基礎数学からの展開：講義ノート

Karel Švadlenka
2016 年

偏微分方程式と変分法（第1回）

概要

この講義では，1 変数関数という最も簡単な場合を例にとり，変分法の考え方を説明する．とくに，2 点を最短時間で結ぶ経路の形状を求める問題を考える．このとき,「移動に必要な時間を最小にする」という最適化問題がある微分方程式（いわゆるオイラー・ラグランジュ方程式）と結びつくことを確認する．様々な自然現象に対して同じような方法で，それらの現象を表現する「モデル方程式」を導くことができ，微分方程式が得られることが多い．そのような微分方程式の例と応用をスライド形式で紹介する．

この講義ノートに書かれている内容より詳しく知りたいかたは，参考文献に挙げている [1] から勉強を始めるとよい．

[2]-[5] の本はより正確な解説があるが，理解には高学年で扱われる高度な数学が必要である．

参考文献をお勧めの順で並べた．

応用数学という分野では，研究の対象である自然現象について数学的なモデルを立て，このモデルに関する数学的な知見を活かすことにより，実験や観察では得られないような現象のより深い理解を目指す．この講義では，物理現象のモデリングにおいてよく使われる変分法の考え方を，例を挙げながら紹介する．変分法では，系のエネルギーなどの量に対する「最適化」問題とそれに対応する偏微分方程式に関係があることを利用するので，代表的な問題においてこの関係がどのようなものになっているか説明し，解の存在・一意性・正則性などの数学的に興味深い側面についてもコメントする．

1.1 最速降下曲線

重力場のなかの質点の運動を考える．空気などの摩擦がないとする．目標は，平面上の 2 点 $[0,0]$ と $[a,b]$ を結ぶ経路に沿って質点が動くとき，点 $[0,0]$ から点 $[a,b]$ まで最短の時間でたどりつくような経路を求めることである．

x 軸と y 軸の位置と向きを下図のように設定する．つまり，x 軸は垂直方向にあり，正の方向が下に向いているようにとる．また，y 軸は水平方向にあり，正の方向が右に向いているようにとる．そうすれば，質点が重力だけで $[0,0]$ から $[a,b]$ まで移動できるには，$a>0$ を仮定しなければならない．一般性を失わずに，b についても $b>0$ と仮定してもよい．

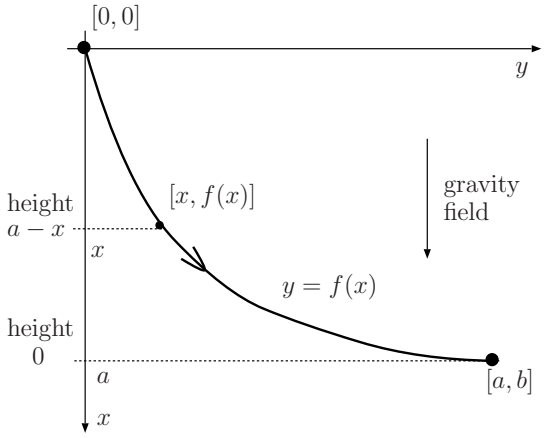

図 1：最速降下曲線問題の設定

求める経路の形状を関数 $f(x)$ のグラフとして表現できると仮定する．質点が点 $[0,0]$ から初期速度 0 で動き始めるとすると，高さ $a-x$ における質点の速度 $v(x)$ をエネルギー保存則より計算できる：

$$\tfrac{1}{2}mv^2(x) + mg(a-x) = mga$$

ここで m は質量で，式の左辺は高さ $a-x$ における質点の運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの合計を表し，右辺は初期のポテンシャル・エネルギーを表している．この関係式より

$$v(x) = \sqrt{2gx} \tag{1.1}$$

が得られる．

次に，質点が曲線 f 上を動くということを用いて，速度の異なる表現方法を考える．質点が動いた距離 $s(x)$ は点 $[0,0]$ と点 $[x, f(x)]$ を結ぶ曲線 f の長さに等しい：

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (f'(\xi))^2}\, d\xi.$$

よって，$f \in C^1[0,a]$ を仮定すると，$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt}$ という関係より

$$v(x) = \frac{ds}{dx}(x)\frac{dx}{dt} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\frac{dx}{dt}$$

が得られ，式 (1.1) より

$$\sqrt{2gx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\frac{dx}{dt} \tag{1.2}$$

が従う．ただし，ここで $x(t)$ を「質点の時刻 t におけるスタート地点からの垂直方向の距離」のように，時刻 t の関数として解釈する．

課題はゴール地点にたどりつくのに必要な時間を最小にすることであるから，この時間の式を具体的に書かなければならない．これはちょうど関数 $x(t)$ の逆関数に当たる．式 (1.2) と逆関数

の微分の性質より

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1+(f'(x))^2}}{\sqrt{2gx}}$$

が分かる．この等式を積分すれば，質点が曲線 f に沿って動くときに高さ $a-x$ に到着するために必要な時間が求まる：

$$t(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{1+(f'(\xi))^2}}{\sqrt{2g\xi}}\,d\xi.$$

興味のある量は，高さ 0 のときの時間，すなわち，$T_1 = t(a)$ である．点 $[a,b]$ が与えられたとき，$T_1 = t(a)$ は経路 f の形にしか依存しない量であるので，これを $T_1(f)$ と書くことにする．

従って，質点が最短時間で点 $[a,b]$ にたどりつくような曲線を求める問題は以下の問題に変形された．

最小化問題 1

$$f(0)=0,\ f(a)=b \quad \text{をみたす関数のなかで}$$

$$T_1(f) = \int_0^a \frac{\sqrt{1+(f'(x))^2}}{\sqrt{2gx}}\,dx \quad \text{の最小値を与える関数} \quad f \in C^1([0,a]) \quad \text{を見つけよ．}$$

上の設定では，T_1 は C^1 関数を引数にとって，実数値を与える写像である（$T_1 : C^1([0,a]) \to \mathbb{R}$）が，このような写像のことを **汎関数** という．関数空間として簡単のために C^1 をとったが，あとで明らかになるように，これは最適な空間ではない．

条件 $f(a)=b$ を満たす二つの関数 f_1, f_2 があれば，その和 f_1+f_2 は同じ条件を満たさないという意味で，この条件は線形空間を定義しないので，なにかと不便である．そのため，$g(x) = f(x) - \frac{b}{a}x$ という変換を施す．さらに，T_1 を定数倍しても最小化の結果に影響がないので，$\sqrt{2g}$ をかけておく．すると，問題は次のように書き換えられる．

最小化問題 2

$$\min_{g\in Y} T(g), \qquad T(g) = \int_0^a \frac{\sqrt{1+(g'(x)+\frac{b}{a})^2}}{\sqrt{x}}\,dx$$

ここで，Y は線形空間 $Y = \{g \in C^1([0,a]),\ g(0)=g(a)=0\}$ である．

この問題の解となる曲線を **最速降下曲線** (brachistochrone curve) とよぶ．英語名はギリシャ語の *brachistos*（最短）と *chronos*（時間）からきている．実は，後でわかるように，この曲線はサイクロイドと一致する．

最小化問題を解く方法の一つは，汎関数 T の **第一変分** を計算する方法がある．第一変分は微分のようなものであるが，ここでは T は関数の関数で，関数について「微分」することになり，

通常の微分と区別するために，別の呼び方を使うようになった．普通の関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の最小値を求めるときに，まず微分 $f'(x)$ がゼロになるような点 x を計算しておく考え方と一緒である．

変分を計算するために，まず関数 $\varphi\in C_0^\infty(0,a)$ を任意に選ぶ．この記号は φ が無限回微分可能で境界点 0 と a の近傍で 0 になるという意味で，このような関数を **試験関数** とよぶ．関数 $g+\varepsilon\varphi$ は全ての $\varepsilon\in\mathbb{R}$ に対し Y に属するので，不等式

$$T(g)\le T(g+\varepsilon\varphi)\qquad\forall\varepsilon\in\mathbb{R}\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(0,a)$$

が成り立ち，$T(g+\varepsilon\varphi)$ の最小値が $\varepsilon=0$ において得られることがわかる．これは 1 変数 ε の関数に関する主張で，この関数が微分可能であれば，

$$\frac{d}{d\varepsilon}T(g+\varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0}=0.$$

さて，

$$T(g+\varepsilon\varphi)=\int_0^a\frac{\sqrt{1+(g'(x)+\varepsilon\varphi'(x)+\frac{b}{a})^2}}{\sqrt{x}}\,dx$$

より

$$\frac{d}{d\varepsilon}T(g+\varepsilon\varphi)=\int_0^a\frac{2\big(g'(x)+\varepsilon\varphi'(x)+\frac{b}{a}\big)\varphi'(x)}{2\sqrt{x}\sqrt{1+(g'(x)+\varepsilon\varphi'(x)+\frac{b}{a})^2}}\,dx$$

と計算できる．従って，部分積分を適用し，もとの関数 f に戻すと，

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}T(g+\varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0}&=\int_0^a\frac{f'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1+(f'(x))^2}}\varphi'(x)\,dx\\&=-\int_0^a\Big(\frac{f'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1+(f'(x))^2}}\Big)'\varphi(x)\,dx\\&=0.\end{aligned}$$

上の式は全ての $\varphi\in C_0^\infty(0,a)$ に対して成り立つので，以下の方程式を得る（問題 1.1 を参照）：

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\right)'=0\qquad\forall x\in(0,a).\tag{1.3}$$

この関係式を **オイラー・ラグランジュ方程式** とよぶ．これまでの議論をまとめると，滑らかな汎関数の最小値が存在すれば，最小値を与える最小化関数が微分方程式であるオイラー・ラグランジュ方程式を満たすことを示した．逆に，オイラー・ラグランジュ方程式の解が対応する汎関数の最小化関数であることが示せる場合があり，そのときは二つの問題（最小化問題と微分方程式の境界値問題）が同値になる．

方程式 (1.3) は次のように積分できる．

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} &= \sqrt{C}, \qquad C>0 \text{ 積分定数 } (b>0 \text{ より } f'>0 \text{ を推測}) \\
\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} &= \sqrt{Cx} \\
\frac{(f'(x))^2}{1+(f'(x))^2} &= Cx \\
f'(x) &= \sqrt{\frac{Cx}{1-Cx}} \\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{Cx(1-Cx)}} - \frac{1-2Cx}{2\sqrt{Cx(1-Cx)}} \\
f(x) &= \frac{1}{C}\left[\arctan\sqrt{\frac{Cx}{1-Cx}} - \sqrt{Cx(1-Cx)}\right] + C_2
\end{aligned}
$$

条件 $f(0)=0$ より $C_2=0$ が従う．定数 C は 2 つ目の条件 $f(a)=b$ から決められる．すなわち，$C_1=aC$ とおくと，

$$
\arctan\sqrt{\frac{C_1}{1-C_1}} - \sqrt{C_1(1-C_1)} - \frac{b}{a}C_1 = 0 \tag{1.4}
$$

という条件になる．ここで，二つのケースが考えられる（図 2 を参照）：

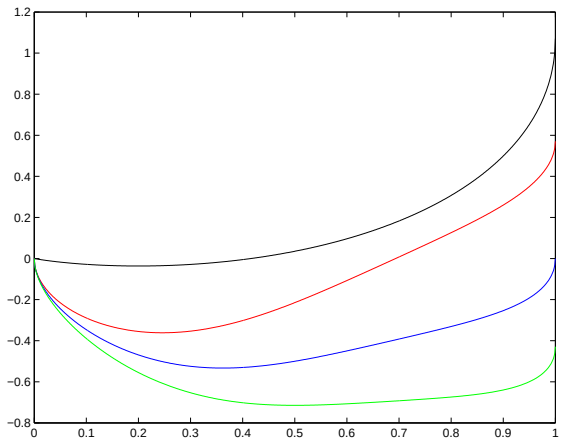

図 2：(1.4) の左辺の関数のグラフ，横軸は C_1（黒：$\frac{b}{a}=0.5$，赤：$\frac{b}{a}=1$，青：$\frac{b}{a}=\frac{\pi}{2}$，緑：$\frac{b}{a}=2$）

- もし $b/a>\pi/2$（計算の詳細は省略）であれば，この解は $C_1=0$ に限る．そのとき f は定数関数となり，$b\neq 0$ とすれば不適である．よって，この場合は解が存在しない．正確に言うと，考えている C^1 級の関数の空間では解が存在しない．関数空間を広げれば，解が存在する可能性があり，今の空間でよいかという疑問が生じる．

- 一方では，$b/a<\pi/2$ のとき，$C_1\neq 0$ を満たす解がただ一つある．この場合，f は **サイクロイド** となる．厳密には，$f(x)$ が反転したサイクロイドを与える（詳しくは問題 1.3 を参照）．　サイクロイドとは，定直線に沿って円が滑らずに回転するときの円周上の点が描く軌跡（曲線）のことである．

このように，汎関数 T の最小値を汎関数に対するオイラー・ラグランジュ方程式を導き解くことにより求めた．一方，反対方向に考えることもできる．つまり，微分方程式を解く問題が与えられたときその偏微分方程式がオイラー・ラグランジュ方程式になるような汎関数を構成することが考えられる．そうすることによって，変分法のテクニックを用いて解の存在や性質を証明することが簡単になることが多い．また，数値計算においても最小化問題の形だと便利である．

Problems

Problem 1.1 連続な関数 $h(x) : (0, a) \to \mathbb{R}$ が

$$\int_0^a h(x)\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, a)$$

を満たすなら，h が $(0, a)$ において恒等的にゼロであることを示せ．

Problem 1.2 方程式 (1.4) を解くときに，$\frac{b}{a} = \frac{\pi}{2}$ の場合を考慮しなかった．このときの解の有無を論じよ．

Problem 1.3 上で求めた最速降下曲線が反転したサイクロイドであることを次のステップを踏んで確かめよ．

(1) f の逆関数を z とおく．つまり，$x = f^{-1}(y) = z(y)$ とする．z が満たす微分方程式は

$$\frac{1}{1 + (z'(y))^2} = Cz(y)$$

となることを確認せよ．

(2) 解となる曲線をパラメータ θ を用いて，$(y(\theta), z(\theta))$ と表示する．このとき，$z'(y) = 1/\tan\frac{\theta}{2}$ とおくと，$z(\theta) = \frac{1}{2C}(1 - \cos\theta)$ を導け．

(3) $z'(y)$ を z と y の θ についての微分で表し，ステップ (2) で求めた $z(\theta)$ を用いて，$y(\theta)$ を具体的に求めよ．（答えは，$y(\theta) = \frac{1}{2C}(\theta - \sin\theta)$.）

(4) 以上の結果をまとめて，最速降下曲線がサイクロイドであることを説明せよ．

Problem 1.4 点 $[0, 0]$ に始まり点 $[1, 0]$ に終わり，正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ から出ない平面内の曲線のうち，曲線の長さと曲線と x-軸に囲まれた領域の面積の差が最も小さいものを見つけよ．

1.2 光線の経路

1.2.1 フェルマーの原理

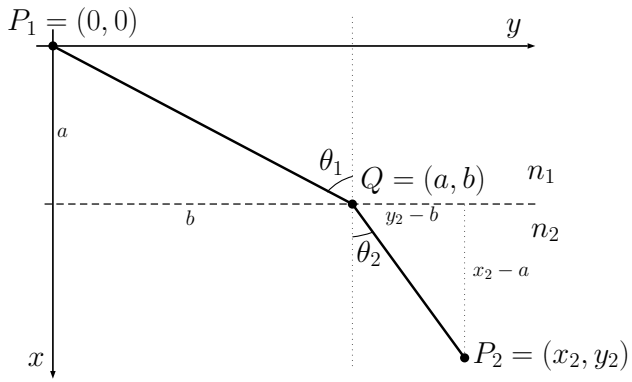

図 3：スネルの法則

均質な二種の媒質が接している系において，ある点 P_1 から出た光線が他の点 P_2 に至る経路を求める問題を考える．上図のような系では，入射角 θ_1 と屈折角 θ_2 が

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{1.5}$$

を満たすように光線が進むことが知られている．これを **スネルの法則** という．ただし，n_1, n_2 はそれぞれの媒質の屈折率であり，均質な媒質としているので定数である．

> 屈折率とは、真空中の光速を物質中の光速で割った値である．

このスネルの法則は物理の一般的な原理であるフェルマーの原理より導かれる．

フェルマーの原理

光線は常に光学距離が停留値になる経路を進む．

「光学距離」と「停留値」という二つの新しい言葉が出たので，それを順番に解説する．

- **光学距離** は屈折率を重みとした距離のことである．例えば，屈折率が一定であると考えた上の例では，

  光学距離 $=$ (P_1 と Q 間の経路の長さ) $\times$ (重み n_1) $+$ (Q と P_2 間の経路の長さ) $\times$ (重み n_2)

  となる．媒質が均質でないとき（屈折率が場所によって変わるとき），光学距離は光線の経路に沿って n を線積分したものになる．この場合を以下でより詳しく扱う（1.2.3 節）．

- 関数 f が汎関数 F の **停留値** を与えるとは，f に大きさ δ の摂動を加えたとき $F(f)$ と $F(f^\delta)$

の差（つまり，この摂動による汎関数の値の変化の度合い）が δ の 2 次オーダー以下であることを意味する．ただし，f^δ は摂動した関数である．

Example 上の停留値の定義が直感的でしかないので，例を挙げて説明する．均質な媒質のなかで光線が常に直線上に進むので，直線は光学距離の停留値で，それ以外の経路は停留値でないことをフェルマーの原理より推測できる．それをこれから確かめておこう．

屈折率 n の均質な媒質の 2 点 P_1, P_2 を結ぶ光線の経路を二通り考え，それぞれに摂動を加えて光学距離 L の変化を見る．

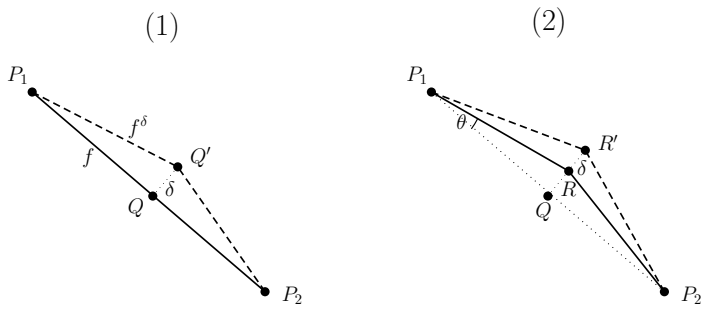

図 4：停留値の計算例

(1) まずは，直線の経路 $f = P_1QP_2$ を考える（図 4(1)）．このとき，$L(f) = n\overline{P_1P_2}$．摂動を加えて，光線が点 P_1 から点 Q' へ直線上に進み，点 Q' から点 P_2 へ直線上に進むような経路 f^δ をとる．このとき，摂動の大きさは $\delta = \overline{QQ'}$ となる．光学距離は次のようになる：

$$L(f^\delta) = n(\overline{P_1Q'} + \overline{Q'P_2})$$

簡単のために，点 Q が線分 P_1P_2 の中点であるとして，$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$ のテーラー展開を適用すると，

$$L(f^\delta) = 2n\sqrt{\overline{P_1Q}^2 + \delta^2} = 2n\overline{P_1Q}\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\overline{P_1Q}^2}} = n\overline{P_1P_2}\left(1 + \frac{\delta^2}{2\overline{P_1Q}^2} + O(\delta^4)\right).$$

よって，

$$F(f^\delta) - F(f) = n\overline{P_1P_2}\frac{\delta^2}{2\overline{P_1Q}^2} + O(\delta^4) = \frac{2n}{\overline{P_1P_2}}\delta^2 + O(\delta^4).$$

汎関数の値の変化は δ の 2 次オーダーにとどまっているので，f が停留値を与える可能性がある．しかし，実際に停留値だということを言うには，許されているすべての摂動に対して汎関数の変化が 2 次オーダーにとどまることを示さなければならない．

(2) 今度は，直線でない，図 4(2) のような経路 P_1RP_2 を考える．このとき，摂動による汎関数

の変化は

$$
\begin{aligned}
F(f^\delta) - F(f) &= 2(\overline{P_1R'} - \overline{P_1R}) \\
&= 2\sqrt{\overline{P_1Q}^2 + (\overline{QR}+\delta)^2} - 2\sqrt{\overline{P_1Q}^2 + \overline{QR}^2} \\
&= 2\sqrt{\overline{P_1Q}^2 + \overline{QR}^2}\left(\sqrt{1 + \frac{2\delta\overline{QR}+\delta^2}{\overline{P_1Q}^2 + \overline{QR}^2}} - 1\right) \\
&= 2\overline{P_1R}\left(\frac{\delta\overline{QR}}{\overline{P_1R}^2} + O(\delta^2)\right) \\
&= 2\frac{\overline{QR}}{\overline{P_1R}}\delta + O(\delta^2) \\
&= 2(\sin\theta)\delta + O(\delta^2)
\end{aligned}
$$

となり，摂動 δ と同じオーダーの量であるから，この経路 f は停留値を与えない．フェルマーの原理より，光線がこのような経路を進むことがないことがわかる．

上の例より均質な媒質において光線が直線上に進むことが推測されるが，そのことをまだ正確に証明できていない．詳しい証明は1.2.3節で述べるが，以下では証明されたとして話を進める．

1.2.2 スネルの法則

図 3 の問題に戻る．媒質が均質であるから，それぞれの媒質で光線が直進する．従って，光線の経路を決めるために必要なのは屈折がおきる点 Q の y-座標 b を求めれば十分である．

このとき，点 $P_1 = (0,0)$，点 $P_2 = (x_2, y_2)$ と媒質の境界の高さ（x-方向での位置）a が固定されているので，光学距離は b にしか依らない量

$$
L(b) = n_1\sqrt{a^2+b^2} + n_2\sqrt{(x_2-a)^2+(y_2-b)^2}
$$

となる．$L(b)$ の停留値を計算したいので，光学距離の摂動 δ による変化

$$
\begin{aligned}
L(b+\delta) - L(b) &= n_1\frac{2b\delta+\delta^2}{\sqrt{a^2+(b+\delta)^2}+\sqrt{a^2+b^2}} \\
&\quad + n_2\frac{-2(y_2-b)\delta+\delta^2}{\sqrt{(x_2-a)^2+(y_2-b-\delta)^2}+\sqrt{(x_2-a)^2+(y_2-b)^2}}
\end{aligned}
$$

を計算しておく．この量が $\delta \to 0$ のとき δ^2 のオーダーにするには，δ の 1 次オーダーの項が打ち消しあうようにしなければならない．すなわち，

$$
\frac{2n_1b}{\sqrt{a^2+(b+\delta)^2}+\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{-2n_2(y_2-b)}{\sqrt{(x_2-a)^2+(y_2-b-\delta)^2}+\sqrt{(x_2-a)^2+(y_2-b)^2}} = 0, \quad \delta \to 0.
$$

よく見ると，上の条件は

$$\frac{d}{d\delta}L(b+\delta)\big|_{\delta=0} = \lim_{\delta\to 0}\frac{L(b+\delta)-L(b)}{\delta} = 0$$

という「L の変分がゼロである」という条件と同値である．汎関数 L が 1 変数関数だから，停留値を求める問題は関数の最小値を求める問題となる．

具体的に計算すると，

$$\frac{bn_1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{-(y_2-b)n_2}{\sqrt{(x_2-a)^2+(y_2-b)^2}} = n_1\sin\theta_1 - n_2\sin\theta_2 = 0$$

のように，(1.5) のスネルの式が得られる．

1.2.3 屈折率が場所によって変化する場合

簡単のために 2 次元平面内の光線の動きを考える．媒質が均質でなく，屈折率 $n(x,y)$ が場所によって変わるときの光学距離は

$$L(\gamma) = \int_\gamma n\,ds$$

となる．ただし，γ は光線の経路を表す曲線で，関数 n をこの曲線に沿って積分した式になっている．

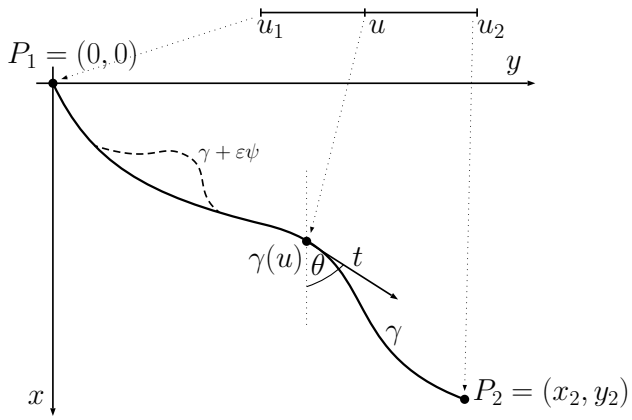

図 5：一般の屈折率のときの設定

以下では線積分に関する基本知識が必要になる．曲線 γ をパラメータ u を用いて $\gamma(u) = (\gamma_1(u), \gamma_2(u)), u \in (u_1, u_2)$ と表す．ここで，$\gamma(u_1) = P_1$, $\gamma(u_2) = P_1$ のようにスタート地点が P_1，終点が P_2 となるようにする．すると，弧の微小の長さは $ds = |\gamma'(u)|\,du$ となるので，光学距離は次のように書き換えられる：

$$L(\gamma) = \int_{u_1}^{u_2} n(\gamma(u))|\gamma'(u)|\,du.$$

光線は光学距離の停留値を与える経路を選ぶので，停留値を与える曲線 γ を求めればよい．これは，光学距離の変分がゼロになるような曲線 γ を求めることと同じである．そこで，点 P_1 と P_2 の近傍でゼロとなる試験関数 $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を任意にとって，経路 $\gamma(u)$ の摂動 $\gamma(u) + \varepsilon\psi(\gamma(u))$ を考える．式を短くするために，$\varphi(u) := \psi(\gamma(u))$ とおく．変分の計算は少し煩雑になる：

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon}L(\gamma+\varepsilon\varphi) &= \frac{d}{d\varepsilon}\int_{u_1}^{u_2} n(\gamma(u)+\varepsilon\varphi(u))|\gamma'(u)+\varepsilon\varphi'(u)|\,du \\
&= \int_{u_1}^{u_2}\Big\{\nabla n(\gamma(u)+\varepsilon\varphi(u))\cdot\varphi(u)|\gamma'(u)+\varepsilon\varphi'(u)| \\
&\qquad + n(\gamma(u)+\varepsilon\varphi(u))\frac{(\gamma_1'(u)+\varepsilon\varphi_1'(u))\varphi_1'(u)+(\gamma_2'(u)+\varepsilon\varphi_2'(u))\varphi_2'(u)}{|\gamma'(u)+\varepsilon\varphi'(u)|}\Big\}\,du
\end{aligned}$$

ここで $\varepsilon := 0$ とすると，L の変分 δL を得る：

$$\delta L(\gamma) = \int_{u_1}^{u_2}\Big\{\nabla n(\gamma(u))\cdot\varphi(u)|\gamma'(u)| + n(\gamma(u))\frac{\gamma'(u)\cdot\varphi'(u)}{|\gamma'(u)|}\Big\}\,du.$$

2 項目で部分積分をし，$ds = |\gamma'(u)|\,du$ の関係を思い出すと，

$$\begin{aligned}
\delta L(\gamma) &= \int_{u_1}^{u_2}\Big\{\nabla n(\gamma(u)) + \frac{1}{|\gamma'(u)|}\Big(n(\gamma(u))\frac{\gamma'(u)}{|\gamma'(u)|}\Big)'\Big\}\cdot\varphi(u)|\gamma'(u)|\,du \\
&= \int_{\gamma}\Big\{\nabla n + \frac{d}{ds}\Big(n\frac{d\gamma}{ds}\Big)\Big\}\psi\,ds
\end{aligned}$$

と変形できる．この量がどんな摂動 ψ に対してもゼロでないといけないので，結局，

$$\nabla n + \frac{d}{ds}\Big(n\frac{d\gamma}{ds}\Big) = 0 \tag{1.6}$$

というオイラー・ラグランジュ方程式を得る．

> 勾配はベクトル（$\nabla n = (\frac{\partial n}{\partial x}, \frac{\partial n}{\partial y})$）で，$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ もベクトル値関数だから，上の式は，本当は，二つの方程式を連立させたものである．

Example 均質な媒質のときの経路を求める．ここで，n が定数となり，(1.6) の式は

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} = 0$$

と簡単になる．これを直接解くこともできるが，左辺の量が実は γ の曲率であることに気づけば，上式を満たす γ は直線しかないということがすぐにわかる．これで，均質な場合に光線が直進することを正確に示すことができた．

Example 屈折率 n が y に依存せず，x のみの関数である場合を考える．式 (1.6) を書き下すと，

$$\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{d}{ds}\Big(n\frac{d\gamma_1}{ds}\Big) = 0 \qquad \frac{d}{ds}\Big(n\frac{d\gamma_2}{ds}\Big) = 0$$

となるので，

$$n\frac{d\gamma_2}{ds} = \text{const} \tag{1.7}$$

がわかる．

図 5 のように，$t = (\frac{d\gamma_1}{ds}, \frac{d\gamma_2}{ds})$ が光線の経路への単位接線ベクトル（光線が進む方向）だから，接線ベクトルと x 軸の成す角度を θ とおくと，

$$\frac{d\gamma_1}{ds} = \cos\theta, \qquad \frac{d\gamma_2}{ds} = \sin\theta$$

を得る．したがって，式 (1.7) は

$$n\sin\theta = \text{const} \tag{1.8}$$

となり，スネルの法則が得られた．

1.3 最速降下曲線とスネルの法則の関係

最速降下曲線の問題と光線の屈折の問題は全く異なる問題に見えるが，実は，深い関係がある．その理由は，屈折率の定義を思い出せばわかる．屈折率は、真空中の光速 c_0 と物質中の光速 c の比で c_0 が定数だから，光学距離は

$$L(\gamma) = c_0 \int_\gamma \frac{1}{c}\, ds$$

となる．ds/c は光線が微小距離 ds を進むのに必要な時間を表しているので，それを積分して c_0 をかけたものは光線が経路 γ に沿って点 P_1 から点 P_2 にたどり着くのに必要な時間（の c_0 倍）を意味する．

よって，フェルマーの原理を言い換えると,「光線は常に移動に必要な時間が停留値になるような経路を進む」となり，最速降下問題と同じ設定になる．

このようにして，最速降下曲線をスネルの法則から導くことができる．図 1 と図 5 において同じ座標系をとっているので，c_0 を右辺の定数に含めると，式 (1.8) は

$$\frac{\sin\theta}{c(x)} = \text{const}$$

と書くことができる．最速降下の場合，$c(x) = \sqrt{2gx}$（式 (1.1) を参照）で，微分の定義より $f'(x) = \tan\theta$ である. これより $\sin\theta = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}$ と計算できるから，上式をさらに

$$\frac{1}{\sqrt{2gx}}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} = \text{const}$$

と書き換えることができる．これはちょうど (1.3) で得た最速降下曲線のオイラー・ラグランジュ方程式に他ならない．

Problems

Problem 1.5 光線に対する反射の法則をフェルマーの原理より導け.

Problem 1.6 夏の暑いときに道路を走ると，遠方の道路がちらちら揺らめいて水がはってあるように見える．道路の表面が高温になり空気を熱し空気が熱くなると屈折率が下がる，という事実を参考にして，この現象を数学的に解説せよ.
（ヒント：屈折率を道路からの距離の線形関数のような簡単な関数にして，地平線付近から道路の方へ進む光が道路にたどり着くことなく見ている人の目に入ることを示し，道路の表面に実は地平線の空が映っていることを説明する.）

References

[1] 岡崎 誠，べんりな変分原理，共立出版，2014.

[2] I.M. Gelfand, S.V. Fomin, *Calculus of Variations*, Dover Books on Mathematics, 2000.

[3] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, 2008 (Chapter 8).

[4] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *Calculus of Variations I*, Springer, 2004.

[5] B. Dacorogna, *Introduction To The Calculus Of Variations*, Icp, 2008.

偏微分方程式と変分法（第2回）

概要

この講義では，弦や膜の安定な形状を最小エネルギーの原理より求める．まずは 1 変数関数で表現できる弦の場合を紹介し，それを一般化する形で 2 変数関数で表現される膜の問題を考える．最小化に制約条件がつくときの解法も扱う．

今回の内容の数学的な側面については [3] でわかりやすく書かれている．

2.1 弾性弦の形状

この講義の目標は弾性膜に外力が働いたとき膜が落ち着くような形状を求めることであるが，膜の形状を表すには 2 変数関数を使うことになるので，まずは，よりシンプルな 1 変数バージョンを紹介しておいて，2.2 節でそれを多変数の場合に拡張する．すなわち，両端を同じ高さに固定された弾性弦を考え，重力など一定の力が働くときに，弦がどんな形で安定するかを計算する．

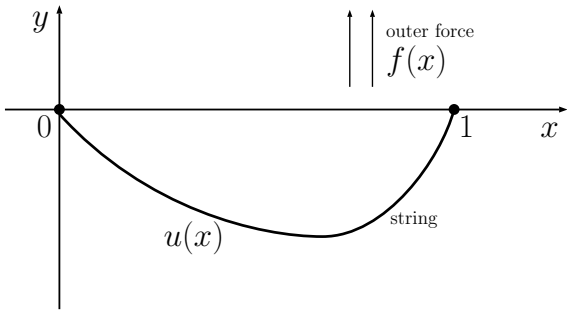

図 1：弦の形状を求める問題の設定

図 1 のように，弦が $[0,1]$ の区間に張力 T で張られているとして，両端の高さを 0 とする．弦の形状をスカラー関数 $u(x)$ で表す．弦の位置 x において，弦の単位質量当たり（弦の形状に依らない）外力 $f(x)$ が y 軸の正の方向に働くとき，もともと水平だった弦が変形する．外力作用の下，定常な弦の形状を求める．

出発点となるのは,「保存系はある条件を満たせば，そのエネルギーの停留値を与えるような状態をとる」という静力学の **最小ポテンシャル・エネルギーの原理** である．この原理は後で紹介する仮想仕事の原理より従う．保存系とは二つの状態のエネルギーの差が二つの状態の間の経路に依存しない系のことである（例えば，摩擦力を含む系は保存系ではない）．

したがって，弦のエネルギーを書き，その停留値を求めればよい．系のエネルギーとして，伸びによる弾性エネルギーと外力 f による仕事とを考慮する．基準となる弦の形状をどのようにとってもよいので，伸びによるエネルギーがゼロとなるまっすぐな弦をとる．

弦が変形したときに，張力 T は「張力 $\times$ 長さの増加」という仕事をするので，伸びによる弾性エネルギーは

$$T\left(\int_0^1 \sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx - 1\right) \tag{2.1}$$

となる．計算を簡単にするために，弦の変形が小さいという仮定をする．そうすると，$u'(x)$ は小さい量となり，テーラー展開

$$\sqrt{1+(u'(x))^2} = 1 + \frac{1}{2}(u'(x))^2 + O((u'(x))^4)$$

において，$u'(x)$ の 4 次オーダーの項を無視できる．結局，弾性エネルギーは

$$\frac{T}{2}\int_0^1 (u'(x))^2\,dx \tag{2.2}$$

と近似できる．実は，張力 T が弦における位置や弦の伸び具合に依らないなど，様々な仮定をおいてこの式を導いているが，物理的な詳細は割愛する．

弦の微小部分 $[x, x+dx]$ に対して外力 f がなす仕事は「$f(x)\times$ 微小部分の質量 $\times$ 弦の変位」であるから，弦の線密度を ρ で表し，定数だとすると，弦全体になされる仕事は

$$\int_0^1 f(x)\cdot\rho\,dx\cdot(-u(x)) = -\rho\int_0^1 f(x)u(x)\,dx$$

となる．例えば，外力が重力のみの場合，$f(x)=-g$（g は重力加速度）のように x に依らない力になるので，仕事は $\rho g\int_0^1 u(x)\,dx$ で表される．

上の考察より，弦の全エネルギーは

$$E(u) = \int_0^1 \left\{\frac{T}{2}(u'(x))^2 - \rho f(x)u(x)\right\}dx \tag{2.3}$$

のように書け，次の変分問題を解くことになる．

変分問題（1 次元）

$u(0)=u(1)=0$ をみたす関数のなかで

$E(u) = \int_0^1 \{\frac{T}{2}(u'(x))^2 - \rho f(x)u(x)\}\,dx$ の停留値を与える関数 $u\in C^2([0,1])$ を見つけよ．

E の停留値を与える関数 u_0 は

$$\delta E(u_0) = 0 \tag{2.4}$$

という「変分がゼロ」の式を満たす．

以下では簡単のために u_0 の代わりに u と書くが，停留値を与える関数の話であることを忘れないでほしい．さて，試験関数 $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$ を任意に選ぶと，(2.4) は

$$\frac{d}{d\varepsilon}E(u+\varepsilon\varphi)\big|_{\varepsilon=0} = 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(0,1)$$

という条件に他ならない．ここで，φ が $x=0$ と $x=1$ の近傍で恒等的にゼロだから，定常な形状 u の摂動を表す $u+\varepsilon\varphi$ という関数は「両端がゼロの高さに固定されている」という条件を満たしていることに注意する．さて，

$$E(u+\varepsilon\varphi) = \int_0^1 \left\{\frac{T}{2}(u'(x)+\varepsilon\varphi'(x))^2 - \rho f(x)\big(u(x)+\varepsilon\varphi(x)\big)\right\} dx$$

だから，

$$\frac{d}{d\varepsilon}E(u+\varepsilon\varphi) = \int_0^1 \left\{\frac{T}{2}(2u'(x)\varphi'(x)+2\varepsilon(\varphi'(x))^2) - \rho f(x)\varphi(x)\right\} dx$$

となり，$\varepsilon=0$ を代入すると，

$$\frac{d}{d\varepsilon}E(u+\varepsilon\varphi)\big|_{\varepsilon=0} = \int_0^1 \left\{Tu'(x)\varphi'(x) - \rho f(x)\varphi(x)\right\} dx$$

を得る．

オイラー・ラグランジュ方程式を導くためには，右辺の第 1 項に部分積分を施し，

$$\frac{d}{d\varepsilon}E(u+\varepsilon\varphi)\big|_{\varepsilon=0} = \int_0^1 \left\{-Tu''(x) - \rho f(x)\right\}\varphi(x)\,dx$$

の形にする．φ が両端で 0 だから，$x=0$ と $x=1$ での値を含む境界項は出てこない．どの試験関数 φ に対しても両辺がゼロであるから，

$$Tu''(x) + \rho f(x) = 0 \tag{2.5}$$

というオイラー・ラグランジュ方程式が得られた．定常な形状 u を求めるには，これを単に 2 回積分すればよい．

Example

(1) 外力が全くない場合に，$f(x)=0$ を (2.5) に代入すると，$u''(x)=0$ という方程式になるので，解は $u(x)=ax+b, a,b\in\mathbb{R}$ と書ける．しかし，$u(0)=u(1)=0$ という境界条件を満たすのは $u(x)=0$ という関数だけである（つまり，$a=b=0$）．外力がないときに，弦が水平な線分の形をとるという予想通りの結果が得られた．

(2) 外力が重力のみの場合に外力による仕事の部分を位置エネルギーとして解釈できる．$f(x)=-g$ を (2.5) に代入すると，$u''(x)=\frac{\rho g}{T}$ という方程式になるので，解は $u(x)=\frac{\rho g}{2T}x^2+ax+b$,

$a, b \in \mathbb{R}$ と書ける．境界条件 $u(0) = u(1) = 0$ を考慮すれば，

$$u(x) = \frac{\rho g}{2T} x(x-1)$$

のように放物線の形状となる．

Problems

Problem 2.1 弦の弾性エネルギーを (2.2) のように近似せず，(2.1) の形を使ったときのオイラー・ラグランジュ方程式を導き，外力が重力のみという特別な場合に得られたオイラー・ラグランジュ方程式を解け．

Problem 2.2 弦の下に深さ $y = -H$（H は十分大きいとする）まで流体が満たされている系を考える．(1 次元的なものである弦ではちょっと不自然であるが，膜の場合を念頭におけばこのような系を考えることに意味がある．）系の全エネルギーは (2.3) に流体の位置エネルギーを加えたものになる．流体の位置エネルギーが u の 2 次関数となることを示し，このときのオイラー・ラグランジュ方程式を計算せよ．また，外力が重力のみの場合の解を求めよ．

2.2 ディリクレの原理

固定された枠の中に張られた弾性膜を考える．枠の形は，水平面 $x_3 = 0$ の点 $[x_1, x_2]$ からの枠への距離 $g(x_1, x_2)$ を用いて指定する．また，枠を平面 $x_3 = 0$ に射影することによりできる閉曲線を境界に持つ領域を Ω とする．膜の形状が関数 $u(x_1, x_2)$ のグラフで表現可能とする．

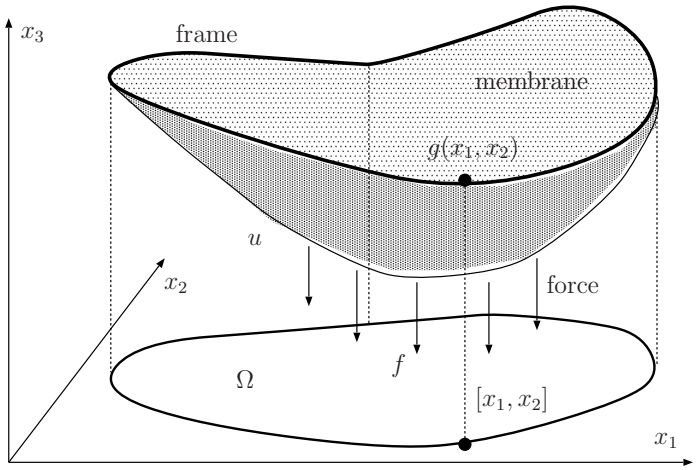

図 2：外力作用下での膜の形状の問題設定

膜の単位面積当たりに外力 $f(x_1, x_2)$ が x_3-軸の正の方向に働くとき，膜のエネルギーを

$$E(u) = \iint_\Omega \left[\frac{T}{2}|\nabla u|^2 - \rho u f\right] dx_1\, dx_2$$

と表すことができる．ここで，T は張力，ρ は面密度である．また，$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$ は u の勾配ベクトル，$|\nabla u|$ はその大きさ $\sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2}$ を意味する．

ただし，膜の変形が小さく，伸び（面積の増加）による貢献をテーラー展開 $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2)$ を用いて次のように近似している：

$$\begin{aligned} A(u) - A_0 &= \iint_\Omega \sqrt{1 + \left(\tfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\, dx_1\, dx_2 - |\Omega| \\ &\approx \iint_\Omega \left[1 + \frac{1}{2}\left(\left(\tfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\right] dx_1\, dx_2 - \iint_\Omega 1\, dx_1\, dx_2 \\ &= \iint_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2\, dx_1\, dx_2 \end{aligned}$$

ここで，$A(u)$ は形状 u をもつ膜の面積，$A_0 = |\Omega|$ は変形していない水平な膜の面積である．

膜が釣り合いの状態 u にあるとき，エネルギー E は停留値になる．すなわち，この場合，Ω の境界を $\partial\Omega$ とし，境界条件をみたす関数の集合

$$\mathcal{A} = \left\{ w \in C^2(\bar{\Omega}) \mid w = g \text{ on } \partial\Omega \right\}$$

を導入すると，$u \in \mathcal{A}$ は

$$E(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} E(w)$$

を満たす（停留値は実は最小値であることはこれから紹介する定理から明らかになる）．すなわち，以下の問題を解くことになる（式を簡単にするために，$T = \rho = 1$ とおいた．また，以下では簡単のために重積分を積分記号一本で表すことにする）．

変分問題（2 次元）

$$\mathcal{A} = \left\{ w \in C^2(\bar{\Omega}) \mid w = g \text{ on } \partial\Omega \right\} \quad \text{に属する関数のなかで}$$

$$E(u) = \int_\Omega \left[\tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 - uf\right] dx \quad \text{の最小値を与える関数 } u \in C^2([0,1]) \text{ を見つけよ．}$$

この最小化問題とそのオイラー・ラグランジュ方程式の関係について次のことがわかる．ただし，定理で登場する Δ というオペレータは

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

で定義されるラプラス作用素である．

Theorem 2.1 (Dirichlet の原理)

次の二つの主張は同値である．

$$\left(u \in C^2(\bar{\Omega}) \text{ は } (*) \left\{ \begin{array}{rl} -\Delta u = f & \textit{in } \Omega \\ u = g & \textit{on } \partial\Omega \end{array} \right. \text{ の解である} \right) \Leftrightarrow \left(u \in \mathcal{A} \text{ は } E(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} E(w) \text{ を満たす} \right)$$

Proof.

- $\Rightarrow$ を示す．つまり，$w \in \mathcal{A}$ を任意に選んで，$E(u) \leq E(w)$ を示す．

  $(*)$ より
  $$0 = \int_\Omega (-\Delta u - f)(u - w)\, dx$$
  部分積分の一般化であるグリーンの公式を用いると，
  $$0 = \int_\Omega \left[\nabla u \cdot \nabla(u - w) - f(u - w)\right] dx$$
  （Ω の境界では $u - w = g - g = 0$ なので，境界の積分は出てこない）．

  そこで，$|\nabla u \cdot \nabla w| \leq |\nabla u|\,|\nabla w| \leq \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla w|^2$ という不等式（前半はコーシー・シュワルツの不等式である）を用いて，
  $$\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - uf\right] dx = \int_\Omega \left[\nabla u \cdot \nabla w - wf\right] dx \leq \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2\, dx + \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf\right] dx$$
  を得るが，これは $E(u) \leq E(w)$ そのものである．

- $\Leftarrow$ を示す：

  $u \in \mathcal{A}$ が $E(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} E(w)$ を満たすとする．$u \in \mathcal{A}$ だから，$(*)$ の境界条件は満たされている．後は，$-\Delta u = f$ を示せばよい．任意の $v \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し，
  $$e(\tau) = E(u + \tau v), \qquad \tau \in \mathbb{R}$$
  とおく．全ての $\tau \in \mathbb{R}$ に対し，$u + \tau v$ が $\mathcal{A}$ に入るから，関数 $e(\tau)$ は $\tau = 0$ において最小値を持つ．よって，$e'(0) = 0$．e を書き下すと，次のようになる．
  $$\begin{aligned} e(\tau) &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u + \tau \nabla v|^2 - (u + \tau v) f\right] dx \\ &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \tau \nabla u \cdot \nabla v + \frac{\tau^2}{2}|\nabla v|^2 - (u + \tau v) f\right] dx. \end{aligned}$$
  従って，
  $$0 = e'(0) = \int_\Omega \left[\nabla u \cdot \nabla v - vf\right] dx = \int_\Omega (-\Delta u - f) v\, dx.$$
  この等式は全ての $v \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して成り立つので，Ω において $-\Delta u = f$ を得る．

□

この定理で得られたオイラー・ラグランジュ方程式 $-\Delta u = f$ は，弦の問題で得た方程式 $-u'' = f$ を 2 変数関数に拡張したものである．

Problems

Problem 2.3 $a, b \in \mathbb{R}$ を正の定数とする．境界値問題

$$\begin{aligned} -u'' + au &= b \qquad \text{in } \Omega = (0,1) \\ u &= 0 \qquad \text{on } \partial\Omega = \{0,1\} \end{aligned}$$

に対する Dirichlet の原理を書け．すなわち，この問題と同値な，汎関数の最小化問題（変分問題）を構成せよ．構成した変分問題が上の境界値問題と同値であることを示せ．

2.3 条件つき最小化問題

上の例と同じように，枠に張られた弾性膜を考える．今度は，膜の下に非圧縮流体が存在し，膜の囲む領域の体積が一定値に決まっている場合を調べる．例えば，膜が垂直な壁を持つ容器の縁に張られていて，その下に水などの圧縮できない流体が満たされていると想像すればよい．

この系のエネルギーを表すには，前回導入した膜の面積増加による弾性エネルギー $\iint \frac{1}{2}|\nabla u|^2$ を再び用いる．さらに，膜の下にある流体の位置エネルギーをも入れるのが自然である．このエネルギーは底面 $dx = dx_1 \times dx_2$ をもつ流体の微小な直方体に対して次のように計算される：

$$E_p = m \cdot g \cdot h = (dx \cdot u \cdot \rho) \cdot g \cdot \frac{u}{2} = \frac{1}{2}\rho g u^2 dx$$

ここで，ρ は流体の密度，$u(x)$ は点 $x \in \Omega$ における膜の高さである．

系のエネルギーを次のように書く：

$$E(u) = \int_\Omega \left(\tfrac{T}{2}|\nabla u|^2 + \tfrac{\rho g}{2}u^2\right)\, dx$$

このエネルギーが最小となるような膜の形 $u(x)$ を求める．流体の体積を V とすると，拘束条件

$$\int_\Omega u(x)\, dx = V$$

のもとで最小化することになる．簡単のため，領域 Ω の境界での膜の高さが 0 であると仮定しよう．そのとき，以下の最小化問題になる．

変分問題（条件つき）

$$\min_{u \in \mathcal{A}} E(u), \qquad \text{where } \mathcal{A} = \left\{ u \in H^1(\Omega);\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega,\ \int_\Omega u(x)\, dx = V \right\}$$

ここで，$H^1(\Omega)$ はこの汎関数の最小化に最も適したソボレフ空間という関数空間であるが，以下ではその性質を使わないので，そのような空間が存在することを承知しておいていただければ十分である．

さて，u が minimizer（最小化関数）であるとして，オイラー・ラグランジュ方程式を導こう．この場合，$E(u) \le E(u+\varepsilon\varphi)$ がテスト関数 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して成り立つとは限らない．それは，$\int_\Omega \varphi = 0$ でない限り，$u+\varepsilon\varphi$ が $\mathcal{A}$ に属せず，比較関数として利用できないからである．体積を保存するような比較関数を構成しなければならない．一つの可能性は，

$$V\frac{u+\varepsilon\varphi}{\int_\Omega (u+\varepsilon\varphi)\,dx} = \frac{u+\varepsilon\varphi}{1+\frac{\varepsilon}{V}\int_\Omega \varphi\,dx}, \qquad \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

という関数である．ε が絶対値で十分小さければ分母が正になるので，この定義は意味がある．

関数 u が最小化関数であるから，

$$e(\varepsilon) = E\left(\frac{u+\varepsilon\varphi}{1+\frac{\varepsilon}{V}\int_\Omega \varphi\,dx}\right)$$

という関数は $\varepsilon = 0$ において最小値を持つ．すなわち，$e'(0) = 0$ である．関数 e の具体的な形を書く．

$$e(\varepsilon) = \int_\Omega \left\{ \frac{T}{2}\frac{|\nabla u + \varepsilon\nabla\varphi|^2}{\left(1+\frac{\varepsilon}{V}\int_\Omega \varphi\,dx\right)^2} + \frac{\rho g}{2}\frac{(u+\varepsilon\varphi)^2}{\left(1+\frac{\varepsilon}{V}\int_\Omega \varphi\,dx\right)^2} \right\} dx$$

その微分は

$$\begin{aligned} e'(\varepsilon) \;=\; & \int_\Omega \left\{ \frac{T(\nabla u + \varepsilon\nabla\varphi)\nabla\varphi}{\left(1+\frac{\varepsilon}{V}\int_\Omega \varphi\right)^2} - \frac{T|\nabla u + \varepsilon\nabla\varphi|^2}{\left(1+\frac{\varepsilon}{V}\int_\Omega \varphi\right)^3}\cdot\frac{\int_\Omega \varphi}{V} \right. \\ & \left. + \frac{\rho g(u+\varepsilon\varphi)\varphi}{\left(1+\frac{\varepsilon}{V}\int_\Omega \varphi\right)^2} - \frac{\rho g(u+\varepsilon\varphi)^2}{\left(1+\frac{\varepsilon}{V}\int_\Omega \varphi\right)^3}\cdot\frac{\int_\Omega \varphi}{V} \right\} dx \end{aligned}$$

となる．従って，$\varepsilon = 0$ での値を求めると，

$$\begin{aligned} e'(0) &= \int_\Omega \left\{ T\nabla u\nabla\varphi - T|\nabla u|^2\frac{\int_\Omega \varphi\,dx}{V} + \rho g u\varphi - \rho g u^2\frac{\int_\Omega \varphi\,dx}{V} \right\} dx \\ &= \int_\Omega (-T\Delta u + \rho g u)\varphi\,dx - \frac{1}{V}\int_\Omega \left(\int_\Omega (T|\nabla u|^2 + \rho g u^2)\,dx \right)\varphi\,dx \end{aligned}$$

を得る．これが全てのテスト関数 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し 0 になるので，

$$-T\Delta u + \rho g u = \frac{1}{V}\int_\Omega (T|\nabla u|^2 + \rho g u^2)\,dx$$

が成り立つ．上の等式の右辺に u に依存する非局所的な項がある．これを λ とし，体積条件に対する **ラグランジュ未定乗数** と呼ぶ．この項は膜の下の体積が固定されていることに由来し，膜に働く圧力として解釈できる．

まとめて言うと，最小化関数は存在するなら以下の方程式を満たすことが分かった：

$$-T\Delta u + \rho g u = \lambda \tag{2.6}$$

汎関数 E の下半連続性を使うと，最小化関数が実際に存在することが証明できる．

上では，制約条件を比較関数をうまく選ぶことで考慮した．しかし，より複雑な条件が与えられたときに，比較関数の構成が難しい場合がある．そのようなときは，**ラグランジュ未定乗数法**という方法を用いることができる場合がある．それを上の具体的な問題で説明する．

条件つき最小化問題

$$\min_{u\in\mathcal{A}} E(u), \qquad \text{where } \mathcal{A} = \left\{u \in H^1(\Omega);\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega,\ \ G(u) = 0\right\}$$

に対し，ラグランジュ未定乗数 λ が存在し，この条件つき問題が拘束条件なしの最小化問題

$$\min_{u\in\mathcal{B}} \left(E(u) + \lambda G(u)\right), \qquad \text{where } \mathcal{B} = \left\{u \in H^1(\Omega);\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega\right\}$$

と同値であることがわかっている．

具体的には，$G(u) = V - \int u\,dx$ だから，汎関数

$$\int_\Omega \left(\tfrac{T}{2}|\nabla u|^2 + \tfrac{\rho g}{2}u^2\right)\,dx + \lambda\left(V - \int_\Omega u\,dx\right)$$

を境界条件 $u = 0$ on $\partial\Omega$ の下で最小化することになる．定数部分 λV は最小化に影響しないので，それを無視して，結局，

$$F(u) = \int_\Omega \left(\tfrac{T}{2}|\nabla u|^2 + \tfrac{\rho g}{2}u^2 - \lambda u\right)\,dx$$

を最小化すればよい．

この汎関数のオイラー・ラグランジュ方程式は (2.6) となることが容易に確かめられる．よって，比較関数の形を制限する方法と同じ解が得られた．しかし，この方法をとったときに，ラグランジュ未定乗数 λ の具体的な形（u への依存のしかた）がわからず，必要なときは後で求めなければならない．

Problems

Problem 2.4 方程式 (2.6) を解析的に解くのが難しいが，1 次元の弦の問題なら解ける．弦の下の面積が保存されるという条件をつけたモデルについて (2.6) に相当する方程式を導き，その解を求めよ．

Problem 2.5 次の条件を満たす C^1-関数 $u(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$ のなかでグラフの長さが最小な関数をラグランジュ未定乗数法を用いて見つけよ．

- $u(0) = u(1) = 0$
- u のグラフと x-軸で囲まれる面積は与えられた $a > 0$ に等しい．

2.4 仮想仕事の原理

仮想仕事の原理は，外力と束縛力が働く静力学的な系（運動しない系）の釣り合いの条件を与える最も基本的な原理である．大雑把に言えば，釣り合いの状態にある系において仮想変位があったとき，系に働く力がこの変位によって行う仮想仕事はゼロである，という原理である．ただし，束縛力による仮想仕事はゼロのときのみである．ここで，仮想変位は系に働く力と束縛に矛盾しないような変化のことであり,「仮想」と呼ぶのは，力学法則に従って起こる変化でなくてもかまわないからである．

例えば，1 個の質点からなるシンプルな系として振り子を考える．この系では，おもりである質点に重力が働き，支点からの距離がひもの長さ L であるという束縛がある．束縛を満たす仮想変位は，支点を中心とした半径 L の球に質点がとどまるような変位だから，この球への接線の方向をもつ．一方では，束縛力はいつも球への法線方向に働くので，仮想変位が束縛を満たせば，この変位による束縛力の仮想仕事はゼロである（直交するベクトルの内積）．しかし，空気による摩擦を考えれば，束縛力による仮想仕事がゼロになるとは限らない．

質点が複数ある系では，仮想変位によってそれぞれの質点に行われる仮想仕事の合計がゼロであるという主張になる．また，連続体に対しても同じような原理が言えるが，ここでは簡単な例を挙げることにとどめる．わかりやすい解説は [6] を参照して下さい．

Example バネにおもりが吊るされたときのバネの定常な伸びの長さを求める．

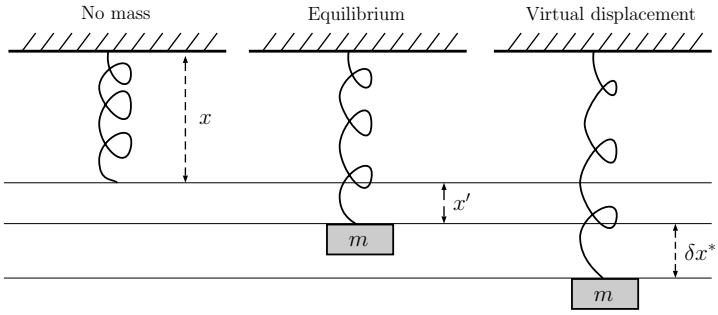

図 3：バネの伸びの問題設定

おもりを下げると，バネは x' だけ伸びた状態で落ち着くとする．バネ定数を k とすると，フックの法則よりおもりがバネから受ける力は $-kx'$ である．力の釣り合いの条件から，これがおもりの重力と同じ大きさでなければならないので，x' の値がすぐに求まる：

$$-kx' + mg = 0.$$

この結果を仮想仕事の原理より導く．バネが x' だけ伸びたときに系が釣り合いの状態にあるとして，下の方向への仮想変位 δx^* を加える．仮想仕事の原理によると，このときのバネの力と重力による仮想仕事の合計がゼロでなければならない．すなわち，

$$-kx' \cdot \delta x^* + mg\delta x^* = 0$$

のように上と同じ結論を得る．

Example 長さ L の梁が水平に置かれた状態で両端を支えられ，左端から a だけ離れた点で垂直方向に力 F_3 が加えられている状況を考える．課題は釣り合いの状態のときの両端における反力 F_1, F_2, F_2' を求めることである．

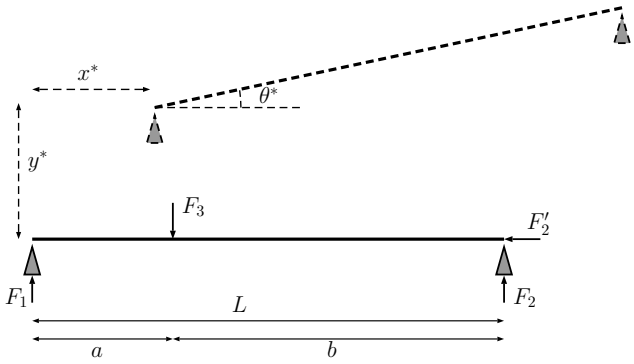

図 4：梁の問題設定

x, y 方向の力と回転モーメントの釣り合いで考えると，

$$-F_2' = 0, \qquad F_1 + F_2 - F_3 = 0, \qquad -F_3 a + F_2 L = 0 \tag{2.7}$$

という条件があるので，$F_2 = \frac{a}{L}F_3, F_1 = \frac{b}{L}F_3$ と直ちにわかる．

これを仮想仕事の原理より確かめる．今回は，束縛条件を満たさない仮想変位を考える．（束縛に矛盾しない仮想変位を用いたときは束縛力を考慮しなくてもよいが，束縛に関係なく決めた仮想変位の場合は束縛力を考慮すれば，同じ結果が得られる．）つまり，図 4 のように梁を x-方向に x^* だけ移動させ，y-方向に y^* だけ移動させ，梁を左端を支点にして角度 θ^* だけ回転させるという仮想変位を考える．

この仮想変位による仕事は

$$F_1 y^* - F_3(y^* + a\sin\theta^*) + F_2(y^* + L\sin\theta^*) - F_2' x^*$$

となるが，仮想仕事の原理より，梁が釣り合いの状態であれば，この量はゼロになる．整理して書くと，

$$-F_2' x^* + (F_1 - F_3 + F_2)y^* + (-F_3 a + F_2 L)\sin\theta^* = 0.$$

どの仮想変位 x^*, y^*, θ^* に対してもこの式が成立するから，x^*, y^*, θ^* の係数はゼロでなければならない．このようにして，(2.7) と一緒の条件が得られた．

References

[1] 岡崎 誠，べんりな変分原理，共立出版，2014.

[2] I.M. Gelfand, S.V. Fomin, *Calculus of Variations*, Dover Books on Mathematics, 2000.

[3] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, 2008 (Chapter 8).

[4] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *Calculus of Variations I*, Springer, 2004.

[5] B. Dacorogna, *Introduction To The Calculus Of Variations*, Icp, 2008.

[6] S. Adeeb, *Varitational principles: The principle of virtual work*, http://sameradeeb.srv.ualberta.ca/variational-principles/the-principle-of-virtual-work/ .

偏微分方程式と変分法（第3回）

概要
この講義では，シャボン玉がとる形状を調べる．計算は「平面内のシャボン玉」（つまり，曲線）のみで行うので，まず曲線について基本的な事項を直感的に説明する．1 個のシャボン玉の形が求まった上で，複数個のシャボン玉がくっついているときの形状を計算する．すべての考察は 2 次元の特別な場合に限られているが，高次元の問題で本質的で興味深い問題が新たに多く現れる．最後に，これらの問題について少しコメントする．

石鹸膜の物理については [6] や [7] に書かれている．

一般次元の問題の面白さを理解するには，幾何学的測度論の入門書である [12] の本がお勧めである．

3.1 シャボン玉の形状モデル

今回の目標はシャボン玉が落ち着くような形を求めることだが，まずはシャボン玉の物理的な性質より数学的な問題を導こう．シャボン玉の物理については文献 [6] で詳しく書かれており，石鹸膜は両側の分子の安定な層が挟む中心部分を流体が流れるといったかなり複雑な構造をしていることがわかる．

そこで，数学的に扱えるには，細かい部分を落として重要な要素だけ抽出するという粗視化の過程を経る必要がある．この場合は，石鹸膜の両側にある層が一様であると仮定し，その間を流れる流体の影響を無視する．実際には，重力の作用でなかの流体が泡の下の方にどんどん流れることで，泡のほとんどの質量が下の部分に集中し，上の部分は非常に薄くなり，最終的に割れるという現象が起きるが，ここでは時間の短いスケールで見て，重力の影響が顕著になる時間の長いスケールの考察を今のところ諦めることにする．

石鹸膜には二つの表面があり，それぞれの表面にある粒子（分子）は周りの粒子との結合を半分ほど失っているからエネルギー的に不利な位置にある．粒子が表面の下にある流体のなかにいた方が安定するため，表面上の粒子はなかに入ろうとする傾向があり，それによって石鹸膜全体はその表面積をできるだけ小さくしようとする．一方では，シャボン玉の石鹸膜は空気を囲んでおり，この場合に空気は非圧縮であると仮定することが妥当である．非常に大雑把で直感的な説明をしたが，詳しく知りたいかたは，[7] の参考書を読むとよい．

上の考察をまとめると，数学的な問題として，与えられた（空気の）体積をもつ閉曲面のなかで表面積が最も小さい曲面は何か？，という問題にたどりついた．この問題の答えは球であるということがよく知られているので，次のようなより複雑な問題も考える：

(1) 任意のフレームを石鹸水に浸して持ち上げることによって出来上がる石鹸膜の形はどうなるか？

(2) シャボン玉が複数個くっついたときにどのような形をとり，接合点の角度はどうなるか？

3.2 平面内の曲線について

前節で紹介した問題を曲面（つまり 3 次元）の設定で解こうとすると，様々な量が複雑になり式が長くなるので，問題をまず 2 次元に落として考えることにする．すなわち，閉曲面の代わりに閉曲線を考えて，閉曲線が囲う面積が与えられたときに周囲の長さが最も短い曲線を求める．

数学的な準備として，曲線を表現する方法について述べる．基本的には，曲線を写像 $\gamma : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$ を用いて表す．区間 $[0, \ell]$ の変数は s の記号を用いて，パラメータと呼ぶ．このとき，曲線は

$$\{(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \mid s \in [0, \ell]\}$$

となる（図 1 を参照）．

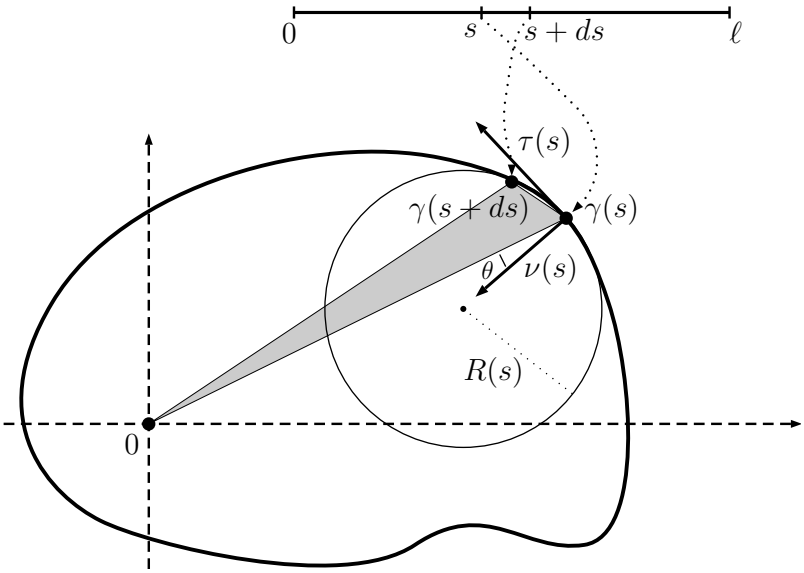

図 1：曲線の表現と記号

Example 中心 $[0, 0]$，半径 r の円は

$$\gamma(s) = (r \cos s, r \sin s), \qquad s \in [0, 2\pi]$$

で表される．ここで，$\gamma_1(s) = r \cos s, \gamma_2(s) = r \sin s$ となる．

以降では，滑らかなジョルダン曲線（つまり，必要なだけ微分ができ自身と交わらない閉じた曲線）のみ考える．閉曲線だから，$\gamma(0) = \gamma(\ell)$ のように両端での値が一致し，$s = 0$ での右からの微分と $s = \ell$ での左からの微分も一致する．

最初に，曲線への接線ベクトルを計算する．パラメータを s より微小な量 δ だけ動かしたとき

に，曲線上の点は $(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ から $(\gamma_1(s+\delta), \gamma_2(s+\delta))$ に移動するので，$(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ における接線ベクトル $\tilde{\tau}(s)$ はこの 2 点をつなぐベクトルを δ というスカラーで割って，$\delta \to 0$ とした極限で得られる：

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}(s) &= \lim_{\delta\to 0} \frac{(\gamma_1(s+\delta), \gamma_2(s+\delta)) - (\gamma_1(s), \gamma_2(s))}{\delta} \\
&= \lim_{\delta\to 0} \left(\frac{\gamma_1(s+\delta) - \gamma_1(s)}{\delta}, \frac{\gamma_2(s+\delta) - \gamma_2(s)}{\delta} \right) \\
&= (\gamma_1'(s), \gamma_2'(s)) = \gamma'(s).
\end{aligned}$$

ここで，$\cdot'$ は s についての微分を意味する．単位接線ベクトルを τ という記号で表す：

$$\tau(s) = \frac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|}, \qquad \text{ただし，} \quad |\gamma'(s)| = \sqrt{(\gamma_1'(s))^2 + (\gamma_2'(s))^2}.$$

今，単位接線ベクトル $\tau(s)$ がちょうど $\gamma'(s)$ になるような状況について考える．ある曲線のパラメータ表示は一通りだけではない．例えば，上に挙げた円の例では $(r\cos(2s), r\sin(2s)), s \in [0, \pi]$ も $(r\sin(e^s - 1), r\cos(e^s - 1)), s \in [0, \ln(2\pi + 1)]$ も同じ円を表している．それぞれの表示で違うのは，パラメータ s が区間 $[0, \ell]$ を動くときの曲線上の点 $\gamma(s)$ が動く速度の大きさである．点 $\gamma(s)$ での速度の大きさは

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{|\gamma(s+\delta) - \gamma(s)|}{\delta} = |\gamma'(s)|$$

であるから，$(r\cos(s), r\sin(s)), s \in [0, 2\pi]$ の場合は速度の大きさが r となり，$(r\cos(2s), r\sin(2s)), s \in [0, \pi]$ の場合は $2r$ となり位置に依らない速度の大きさであるが，$(r\sin(e^s - 1), r\cos(e^s - 1)), s \in [0, \ln(2\pi + 1)]$ の場合は re^s と場所によって異なる速度である．様々なパラメータの取り方のうち，特別な役割をもつのは，速度の大きさが常に 1 となる表示である．このとき，パラメータ s の値と $\gamma(0)$ から $\gamma(s)$ の間の曲線の長さが常に同じだから，**弧長パラメータ** による表示と言う．上記の円の例の場合，弧長パラメータによる表現は $(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}), s \in [0, 2\pi r]$ である．一般には，曲線のパラメータ表示 $\gamma(\sigma), \sigma \in [0, \ell]$ が任意に与えられたとき，

$$\gamma(\varphi(s)), \qquad \text{ただし，} \quad \varphi(s) \text{ は } s = \int_0^{\varphi(s)} |\gamma'(\sigma)|\, d\sigma \text{ を満たす関数}$$

が弧長パラメータによる表現になる．

接戦ベクトルがあれば，それに直交する法線ベクトルを求めることが容易である．パラメータが区間 $[0, \ell]$ を動くとき，対応する閉曲線上の点が反時計回りに動くようにパラメータ表示を定めると，内向き単位法線ベクトル ν は

$$\nu(s) = \frac{1}{|\gamma'(s)|} \left(-\gamma_2'(s), \gamma_1'(s)\right)$$

という式で表される．

次に閉曲線の長さと囲う領域の面積を計算する．弧長パラメータの説明を思い出すと，パラ

メータ範囲 $[s, s+ds]$ に対応する曲線の長さの 1 次近似は $|\gamma'(s)|ds$ であることがわかる．よって，曲線の長さは

$$L(\gamma) = \int_0^\ell |\gamma'(s)|\, ds$$

に等しい．弧長パラメータの場合，$|\gamma'(s)| = 1\ \forall s$ だから，$L = \ell$ を得る．一方，閉曲線の内側の面積は，原点を頂点として曲線の微小部分を底辺にもつ三角形の面積を符号をつけて足し合わせればよい．パアメータ範囲 $[s, s+ds]$ に対応する曲線の長さ（三角形の底辺の長さ）は $|\gamma'(s)|ds$ で近似され，底辺からの原点の高さは $|\gamma(s)|\cos\theta$ と書ける．ただし，θ は内向き法線ベクトル $\nu(s)$ と曲線上の点 $\gamma(s)$ の位置ベクトルの方向を逆向きにしたベクトル $-\gamma(s)$ の成す角度で，内積の性質より $\cos\theta = -\nu(s)\cdot\gamma(s)/|\gamma(s)|$ を満たす．よって，面積は

$$A(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^\ell (-\nu(s)\cdot\gamma(s))|\gamma'(s)|\, ds = \frac{1}{2}\int_0^\ell (\gamma_1(s)\gamma_2'(s) - \gamma_2(s)\gamma_1'(s))\, ds.$$

最後に曲線の「曲がり具合」を表す曲率という量を定義する．これを単位接戦ベクトルの単位長さあたりの変化の度合いで表すのが自然である．したがって，

$$H(s) := \frac{\tau'(s)}{|\gamma'(s)|} = \frac{1}{|\gamma'(s)|}\left(\frac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|}\right)' = \frac{\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''}{|\gamma'|^3}(s) \times \frac{1}{|\gamma'(s)|}\left(-\gamma_2'(s), \gamma_1'(s)\right)$$

を曲率ベクトルとする．式よりこのベクトルの向きは曲線への法線方向で，その大きさ

$$\kappa(s) = \frac{\gamma_1'(s)\gamma_2''(s) - \gamma_2'(s)\gamma_1''(s)}{|\gamma'(s)|^3}$$

を **曲率** と呼ぶことにする．この量のわかりやすい特徴づけがある．すなわち，**曲率半径** とよばれる

$$R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

という量はちょうど，曲線の点 $\gamma(s)$ で曲線に接していて曲線の形状を最も正確に（2 次オーダーで）近似している円の半径である（この円が平曲線の内側から接していれば正の値となる）．この円のことを接触円と言う．

Problems

Problem 3.1

(1) サイクロイド $\gamma(s) = (s - \sin s, 1 - \cos s)$ の弧長パラメータによる表示を書け．

(2) $a, b > 0$ を実数とする．曲線 $\gamma(s) = (ae^{-bs}\cos s, ae^{-bs}\sin s)$ について次の問いに答えよ．

  (a) $s \to +\infty$ のとき，$\gamma(s)$ が螺旋状に渦巻きながら原点に近づくことを示せ．

  (b) $\displaystyle\lim_{s\to+\infty}\int_0^s |\gamma'(\sigma)|\, d\sigma$ が有限である，すなわち，曲線の長さが有限であることを示せ．

3.3 シャボン玉の形を求める

上の 2 節の準備があれば，固体などに接していない 1 個のシャボン玉の形状を求める問題をすぐに記述できる．

最小化問題（シャボン玉 1 個）

ジョルダン曲線 $\gamma : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$ で，面積条件

$$A(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^\ell (\gamma_1(s)\gamma_2'(s) - \gamma_2(s)\gamma_1'(s))\,ds = A_0$$

を満たす曲線のうち，長さ

$$L(\gamma) = \int_0^\ell |\gamma'(s)|\,ds$$

を最小にするものを見つける．

ラグランジュ未定乗数法を適用すると，実数 λ が存在して，求める曲線 γ が汎関数

$$F(\gamma) = \int_0^\ell |\gamma'(s)|\,ds - \frac{\lambda}{2}\int_0^\ell (\gamma_1(s)\gamma_2'(s) - \gamma_2(s)\gamma_1'(s))\,ds$$

の最小値を与えることが言える．そこで，滑らかな試験関数 $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対して摂動 $\gamma(s) + \varepsilon\psi(\gamma(s))$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して変分が消えるという条件

$$\frac{d}{d\varepsilon}F(\gamma(s) + \varepsilon\psi(\gamma(s)))\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

を調べればよい．以下の計算を見やすくするために，$\phi(s) = \psi(\gamma(s))$ とおいて，s の引数を省略する．

$$F(\gamma + \varepsilon\phi) = \int_0^\ell \left\{|\gamma' + \varepsilon\phi'| - \frac{\lambda}{2}\Big((\gamma_1 + \varepsilon\phi_1)(\gamma_2' + \varepsilon\phi_2') - (\gamma_2 + \varepsilon\phi_2)(\gamma_1' + \varepsilon\phi_1')\Big)\right\} ds$$

だから，

$$\frac{d}{d\varepsilon}F(\gamma + \varepsilon\phi) = \int_0^\ell \left\{\frac{\gamma' \cdot \phi' + \varepsilon|\phi'|^2}{|\gamma' + \varepsilon\phi'|} - \frac{\lambda}{2}\Big(\gamma_1\phi_2' + \gamma_2'\phi_1 + 2\varepsilon\phi_1\phi_2' - \gamma_2\phi_1' - \gamma_1'\phi_2 - 2\varepsilon\phi_1'\phi_2\Big)\right\} ds.$$

$\varepsilon = 0$ を代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}F(\gamma + \varepsilon\phi)\Big|_{\varepsilon=0} &= \int_0^\ell \left\{\frac{\gamma' \cdot \phi'}{|\gamma'|} - \frac{\lambda}{2}\Big(\gamma_1\phi_2' + \gamma_2'\phi_1 - \gamma_2\phi_1' - \gamma_1'\phi_2\Big)\right\} ds \\ &= -\int_0^\ell \left\{\left(\frac{\gamma'}{|\gamma'|}\right)' \cdot \phi - \lambda(-\gamma_2', \gamma_1') \cdot (\phi_1, \phi_2)\right\} ds\end{aligned}$$

を得る．ただし，最後の等式で部分積分を施し，ϕ にかかっている微分をそれ以外の項に移した．

この量がゼロであることと曲率 κ と法線ベクトル ν の定義を合わせて使うと，

$$\int_0^\ell (\kappa - \lambda)(\phi \cdot \nu)|\gamma'|\, ds = 0$$

となるが，$\phi(s) = \psi(\gamma(s))$ であり，$|\gamma'(s)|ds$ が曲線の微小長さであり，κ, λ, ν がパラメータの取り方に依らない幾何学的な量であるから，上式は $(\kappa - \lambda)(\psi \cdot \nu)$ を弧長パラメータで積分すると，どんな ψ に対してもゼロとなるという式である．つまり，

$$\kappa = \lambda = \text{定数},$$

言い換えれば,「曲率がすべての点で同じ値になるような曲線」という結果になる．

この性質を満たすジョルダン曲線は半径 λ の円しかない．それを確認するためには，接触円の中心

$$c(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\nu(s)$$

を s について微分すればよい．また，半径 λ は今の時点で未知であるが，指定された面積 A_0 よりすぐに計算できる．

閉曲線ではなく，両端をある位置に固定された曲線の場合も，同じような考察を経て，円弧の一部であるという結果にたどり着く．よって，2 次元では 3.1 節で挙げた問題のうち唯一単純でないものは複数個の曲線がくっついた問題である．一方では，3 次元（曲面）となると，状況は複雑さの意味で全く違い，たくさんの興味深い問題がある．したがって，次節では平面内の複数の泡（マルチバブル）を扱い，その次の節で 3 次元以上の問題についてコメントする．

Problems

Problem 3.2 左端を点 $[0, 0]$ に，右端を点 $[\alpha, 0]$ に固定された曲線で，曲線と x-軸に囲まれた領域の面積が A_0 に指定されている曲線のうち，曲線の長さが最も短いものを求めよ．

3.4 複数のシャボン玉の問題

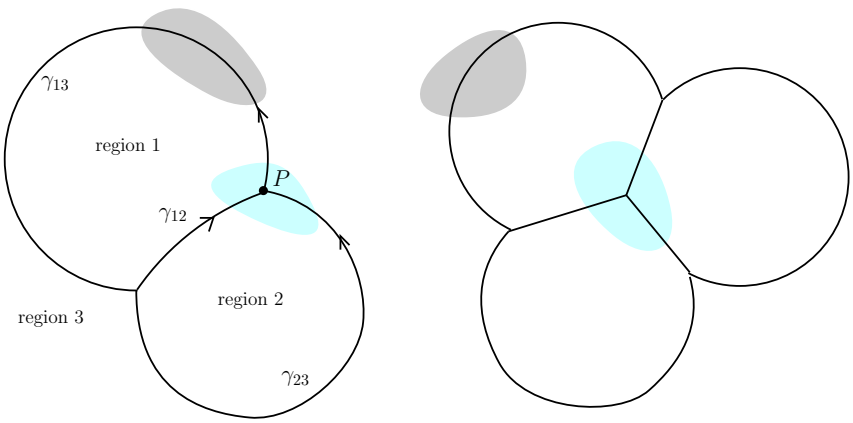

図 2：複数の泡が接触している問題

図 2 のようにシャボン玉が 2 つや 3 つくっついているときの形状を求める．最もシンプルなケースとして 2 個の泡を考える．図 2 の記号の通り泡が区切る領域に 1，2，3 と番号をふると，それぞれの領域を隔てる「界面」なる曲線を隣り合う領域の番号で表す．そのとき，泡 1 は $\gamma_1 = \gamma_{13} \cup \gamma_{12}$，泡 2 は $\gamma_2 = \gamma_{23} \cup (-\gamma_{12})$ の曲線で表される．

ラグランジュ未定乗数法により，汎関数

$$F(\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}) = L(\gamma_{12}) + L(\gamma_{13}) + L(\gamma_{23}) + \lambda_1 A(\gamma_1) + \lambda_2 A(\gamma_2)$$

を最小化すればよい．前節と同じように変分を計算するが，今回は試験関数として 2 種類のものを考える．一つは台（関数がゼロでない領域の閉包）がすべてのジャンクション（接合点）から離れているような試験関数（図 2 では灰色），もう一つは台がひとつだけの接合点にかかっているような試験関数（図 2 では青）である．

図 2（左）の灰色の台を持つような試験関数をとると，汎関数において影響する項は

$$L(\gamma_{13}) + \lambda_1 A(\gamma_{13})$$

のみである（ここで，試験関数による摂動は γ_{12} を変えないので，面積項で γ_{13} からの貢献だけ考えればよいという意味で A の引数を γ_{13} とした）．しかし，これは前節と全く同じ状況になっており，接合点から離れたところの曲線はすべて円の一部であることがわかる．

よって，あとは接合点で成り立つ条件を求めればよい．図 2（左）の青い領域に台がある試験関数 $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を考えて，三つの曲線を反時計回りにパラメータ表示する：$\gamma_{12}(s), s \in [0, \ell_{12}]$, $\gamma_{13}(s), s \in [0, \ell_{13}], \gamma_{23}(s), s \in [0, \ell_{23}]$．ここで，$\gamma_{12}(\ell_{12}) = \gamma_{13}(0) = \gamma_{23}(\ell_{23}) = P$ が接合点となることに注意する．また，k_{12}, k_{13}, k_{23} の値を次が成り立つように決める：

$$\psi(\gamma_{12}(s)) = 0 \ \forall s \in [0, k_{12} + \delta], \quad \psi(\gamma_{13}(s)) = 0 \ \forall s \in [k_{13} - \delta, \ell_{13}], \quad \psi(\gamma_{23}(s)) = 0 \ \forall s \in [0, k_{23} + \delta].$$

ψ の台の取り方より，このような k_{12}, k_{13}, k_{23} は存在する．ただし，δ は十分小さい正数である．$\phi_{12}(s) = \psi(\gamma_{12}(s)), \phi_{13}(s) = \psi(\gamma_{13}(s)), \phi_{23}(s) = \psi(\gamma_{23}(s))$ とおいて，前節と同様の計算をすると，次の式を得る：

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} F(\gamma + \varepsilon\phi)\Big|_{\varepsilon=0} \quad = \quad & \int_{k_{12}}^{\ell_{12}} \frac{\gamma_{12}' \cdot \phi_{12}'}{|\gamma_{12}'|}\, ds + \int_0^{k_{13}} \frac{\gamma_{13}' \cdot \phi_{13}'}{|\gamma_{13}'|}\, ds + \int_{k_{23}}^{\ell_{23}} \frac{\gamma_{23}' \cdot \phi_{23}'}{|\gamma_{23}'|}\, ds \\
& + \frac{\lambda_1}{2} \int_0^{k_{13}} \left((\gamma_{13})_1 (\phi_{13})_2' + (\gamma_{13})_2' (\phi_{13})_1 - (\gamma_{13})_2 (\phi_{13})_1' - (\gamma_{13})_1' (\phi_{13})_2 \right) ds \\
& + \dots
\end{aligned}$$

面積項の変分が長いため，代表として γ_1 が囲う面積への γ_{13} による貢献のみ記した．部分積分を行う前の式を書いたのは，前節の計算と違って，部分積分において境界項が現れるからである．

実際,

$$\begin{aligned}
\int_0^{k_{13}} \frac{\gamma_{13}' \cdot \phi_{13}'}{|\gamma_{13}'|}\, ds &= -\int_0^{k_{13}} \left(\frac{\gamma_{13}'}{|\gamma_{13}'|}\right)' \cdot \phi_{13}\, ds - \frac{\gamma_{13}'}{|\gamma_{13}'|}(0) \cdot \phi_{13}(0) \\
\int_0^{k_{13}} \left((\gamma_{13})_1 (\phi_{13})_2' - (\gamma_{13})_2 (\phi_{13})_1'\right)\, ds &= \int_0^{k_{13}} \left(-(\gamma_{13})_1' (\phi_{13})_2 + (\gamma_{13})_2' (\phi_{13})_1\right)\, ds \\
&\quad -(\gamma_{13})_1(0)(\phi_{13})_2(0) + (\gamma_{13})_2(0)(\phi_{13})_1(0)
\end{aligned}$$

$s = k_{13}$ での値が現れないのは，$\phi_{13}(k_{13}) = 0$ だからである．

変分がゼロという条件は次のように書ける：

$$\begin{aligned}
& -\int_{k_{12}}^{\ell_{12}} \left(\frac{\gamma_{12}'}{|\gamma_{12}'|}\right)' \cdot \phi_{12}\, ds - \int_0^{k_{13}} \left(\frac{\gamma_{13}'}{|\gamma_{13}'|}\right)' \cdot \phi_{13}\, ds - \int_{k_{23}}^{\ell_{23}} \left(\frac{\gamma_{23}'}{|\gamma_{23}'|}\right)' \cdot \phi_{23}\, ds \\
& -\lambda_1 \int_{k_{12}}^{\ell_{12}} \nu_{12} \cdot \phi_{12} |\gamma_{12}'|\, ds - \lambda_1 \int_0^{k_{13}} \nu_{13} \cdot \phi_{13} |\gamma_{13}'|\, ds \\
& -\lambda_2 \int_{k_{23}}^{\ell_{23}} \nu_{23} \cdot \phi_{23} |\gamma_{23}'|\, ds + \lambda_2 \int_{k_{12}}^{\ell_{12}} \nu_{12} \cdot \phi_{12} |\gamma_{12}'|\, ds \\
= \; & -\tau_{12}(\ell_{12}) \cdot \phi_{12}(\ell_{12}) + \tau_{12}(0) \cdot \phi_{13}(0) - \tau_{23}(\ell_{23}) \cdot \phi_{23}(\ell_{23}) \\
& + \frac{\lambda_1}{2} \gamma_{12}^{\perp}(\ell_{12}) \cdot \phi_{12}(\ell_{12}) - \frac{\lambda_1}{2} \gamma_{13}^{\perp}(0) \cdot \phi_{13}(0) - \frac{\lambda_2}{2} \gamma_{12}^{\perp}(\ell_{12}) \cdot \phi_{12}(\ell_{12}) + \frac{\lambda_2}{2} \gamma_{23}^{\perp}(\ell_{23}) \cdot \phi_{23}(\ell_{23})
\end{aligned}$$

ただし，ν_{ij} は領域 i に向く界面 γ_{ij} への単位法線ベクトル，τ_{ij} は γ_{ij} への単位接戦ベクトル，$\gamma_{ij}^{\perp} = (-(\gamma_{ij})_2, (\gamma_{ij})_1)$ である．

$\phi_{12}(\ell_{12}) = \phi_{13}(0) = \phi_{23}(\ell_{23}) = \psi(P)$，そして，$\gamma_{12}(\ell_{12}) = \gamma_{13}(0) = \gamma_{23}(\ell_{23}) = P$ という事実に気づくと，上式の最後の行が消えることがわかる．それ以外の項を整理すれば,

$$\begin{aligned}
& -\int_{k_{12}}^{\ell_{12}} (\kappa_{12} - \lambda_1 + \lambda_2)(\phi_{12} \cdot \nu_{12}) |\gamma_{12}'|\, ds - \int_0^{k_{13}} (\kappa_{13} - \lambda_1)(\phi_{13} \cdot \nu_{13}) |\gamma_{13}'|\, ds \\
& + \int_{k_{23}}^{\ell_{23}} (\kappa_{23} - \lambda_2)(\phi_{23} \cdot \nu_{23}) |\gamma_{23}'|\, ds = \Big(-\tau_{12}(\ell_{12}) + \tau_{13}(0) - \tau_{23}(\ell_{23}) \Big) \cdot \psi(P)
\end{aligned}$$

を得る．試験関数 ψ の任意性より，以下の 4 つの条件式が成立しなければならない：

$$\kappa_{12} = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \kappa_{13} = \lambda_1, \quad \kappa_{23} = \lambda_2, \quad (\tau_{12} - \tau_{13} + \tau_{23})(P) = 0.$$

最初の 3 式はそれぞれの曲線が円の一部であるという既にわかっていることを言っているが，それぞれの円の半径の関係も見えてきている．例えば，二つの泡の面積が等しいとき，$\kappa_{12} = \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ となるので，泡の間の界面は直線になる．また，符号の関係で，γ_{12} の曲線は大きい方の泡に食い込む形になることもわかる．

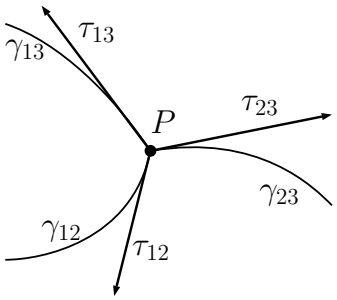

図 3：接合点における接線ベクトルの再定義

一方で，最後の式は接合点の角度に対する条件である．パラメータの取り方によって接線ベクトル τ の符号が変わるためわかりにくいが，$\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ を図 3 のように定義しなおせば，4 つ目の式は

$$\tau_{12} + \tau_{13} + \tau_{23} = 0 \qquad \text{at } P$$

となる．τ_{ij} はすべて単位ベクトルだから，これは接合点の角度が $120° - 120° - 120°$ であることを意味する．（これを Herring の条件と言う．）

以上でわかったことを整理する．シャボン玉が複数個くっついているときは，それぞれの石鹸膜は円の一部の形をしている．それぞれの円の半径は指定された面積で決まる．また，3 本の界面が接合点で交わるとき，必ず対称な $120° - 120° - 120°$ の接合点となる．この結果はシャボン玉や接合点の数に依らず成り立つ．

Problems

Problem 3.3 3.4 節の二つのシャボン玉がくっついた問題の一般化を考える．すなわち，それぞれの界面の表面張力が異なってもよいとし，与えられた面積のもとで長さ汎関数

$$aL(\gamma_{12}) + bL(\gamma_{13}) + cL(\gamma_{23})$$

を最小化する．$a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のときの接合点が安定する角度を求めよ．

Problem 3.4 3 重接合点の場合について調べたが，4 重接合点の場合を長さ汎関数の停留値とその安定性の観点から論じよ．$90° - 90° - 90° - 90°$ の接合点は不安定であるとは，長さ汎関数の停留値であるが，そのどの近傍にもより小さい長さをもつ曲線の形状が存在するという意味である．

3.5 一般の問題について

$\mathbb{R}^n$-空間において，$(m-1)$-次元のフレーム（境界）に張られた m-次元「曲面」のうち，面積が最小なものを求める一般の問題は，未解決な部分が残っている難しい問題である．写像の像として対象の曲面を表現して証明する当初の試みは失敗したから，解を $\mathbb{R}^n$ の部分集合のより広いクラスで探すアイデアが現れた．これをきっかけに幾何学的測度論という新しい分野が誕生した．主観的に言えば「想像できるすべての形」をカバーする正規カレントという概念が定義され，非常に一般的でありながら，C^1-曲面にある意味で近いものであるから，接空間など滑らかな曲面

に対応する量が定義できるクラスであることがわかった．この理論の構築の土台にあるのは，どの部分集合でも測れて，滑らかな曲面の場合ルベーグ測度と一致する $\mathbb{R}^n$ における m-次元ハウスドルフ測度の存在である．さらに，正規カレントのクラスはよいコンパクト性の性質をもつので，この広いクラスで面積最小のカレントの存在を示すことに成功した．

しかし，このようなカレントが一般的すぎて，それだけでは幾何学的な性質を備えているかどうか不明である．そのため，存在が示されたカレントが滑らかな多様体であるという正則性の定理を証明することが次の課題となった．空間の次元が 7 以下の場合，その結果が示されたが，8-次元以上では特異性が現れることが知られている．しかし，その特異性についてまだ詳しいことがわかっていない．それ以外にも多くの未解決問題がある．例えば，四面体のフレームに張られた面積最小の曲面は何かということさえ知られていない．

複数のシャボン玉がくっついた問題について言えば，上で二つのシャボン玉が接している場合を考えたが，面積が最小な形がこのような位相をもつとは限らない．一つの泡が二つの部分に分かれた方が面積を小さくできるかもしれないし，泡同士の間に空洞を挿入することも考えられる．このように位相を含めて面積最小なものを求めるとなるとかなり複雑になる．このシャボン玉のクラスターの問題については，与えられた体積のもと面積を最小にするクラスターの存在とその正則性について多くのことがわかっているが，実際にその具体的な形は何かという質問は難問のままである．現在，知られている結果として，2 次元平面で 3 個以下の泡の場合と 3 次元空間で 2 個の泡（Hutchings, 2000）のみである．

以上のような興味深い話題についてより詳しく読みたいかたは，Frank Morgan による [12] の入門的な本の最新版を参照してください．和訳もある（[13]）が，アップデートされていない古いバージョンである．

References

[1] 岡崎 誠，べんりな変分原理，共立出版，2014.

[2] I.M. Gelfand, S.V. Fomin, *Calculus of Variations*, Dover Books on Mathematics, 2000.

[3] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, 2008 (Chapter 8).

[4] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *Calculus of Variations I*, Springer, 2004.

[5] B. Dacorogna, *Introduction To The Calculus Of Variations*, Icp, 2008.

[6] C. Isenberg, *The Science of Soap Films and Soap Bubbles*, Dover, 1992.

[7] P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré, 表面張力の物理学 ーしずく，あわ，みずたま，さざなみの世界ー，吉岡書店，2003.

[8] J. Oprea, *The Mathematics of Soap Films: Explorations with Maple*, AMS, 2000.

[9] M. Mesterton-Gibbons, *A Primer on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, AMS, 2009.

[10] M. Kot, *First Course in the Calculus of Variations*, AMS, 2014.

[11] F. Maggi, *Set of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems*, Cambridge University Press, 2012.

[12] F. Morgan, *Geometric Measure Theory, A Bigginer's Guide*, Academic Press, 2009.

[13] F. モーガン，幾何学的測度論—石けん膜の数理解析—，共立出版，1997. ([12] の和訳)

偏微分方程式と変分法（第4回）

概要
この講義では，運動する物体のモデル方程式の導き方を紹介し，その際の変分原理の役割を明らかにする．勾配流と加速度に対する法則という二つのアプローチについて触れるが，詳しい理論を述べず，簡単な例による解説にとどめる．

勾配流については例えば，[7] の講義ノート，ハミルトンの原理は [1] を参照できる．

これまで弾性膜やシャボン玉の定常な形状を考えてきたが，ここではそのようなものが定常状態にないときにどのように変形するかという発展問題を扱う．物体の運動モデルのうち，基本的な二つのアプローチを紹介する：勾配流モデルとニュートンの第 2 法則によるモデルである．

4.1 勾配流について

エネルギーを表す汎関数が与えられたとき，ある状態からスタートするこの汎関数に対する勾配流はエネルギーを最も早く減少させる動きとして定義される．

まず，有限次元，すなわち汎関数が多変数関数 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の場合で解説する．簡単のために φ が凸な C^2-関数であるとする．関数 φ のグラフが $\mathbb{R}^n$-空間での質点の位置によるエネルギー（いわゆる energy landscape）を表しているとして，ある場所 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ に存在する質点がどのように動けばそのエネルギーを最も早く減らすことができるかを考える．負の勾配ベクトル $-\nabla\varphi(x)$ は点 x において関数 φ が最も早く減少している方向をもち，勾配の大きさはその減少の度合いを表している．よって，点 x_0 から始まる関数 φ に対する勾配流

$$u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

を次の常微分方程式に対する初期値問題の解である関数として定義するのが自然である：

$$\frac{d}{dt}u(t, x_0) = -\nabla\varphi(u(t, x_0)) \qquad \forall t > 0 \tag{4.1}$$

$$u(0, x_0) = x_0. \tag{4.2}$$

上記の微分方程式が n 本の式を連立させたものであることに注意する．スタート地点 x_0 を固定するば，関数 $u(t, x_0), t > 0$ は時間 t をパラメータとする $\mathbb{R}^n$ 内の曲線の表示である．

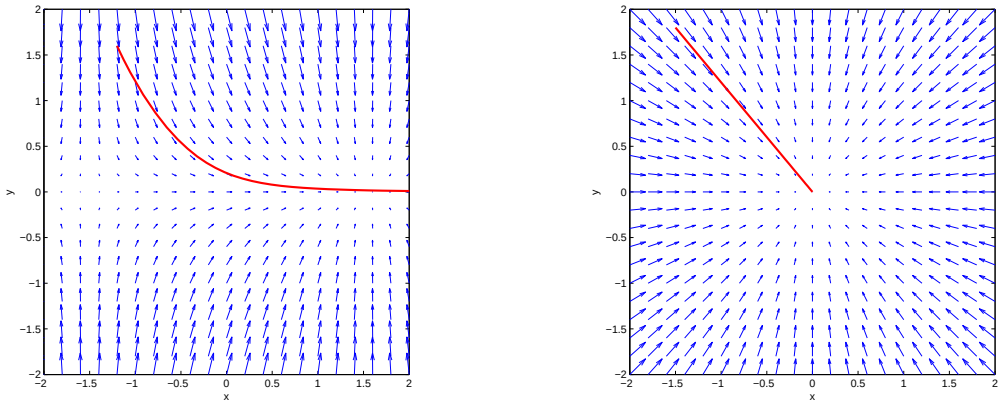

図 1：(左) 関数 $y^2 - x\cos x$ の（マイナス）勾配ベクトル場とそれに沿った勾配流の経路の例

(右) 以下の例で扱う関数 $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ の（マイナス）勾配ベクトル場と対応する勾配流

Example $n=2, \varphi(x_1,x_2)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$ のとき，$\varphi(x_1,x_2)=(\partial\varphi/\partial x_1, \partial\varphi/\partial x_2)=(x_1,x_2)$ だから，$-\nabla\varphi(u)=-u$ となり，初期値問題は

$$\frac{d}{dt}u(t)=-u(t), \qquad u(0)=x^0=(x_1^0,x_2^0)$$

として書かれる．この解は

$$u(t,x^0)=e^{-t}x^0$$

となる．よって，$\varphi(x_1,x_2)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$ の勾配流は初期点 x^0 から原点に向かって直線上に動き，速度が指数的に減衰するような運動である．φ のグラフは原点に最小値をもつ回転放物面であることに気づけば，当然の結果である．

今，多変数関数 φ の代わりにヒルベルト空間 H 上の汎関数 $F: H\to\mathbb{R}$ を考える．上と同じような勾配流を導入するには，まず汎関数の勾配を定義する．

Definition 4.1 線形作用素 $F'(v)(\cdot): H\to\mathbb{R}$ が存在し，

$$\lim_{w\to 0, w\in H}\frac{|F(v+w)-F(v)-F'(v)(w)|}{\|w\|_H}=0$$

が成り立つならば，この作用素を点 v における F のフレシェ*(Fréchet)* 微分と呼ぶ．

Definition 4.2 汎関数 $F: H\to\mathbb{R}$ が点 $v\in H$ においてフレシェ微分可能であるとする．そのとき，リースの定理より，

$$(g,w)_H=F'(v)(w) \qquad \forall w\in H$$

が成り立つような $g\in H$ が存在する．この元 g を $\nabla F(v)$ と書き，v における F の勾配と呼ぶ．

Example

(1) $H = \mathbb{R}^n$, $F = \varphi$ といった有限次元の場合，F の勾配は通常の公式

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)$$

で与えられる．

(2) ソボレフ空間 $H = H_0^1(0,1)$ は大雑把に言えば，1 階微分の 2 乗が積分可能で $x = 0, 1$ においてゼロとなるような $(0,1)$ 上の関数を集めた空間である．内積を

$$(f,g)_{H^1} = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

と定義する．汎関数 $F : H^1(0,1) \to \mathbb{R}$ を

$$F(u) = \int_0^1 \frac{1}{2}(u'(x))^2\,dx$$

で定め，その勾配を求める．フレシェ微分は変分の計算と同様，

$$F'(v)(w) = \int_0^1 v'w'\,dx$$

となる．したがって，

$$F'(v)(w) = -\int_0^1 v''w\,dx = (-v'', w)_{H^1}$$

より，$\nabla F(v) = -v''$ であることがわかる．

ヒルベルト空間 H の元 u_0 から始まり，汎関数 $F : H \to \mathbb{R}$ に対する勾配流 $u : \mathbb{R} \times H \to H$ は次の条件を満たす関数として定義する：

$$\frac{d}{dt}u(t,u_0) = -\nabla F(u(t,u_0)), \qquad u(0,u_0) = u_0.$$

Example $u_0 \in H_0^1(0,1)$ が与えられたとき，最後の例で調べた汎関数

$$F(u) = \int_0^1 \frac{1}{2}(u'(x))^2\,dx \quad : \; H^1(0,1) \to \mathbb{R}$$

に対する勾配流 $u(t)$ は各 $t > 0$ に対して $H_0^1(0,1)$ の元，つまり x の関数であるので，それを $u(t,x)$ と書くと，

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), \qquad u(0,x) = u_0(x)$$

で決まる．

これは熱方程式である．区間 $(0,1)$ を占めるはりがねが初期温度 $u_0(x)$ を与えられたとき，温度の時間変化を表すモデル方程式である．

この汎関数をもともと弦の弾性エネルギーとして導入したが，それに対する勾配流は拡散の性質を持つので，普段見られる弦の振動と異なる運動である．一般的には勾配流は細かい変化を無視した，時間の長いスケールで見た運動のモデルとして解釈できる．弦の場合は，強い抵抗による減衰を表していると言える．一方では，エネルギーを保存する運動である振動は次節で紹介するアプローチから得られる．

Problems

Problem 4.1 式

$$F'(v;w) = \lim_{t\to 0} \frac{F(v+tw)-F(v)}{t}$$

で定義される作用素 $F'(v;\cdot) : w \in H \mapsto F'(v;w) \in \mathbb{R}$ が連続な線形作用素ならば，それをガトー (Gâteaux) 微分と呼ぶ．汎関数 F がフレシェ微分可能ならばガトー微分可能であるが，その逆が成り立たないことを示せ．

Problem 4.2 滑らかなジョルダン曲線を初期値とした 3.3 節の長さエネルギー L の勾配流はどんな曲線の動きか調べよ．（ヒント：曲線の各点は，大きさがその点での曲線の曲率に比例し，向きが曲線への法線方向である速度で動く運動，いわゆる平均曲率流である．）

4.2 弦の振動方程式の導出

ニュートンの第 2 法則に基づいて運動方程式を導く例を挙げる．両端を固定した弦の振動を表す方程式を以下の**仮定**のもとで導出する．

1. 弦の運動はある平面に限られる（以下それを xy-平面とする）
2. 弦の各部分は x 軸と垂直な方向にのみ動く（横波）
3. 弦は一様な線密度 ρ を持つ
4. 弦の張力 T は運動の間一定で，弦の接線方向に働く
5. 弦と x 軸とが成す角度 θ は微小である

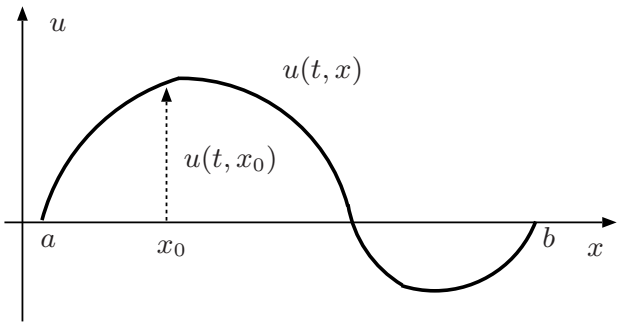

図 2：振動する弦の問題の設定

従って，次の設定である：

独立変数 (independent variable) ： 時刻 t，1 次元の位置座標 x
未知関数 (unknown function) ： 弦上の点 x の時刻 t での垂直方向の変位 $u(t,x)$

弦の微小部分 $[x, x+\Delta x]$ の運動を考え，**Newton の第二法則** $F = ma$ を適用する．このとき，微小部分の質量は $m = \rho\Delta x$ となり，その加速度は $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)$ となる．また，部分に働く外力 F は，左右両端における張力の垂直方向の成分の合計である：

$$F = T\sin\{\theta(t, x+\Delta x)\} + T\sin\{\theta(t,x)\}$$

ここで，5. の仮定を用いて，$\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta = \pm\frac{\partial u}{\partial x}$ を得る．

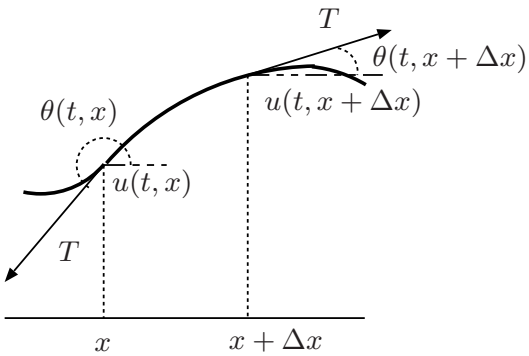

図 3：弦の微小部分に働く力

従って，張力が働く方向を考慮すると，

$$F = T\frac{\partial u}{\partial x}(t, x+\Delta x) - T\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$$

以上により，微小部分に対する Newton の運動方程式は

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = T\frac{\partial u}{\partial x}(t,x+\Delta x) - T\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$$

となる．この両辺を Δx で割り，$\Delta x \to 0$ とすれば，

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$$

という偏微分方程式が得られた．定数 $c = \sqrt{T/\rho}$ を導入して，上式は

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{または} \qquad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

の形に書かれ，**空間 1 次元の波動方程式** (wave equation) と呼ばれる．

Remark

(1) 導出を簡単にするため多くの仮定をおいて得られた方程式なので，この「モデル」が現象を十分に表現できているかを数学的に・物理的に確認しなければならない．

(2) （外力について）以上で考えた弦に重力が作用するとすれば，F に $-g\rho\Delta x$ が加わる．より一般に，時刻 t において弦上の点 x で弦に垂直な方向に単位質量当り $f(t,x)$ の力が働くとき，$f(t,x)\rho\Delta x$ が加わり，得られる偏微分方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

となる．

(3) （抵抗について）弦が空気から抵抗を受けることを考えるとき，最も基本的な抵抗は速度に比例するものである．速度抵抗を取り入れた方程式は次のようになる．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k\frac{\partial u}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

(4) （条件について）導かれた方程式はこのままだと，無限に多くの解を持つ．実際に弦の運動状態を決定するには，方程式に種々の条件を付加する必要がある．

- **初期条件** (initial conditions)　初期時刻 $t = 0$ における弦の形と速度を指定する．

$$\begin{aligned} u(0,x) &= u_0(x) && \text{弦の初期位置} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= u_1(x) && \text{弦の初期速度} \end{aligned}$$

- **境界条件** (boundary conditions)　境界における弦の挙動を指定する．弦の静止位置が x

軸上の線分 $[a, b]$ であるとする．基本的な境界条件は 2 種類ある．

* Dirichlet 境界条件（境界における解の値を指定する）

$$u(t, a) = v_a(t), \qquad u(t, b) = v_b(t)$$

例. 弦を両端でゼロの高さで固定した状況を表す境界条件は

$$u(t, a) = u(t, b) = 0$$

* Neumann 境界条件（境界における解の法線微分の値を指定する）

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, a) = w_a(t), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t, b) = w_b(t)$$

例. 弦の両端に輪をつなぎ，それを平行に置いた棒に通しておくと，(摩擦を無視すれば）弦は上下に自由に動ける．この状態を表す境界条件は

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, a) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, b) = 0$$

Problems

Problem 4.3 次の設定の下，弦のより一般的な振動方程式を導出せよ．

(1) 張力 T は定数ではなく，弦上の位置 x に依存する関数 $T(x)$ である．

(2) 弦の変形は大きくなる可能性があり，$\sin\theta \approx \tan\theta$ という近似が妥当ではない．

4.3 ハミルトンの原理

束縛力（拘束条件）を除いて，すべての力がポテンシャルをもつような系を考える．この系の全運動エネルギーを K，全ポテンシャル・エネルギーを V とおくと，

$$L = K = V$$

という量は系のラグランジュ関数（ラグランジアン）と呼ぶ．また，それをある時刻 t_1 から他の時刻 t_2 まで積分した量

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

を作用積分（action integral）と呼ぶ．

ハミルトンの原理

系が行う運動は作用積分の停留値を与えるものである．

この原理より求めたい未知関数（例えば，弦の形状を表す関数）は時間に依存するものだから，停留値を与えるものがあれば，それが t_1 と t_2 の間の運動を表していることになる．

Example 前節で導いた弦の振動方程式をハミルトンの原理より導出する．前節と同じ設定を用いる．

弦の微小部分の運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ より，$\frac{1}{2}\rho\Delta x(\frac{\partial u}{\partial t})^2$ となるので，

$$K(u) = \int_a^b \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx$$

と書ける．また，弦のポテンシャル・エネルギーとして 2.1 節で導いた弾性エネルギー

$$V(u) = \int_a^b \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

を採用する．よって，作用積分は

$$A(u) = \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \left\{\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)^2 - \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2\right\} dx\,dt$$

となる．

作用積分は時間 t と空間 x の 2 変数関数を $\mathbb{R}$ へ写す汎関数で，その停留値を以前と同様に，「変分がゼロ」という条件より求める．詳しい関数空間の設定を省略して形式的に計算する．t と x の関数である試験関数 $\varphi(t,x)$ を，時刻 t_1 と時刻 t_2 の近傍，そして両端 a,b の近傍で消えるように選ぶ．すると，

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}A(u+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \left\{\rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - T\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right\} dx\,dt$$

を得るが，ここで t と x それぞれについて部分積分を施し，試験関数の選び方より境界上の値がゼロになることに注意すると，

$$0 = \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \left\{-\rho\frac{\partial u^2}{\partial t^2} + T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\varphi\,dx\,dt$$

に変形される．$(t_1,t_2)\times(a,b)$ の内側では φ が任意だから，この領域において 4.2 節と同じ波動方程式が成り立つことを導いた．初期条件と境界条件は別途，現象の物理的な性質より指定する．

Problems

Problem 4.4 静止した滑らかなジョルダン曲線を初期値とした 3.3 節の長さエネルギー L に対するハミルトン原理を書き，曲線の運動方程式を導け．シンプルな方程式が得られるよう，曲線が伸びてもその密度が変わらないなど，適当な仮定をおいてもよい．

References

[1] 岡崎 誠，べんりな変分原理，共立出版，2014.

[2] I.M. Gelfand, S.V. Fomin, *Calculus of Variations*, Dover Books on Mathematics, 2000.

[3] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, 2008 (Chapter 8).

[4] B. Dacorogna, *Introduction To The Calculus Of Variations*, Icp, 2008.

[5] M. Mesterton-Gibbons, *A Primer on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, AMS, 2009.

[6] M. Kot, *First Course in the Calculus of Variations*, AMS, 2014.

[7] M.A. Peletier, *Variational Modelling*, lecture notes, 2011 (http://www.win.tue.nl/ mpeletie/Onderwijs/VariationalModelling/Notes/LectureNotes110919.pdf).