ とおく．今，J の ζ-方向の Γ における方向微分は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J[\Gamma_t]\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\int_0^\ell |\gamma'(s) + t(\zeta(\gamma(s)))'|\, ds\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\int_0^\ell |\gamma'(s) + t\phi'(s)|\, ds\Big|_{t=0} \\
&= \int_0^\ell \frac{\gamma'(s)\cdot\phi'(s) + \frac{t}{2}|\phi'(s)|^2}{|\gamma'(s) + t\phi'(s)|}\, ds\Big|_{t=0} \\
&= \int_0^\ell \frac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|}\cdot\phi'(s)\, ds \\
&= -\int_0^\ell \left(\frac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|}\right)'\cdot\phi(s)\, ds.
\end{aligned}$$

ただし，最後の等式で部分積分を施し，ϕ にかかっている微分をそれ以外の項に移した．$\gamma'/|\gamma'|$ が単位接線ベクトルだから，Frenet-Serret の公式より $\left(\frac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|}\right)' = -\kappa(s)\nu(s)$. ここで，$\kappa$ は曲率で，ν は外向き単位法線ベクトルである．よって，

$$\frac{d}{dt}J[\Gamma_t]\Big|_{t=0} = \int_\Gamma \kappa(\zeta\cdot\nu)\, ds.$$

この方向微分はベクトル場 ζ の Γ 上の法線方向の成分にしかよらないので，$g \in T_\Gamma\mathcal{M}$ に対して J の Fréchet 微分を

$$J'[\Gamma](g) = \int_\Gamma \kappa g\, ds$$

と書くことができる．もう少し正確に書くと，J を $T_\Gamma\mathcal{M}$ 上の汎関数として，

$$J[f] = \int_0^\ell |\gamma'(s) + [f(\gamma(s))\nu_\Gamma(s)]'|\, ds$$

と定義すれば，上記の Fréchet 微分 $J' : T_\Gamma\mathcal{M}\times T_\Gamma\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ は $J'[0](g)$ に相当する．ここで，ν_Γ は Γ の単位法線ベクトルである．

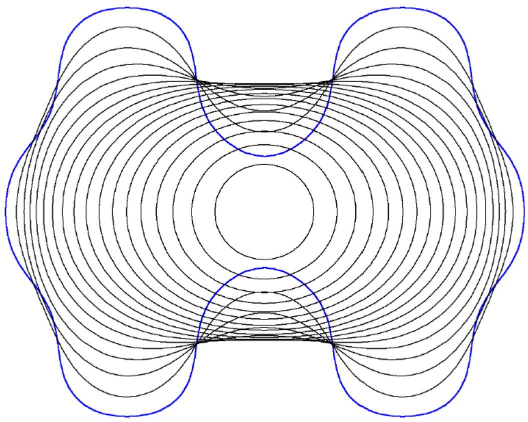
J の勾配 $\nabla_{\mathcal{M}} J$ は

$$\int_\Gamma \nabla_{\mathcal{M}} J[\Gamma] g\, ds = (\nabla_{\mathcal{M}} J[\Gamma], g) = J'[\Gamma](g) = \int_\Gamma \kappa g\, ds \qquad \forall g \in T_\Gamma \mathcal{M}$$

で定義されるので，$\nabla_{\mathcal{M}} J[\Gamma = \kappa$ を得る．

$\gamma(t,s)$ で表現される曲線族 Γ_t が J の勾配流であるとは，時間 t を止めたときの速度 $d\gamma/dt$ の法線成分が Γ_t における J のマイナス勾配，すなわち，曲率であることを意味する．つまり，

$$\frac{d\gamma}{dt}(t,s) \cdot \nu_{\Gamma_t}(s) = -\kappa_{\Gamma_t}(s) \qquad \text{または} \qquad \frac{d\gamma}{dt}(t,s) = -\kappa_{\Gamma_t}(s) \nu_{\Gamma_t}(s).$$



曲線の曲率流の例（青い曲線は初期値）

一般的には勾配流は細かい変化を無視した，時間の長いスケールで見た運動のモデルとして解釈できる．例えば，弦の振動の場合は，強い抵抗による減衰を表していると言える．一方では，エネルギーを保存する運動である振動は次節で紹介するアプローチから得られる．

4.2　ハミルトンの原理

束縛力（拘束条件）を除いて，すべての力がポテンシャルをもつような系を考える．この系の全運動エネルギーを K，全ポテンシャル・エネルギーを V とおくと，

$$L = K - V$$

という量は系のラグランジュ関数（ラグランジアン）と呼ぶ．また，それをある時刻 t_1 から他の時刻 t_2 まで積分した量

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

を作用積分（action integral）と呼ぶ．

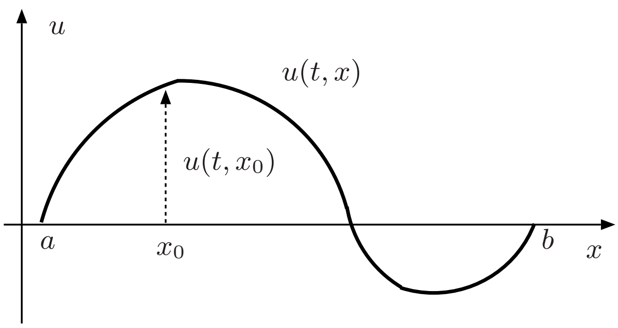
ハミルトンの原理

系が行う運動は作用積分の停留値を与えるものである．

この原理より求めたい未知関数（例えば，弦の形状を表す関数）は時間に依存するものだから，停留値を与えるものがあれば，それが t_1 と t_2 の間の運動を表していることになる．

例 4.6 ニュートンの第 2 法則に基づいて運動方程式を導く例を挙げる．そのあと，ハミルトンの原理からの導出を紹介する．両端を固定した弦の振動を表す方程式を以下の仮定のもとで導出する．

1. 弦の運動はある平面に限られる（以下それを xy-平面とする）
2. 弦の各部分は x 軸と垂直な方向にのみ動く（横波）
3. 弦は一様な線密度 ρ を持つ
4. 弦の張力 T は運動の間一定で，弦の接線方向に働く
5. 弦と x 軸とが成す角度 θ は微小である



振動する弦の問題の設定

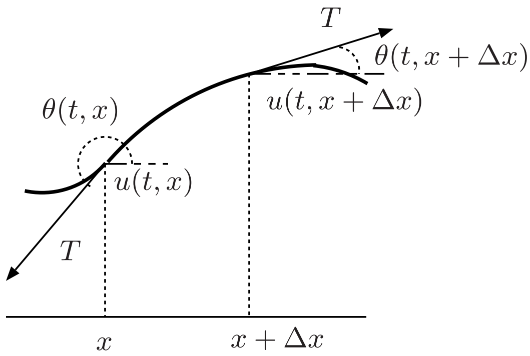
従って，次の設定である：

独立変数 (independent variable)	:	時刻 t，1 次元の位置座標 x
未知関数 (unknown function)	:	弦上の点 x の時刻 t での垂直方向の変位 $u(t,x)$

弦の微小部分 $[x, x+\Delta x]$ の運動を考え，**Newton の第二法則** $F = ma$ を適用する．このとき，微小部分の質量は $m = \rho\Delta x$ となり，その加速度は $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)$ となる．また，部分に働く外力 F は，左右両端における張力の垂直方向の成分の合計である：

$$F = T\sin\{\theta(t, x+\Delta x)\} + T\sin\{\theta(t,x)\}$$

ここで，5. の仮定を用いて，$\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta = \pm\frac{\partial u}{\partial x}$ を得る．



弦の微小部分に働く力

従って，張力が働く方向を考慮すると，

$$F = T\frac{\partial u}{\partial x}(t, x+\Delta x) - T\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$$

以上により，微小部分に対する Newton の運動方程式は

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = T\frac{\partial u}{\partial x}(t, x+\Delta x) - T\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$$

となる．この両辺を Δx で割り，$\Delta x \to 0$ とすれば，

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$$

という偏微分方程式が得られた．定数 $c = \sqrt{T/\rho}$ を導入して，上式は

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{または} \qquad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

の形に書かれ，**空間 1 次元の波動方程式** (wave equation) と呼ばれる．

次に弦の振動方程式をハミルトンの原理より導出する．弦の微小部分の運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ より，$\frac{1}{2}\rho\Delta x(\frac{\partial u}{\partial t})^2$ となるので，

$$K(u) = \int_a^b \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx$$

と書ける．また，弦のポテンシャル・エネルギーとして弾性エネルギー（の近似）

$$V(u) = \int_a^b \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

を採用する．よって，作用積分は

$$A(u) = \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \left\{ \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \right)^2 - \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \right)^2 \right\} dx\, dt$$

となる．

作用積分は時間 t と空間 x の 2 変数関数を $\mathbb{R}$ へ写す汎関数で，その停留値を以前と同様に，「変分がゼロ」という条件より求める．詳しい関数空間の設定を省略して形式的に計算する．t と x の関数である試験関数 $\varphi(t,x)$ を，時刻 t_1 と時刻 t_2 の近傍，そして両端 a, b の近傍で消えるように選ぶ．すると，

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} A(u + \varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \left\{ \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - T \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} dx\, dt$$

を得るが，ここで t と x それぞれについて部分積分を施し，試験関数の選び方より境界上の値がゼロになることに注意すると，

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \left\{ -\rho \frac{\partial u^2}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \varphi\, dx\, dt$$

に変形される．$(t_1, t_2) \times (a, b)$ の内側では φ が任意だから，この領域において上と同じ波動方程式が成り立つことを導いた．初期条件と境界条件は別途，現象の物理的な性質より指定する．

波動方程式の解が全エネルギー

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(\rho u_t^2 + T u_x^2 \right) dx$$

を時間と共に保存することを以下の計算で確かめる：

$$\frac{d}{dt} E(u) = \int_a^b \left(\rho u_t u_{tt} + T u_x u_{xt} \right) dx = \int_a^b \left(\rho u_{tt} - T u_{xx} \right) u_t\, dx + u_x u_t \big|_{x=a}^{b} = 0.$$

境界での $u_x u_t$ の値が消えるのは時間に依存しない Dirichlet 境界条件や斉次 Neumann 境界条件のときである．

4.3　距離空間における勾配流

上で見たように，$\mathbb{R}^n$ における勾配流は多様体上の勾配流や ヒルベルト空間上の勾配流に拡張できて，それに対する理論も存在する．これを動機に，一般の距離空間への拡張を試みる研究が始まり，距離空間での理論も発達した．純粋に数学的な興味もあるが，微分できない汎関数を扱う必要性や，現象のモデルとしてあらわれる方程式の多くが適切な距離での勾配流として表せる（例えば，反応移流拡散方程式系はエントロピー汎関数の Wasserstein 距離についての勾配流である）ことで変分構造の利点が利用できることから注目され，2010 年の C.Villani のフィールズ賞で

は距離空間における勾配流の解析の成果も評価された．

距離空間と違って，ヒルベルトやバナッハ空間では空間の線形構造を用いて勾配流の定義式

$$u'(t) = -\nabla\phi(u(t)), \qquad t \in J \tag{4.3}$$

に現れる微分 $u'(t)$ が定義できる．距離空間 X に拡張するには，上の微分方程式が

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)-z\|^2 + \phi(u(t)) \le \phi(z) \qquad \forall z \in X$$

と同値であることに注目して，$\|u(t)-z\|$ を距離 $d(u(t),z)$ で置き換える．

この拡張の過程を $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の有限次元のケースで見てみよう．ただし，ϕ は微分可能で，$\nabla\phi$ が Lipschitz 連続であると仮定する．

(A) $\nabla\phi$ が quasi-monotone であることに注意する．Hilbert 空間 H での写像 $A : D(A) \subset H \to H$ が quasi-monotone であるとは，$\alpha \in \mathbb{R}$ があって，

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \ge \alpha|x-y|^2 \qquad \forall x, y \in D(A)$$

が成り立つという意味である．ここで，$D(A)$ は A の定義域（domain）である．$\nabla\phi$ が Lipschitz だから，Lipschitz 係数を L とすれば，

$$\langle \nabla\phi(x) - \nabla\phi(y), x - y\rangle \ge -|\nabla\phi(x) - \nabla\phi(y)|\,|x-y| \ge -L|x-y|^2$$

が成立し，$\alpha = L$ について ϕ は quasi-monotone である．

(B) 次に，ϕ が quasi-convex であることに注意する．つまり，$e(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ と定義すれば，$\psi = \phi - \alpha e$ が凸であるような α が存在する．実際，(A) と同様に $\alpha = L$ とすれば，$\nabla\psi(x) = \nabla\phi(x) - \alpha x$ が monotone である（つまり，$\alpha = 0$ について quasi-monotone である）から，凸性の定義から ψ が凸であることが示される．

(C) $\nabla\psi(x)$ は ψ の x における subgradient である，という事実を示す．実際，

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{1}{t}\left[\psi(x+th) - \psi(x)\right] = \langle\nabla\psi(x), h\rangle, \qquad h \in \mathbb{R}^n$$

が成り立つが，ψ が凸なので $t \mapsto \psi(x+th)$ も凸関数で，$[\cdot]$ の中の量は t の非減少関数である．とくに，$t = 1$ をとると，

$$\psi(x+h) - \psi(x) \ge \langle\nabla\psi(x), h\rangle, \qquad h \in \mathbb{R}^n$$

を得る．$z = x + h, y = \nabla\psi(x)$ と置き直すと，

$$\psi(z) \ge \psi(x) + \langle y, z - x\rangle, \qquad z \in \mathbb{R}^n$$

という式になる．この式を満たす $y \in \mathbb{R}^n$ は ψ の x における subgradient と呼ばれる．ψ が微分可能なこの場合は subgradient が一意に決まる．

(D) 今，勾配流の定義式 (4.3) は

$$-u'(t) - \alpha u(t) = \nabla\psi(u(t)), \qquad t \in J$$

と同値である．(C) の結果と合わせると，

$$\langle -u'(t) - \alpha u(t), z - u(t)\rangle + \psi(u(t)) \le \psi(z) \qquad \forall x, z \in \mathbb{R}^n,\ \forall t \in J$$

これをノルムを用いて書き直す．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|u(t) - z|^2\right) + \alpha|u(t)|^2 - \alpha\langle u(t), z\rangle + \phi(u(t)) - \frac{\alpha}{2}|u(t)|^2 \le \phi(z) - \frac{\alpha}{2}|z|^2$$

整理して，ノルムを距離で置き換えると，

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}d^2(u(t), z) + \frac{\alpha}{2}d^2(u(t), z) + \phi(u(t)) \le \phi(z).$$

これは先ほど予告した勾配流の別の定義式である．

(E) さらに，$u(t)$ にかかっている部分を外すために，試験関数 $\eta \in C_0^\infty(J)$ をかけて，J で積分すれば，

$$-\int_J \frac{1}{2}d^2(u(t), z)\eta'(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_J d^2(u(t), z)\eta(t)\,dt \le \int_J [\phi(z) - \phi(u(t))]\eta(t)\,dt \tag{4.4}$$

を得る．$(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ を一般の距離空間 (X, d) で置き換えても，$\phi \in C(X, \mathbb{R})$, $u \in C(J, X)$ でさえあれば，この不等式は意味をもつ．

例 4.7 熱方程式の例を取り上げる．

$$\phi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,d\boldsymbol{x}, & u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする．初期値 $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が $\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|^2\,d\boldsymbol{x} < \infty$ を満たすなら，

$$\begin{aligned} v_t(t, x) &= \Delta v(t, \boldsymbol{x}), && t > 0, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \\ v(0, x) &= u_0(\boldsymbol{x}), && \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

の解 $v(t, \boldsymbol{x})$ に対して $u(t)(\boldsymbol{x}) = v(t, \boldsymbol{x})$ は

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}d^2(u(t), z) \le \phi(z) - \phi(u(t)), \qquad t > 0,\ \forall z \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$$

を満たす．ここで，$d^2(u, z) = \int_{\mathbb{R}^n}(u - z)^2\,dx$ という L^2 の距離を意味する．

距離空間での勾配流を定義する準備ができた．

距離空間での勾配流

定義 4.5 (X,d) を距離空間，$\phi : X \to (-\infty,+\infty]$ を *proper* な（つまり，恒等的に $+\infty$ でない）写像，$\alpha \in \mathbb{R}$ とする．$u : J \to X$ は (ϕ,α) に対する (X,d) での勾配流であるとは，u は

(i) $u \in C(J,X)$

(ii) $\phi(u) \in L^1_{loc}(J)$

(iii) *(4.4)* がすべての $z \in X$ とすべての $\eta \in C_0^\infty(J)$ について満たされる

という条件を満足するという意味である．

勾配流の一意性は次の事実から従う：$u,v : J \to X$ が (ϕ,α) に対する勾配流のとき

$$d(u(t),v(t)) \le e^{-\alpha(t-s)}d(u(s),v(s)) \qquad \forall s,t \in J,\ s<t.$$

よって，存在の問題に集中し，ヒルベルト空間の設定のみではあるが，汎関数 ϕ に対してできるだけ弱い仮定をおく．

ヒルベルト空間での存在

定理 4.6 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ を *Hilbert* 空間，$\phi : X \to (-\infty,+\infty]$ を次の条件を満たす *proper* な汎関数とする：

- ϕ は *lower semicontinuous*（下半連続），つまり，すべての $c \in \mathbb{R}$ について $\{x \in X; \phi(x) \le c\}$ は閉集合である（$\phi(x_0) \le \liminf_{x\to x_0}\phi(x)$ でも定義できる）
- $\psi = \phi - \alpha e$ が凸であるような $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在する（つまり，$D(\phi) \subset X$ は凸集合で，$\psi|_{D(\phi)}$ は凸）．ただし，$e(x) = \frac{1}{2}|x|^2$．

このとき，任意の $x \in D(\phi)$ に対して，x から始まる (ϕ,α) に関する勾配流 $u : (0,\infty) \to X$ が存在する．

Proof. （概要）ψ の劣微分 $\partial\psi(x)$ を subgradient の集合，すなわち，

$$\partial\psi(x) = \{x \in X; \langle y, z-x\rangle + \psi(x) \le \psi(z)\ \ \forall z \in D(\psi)\}$$

で定義する．例えば，$f(u) = |u|$ の劣微分は以下で与えられる：

$$\partial f(u) = \begin{cases} \{+1\}, & u>0 \\ [-1,1], & u=0 \\ \{-1\}, & u<0 \end{cases}.$$

基本的には

$$-u'(t)-\alpha u(t)\in\partial\psi(u(t)),\qquad t>0 \tag{4.5}$$

を示せばよい．つぎの補題で $\partial\psi$ の性質を述べる．

Lemma. $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ の Hilbert 空間における proper な汎関数 $\psi:X\to(-\infty,+\infty]$ が lower semicontinuous で凸ならば，$\partial\psi$ は cyclically monotone，そして $(X,|\cdot|)$ において m-accretive である．

定義 4.7

- *X は Hilbert 空間．$A\subset X\times X$ は monotone であるとは*

$$\forall(x_i,y_i)\in A, i=1,2 \qquad \langle y_2-y_1,x_2-x_1\rangle\geq 0$$

- *$A\subset X\times X$ は cyclically monotone であるとは*

$$\begin{aligned}\forall\{x_0,x_1,\dots,x_N=x_0\},\{y_1,\dots,y_N\}\ \textit{such that}\ (x_i,y_i)\in A, i=1,\dots,N\\ \sum_{i=1}^{N}\langle y_i,x_i-x_{i-1}\rangle\geq 0\end{aligned}$$

- *$(X,\|\cdot\|)$ は Banach 空間．$A\subset X\times X$ は accretive である（または $-A$ は dissipative（消散作用素）である）とは*

$$\|x_1-x_2\|\leq\|x_1-x_2+h(y_1-y_2)\|\qquad\forall(x_i,y_i)\in A,\ i=1,2,\quad\forall h>0$$

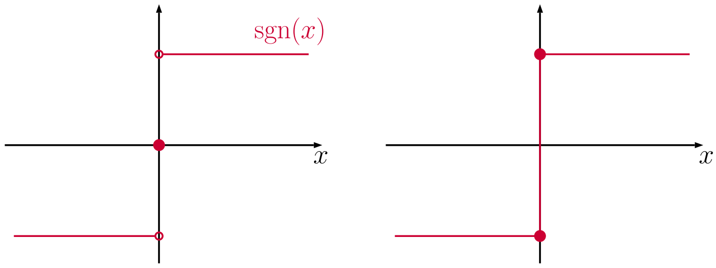
- *$A\subset X\times X$ は m-accretive であるとは，A は accretive で*

$$R(I+hA)=X\qquad\forall h>0.$$

  ここで，I は恒等写像のグラフ $\{(x,x),x\in X\}$ で $R(I+hA)=\{y\in X;\exists x\in D(A)\ \textit{such that}\ (x,y)\in I+hA\}$．また，$D(A)=\{x\in X;\ \exists y\in X\ \textit{such that}\ (x,y)\in A\}$.

上の定義では A は $X\times X$ の部分集合となっているが，イメージとしては作用素の”グラフ”を念頭においている．ただし，作用素の「値」は一つの元ではなく集合である場合も許される．具体的には，$A=\{(x,y);\ x\in X,y\in\partial\psi(x)\}$.

例 4.8　$f(x)=\mathrm{sgn}(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ のグラフ（下図・左）は monotone であるが，m-accretive ではない（$x+\mathrm{sgn}(x)$ は $\mathbb{R}$ への全射ではないから）．一方で，図の右側で示している集合 $A=\{(x,-1);\ x<0\}\cup\{(0,y);\ -1\leq y\leq 1\}\cup\{(x,+1);\ x>0\}$ は monotone で m-accretive である．



$A := \partial\psi + \alpha I$ とおけば，式 (4.5) は

$$-u'(t) \in A(u(t)), \qquad t \in J$$

と書き換えられる．そこで，Crandall-Liggett の定理（[4]，[10] の解説も参照）の仮定が満たされるから，この定理を適用できる．この定理により，

$$J_h x = (I + hA)^{-1}x, \qquad x \in X,\ \ h \in I_\alpha := \begin{cases} (0,\infty), & \alpha \geq 0 \\ (0, \frac{1}{|\alpha|}), & \alpha < 0 \end{cases}$$

に対して，

$$S(t)x := \lim_{n\to\infty} \left(J_{t/n}\right)^n x, \qquad x \in \overline{D(A)}$$

が $t > 0$ で存在して，$S(0+) = x$ を満たし，$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ は $\overline{D(A)}$ 上の作用素半群を定義する．そして，$u(t)(x) = S(t)x$ は $-u'(t) \in Au(t)$ を満たす．あとは上記の (E) のように進める． □

Crandall-Liggett の定理のアイデアは基本的にオイラー法の適用である．実際 $x = u(0)$ と小さい $t > 0$ に対してオイラー法を記すと，

$$-\frac{u(t) - u(0)}{t} = Au(t)$$

となり，整理すれば $x = u(t) + tAu(t)$，つまり $u(t) = (I + tA)^{-1}x$ で，これを反復させればよい．

ヒルベルト空間ではなく，距離空間のみの場合，$J_h x$ を

$$\Phi(h, x; y) = \begin{cases} \frac{1}{2h} d^2(x,y) + \phi(y), & y \in D(\phi) \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

のただ一つの最小値 y として定義する．勾配流理論についての詳しい解説は [2] を参照するとよい．

熱方程式の場合は内積が L^2 の内積だったから，Φ を書いてみると，

$$\Phi(h, u; u_{k-1}) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|u(\boldsymbol{x}) - u_{k-1}(\boldsymbol{x})|^2}{2h} + \frac{1}{2}|\nabla u(\boldsymbol{x})|^2 \right) d\boldsymbol{x}, & u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる．これはいわゆる離散勾配流という近似法につながる．この方法はよく知られているが，双

曲型の問題に対しても同様な方法が提案できるということはあまり知られていない．

References

[1] 岡崎 誠，べんりな変分原理，共立出版，1993.

[2] L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Birkhäuser, 2008.

[3] F. Clarke: Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control, Springer, 2013.

[4] M.G. Crandall, T.M. Liggett, *Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces*, Amer. J. Math. 93, pp. 265-298, 1971.

[5] R. Cristoferi, *Calculus of Variations, lecture notes*, 2016
(URL: https://www.math.cmu.edu/cna/Publications/publications2016/papers/16-CNA-007.pdf)

[6] Bernard Dacorogna, *Introduction to the Calculus of Variations*, Imperial College Press, 2015.

[7] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, AMS, Providence, Rhode Island, 1998.

[8] M. Foss, W. J. Hrusa, V. J. Mizel, *The Lavrentiev gap phenomenon in nonlinear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. 167, pp. 337–365, 2003.

[9] Mark Kot, *A First Course in the Calculus of Variations*, American Mathematical Society, 2014.

[10] J.H. Shapiro, http://joelshapiro.org/Pubvit/Downloads/rulla_crandlig.pdf