レポート問題 05（微分積分続論 II）

提出期限：2020 年 6 月 4 日 23:55

問題 5.1　次の微分方程式を積分因子を見つけて解け．

(1) $\left(x^2 \sin t + \cos t\right)\, dt - 2x \cos t\, dx = 0$

(2) $e^x\, dt - t\left(2tx + e^x\right)\, dx = 0$

(3) $x\left(x^4 - 2t^3\right)\, dt + t\left(t^3 + 2x^4\right)\, dx = 0$

(4) $x\, dt + \left(t + t^2 x\right)\, dx = 0$

注：今回の問題では解の存在と一意性の確認は必須ではありません．積分因子を用いて解いて，解 $x(t)$ の満たす代数方程式を整理して書けば十分です．

レポート問題 06（微分積分続論 II）

提出期限：2020 年 6 月 11 日 23:55

問題 6.1　次の関数が $\mathbb{R}$ 上で一次独立であるか答えよ．

(1) $f_1(x) = 0,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = e^x$

(2) $f_1(x) = 3,\ f_2(x) = \cos^2 x,\ f_3(x) = \sin^2 x$

(3) $f_1(x) = 1 + x,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2$

問題 6.2　次の方程式の一般解を求めよ．

(1) $x'' + x' + x = 5t^2 - t$

(2) $x''' + 2x'' - x' - 2x = 20te^{3t} + 19e^{3t}$

(3) $x'' - x = t \sin t$

レポート問題 07（微分積分続論 II）

提出期限：2020 年 6 月 18 日 23:55

問題 7.1　次の行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}_0$ に対して，e^{tA} を求めて，初期値問題

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

を解け.

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & -3 \\ -16 & -12 & 5 \\ -8 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

レポート問題 08（微分積分続論 II）

提出期限：2020 年 6 月 25 日 23:55

問題 8.1　射影行列の方法を用いて，以下の初期値問題　$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$　を解け．

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

レポート問題 09（微分積分続論 II）

提出期限：2020 年 7 月 2 日 23:55

問題 9.1　次の行列 A に対する微分方程式 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ の解軌道の図を相平面上に描け．

注：想定される解き方は，射影行列または固有ベクトルと一般解の式を求めて，斜交座標系で書き直して，数本の解軌道を描く，という「解答付き問題」の例題 7.1 と同じものです．独立変数 t が増えるときの解の動きを表す矢印をそれぞれの解軌道にふること．解軌道のプロットは手書きでも Matlab などのソフトによる出力でもかまわない．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

レポート問題 10（微分積分続論 II）

提出期限：2020 年 7 月 9 日 23:55

問題 10.1　関数 $x_1, x_2 : (-1,1) \to \mathbb{R}$ を

$$x_1(t) = \begin{cases} t^3, & t \in (-1,0] \text{ のとき} \\ 0, & t \in (0,1) \text{ のとき} \end{cases}, \qquad x_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-1,0] \text{ のとき} \\ t^3, & t \in (0,1) \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義する．

(1) $x_1(t), x_2(t)$ が $t \in (-1,1)$ において 1 次独立な関数であることを示せ．

(2) ロンスキー行列式 $\eta(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}$ の値を求めよ．

(3) 2 階常微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}(t) + a(t)\dfrac{dx}{dt}(t) + b(t)x(t) = 0$ を 1 階化せよ．ここで，$a(t), b(t) : (-1,1) \to \mathbb{R}$ は与えられた連続関数である．

(4) $x_1(t), x_2(t)$ が区間 $t \in (-1,1)$ において微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}(t) + a(t)\dfrac{dx}{dt}(t) + b(t)x(t) = 0$ をともに満たすような連続関数 $a(t), b(t)$ が存在しないことを示せ．

問題 10.2　開区間 $\mathcal{K}$ と連続な関数 $p, q : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ に対して，$x_1, x_2 : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ を

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$$

の解とする．このとき，定数 $c \in \mathbb{R}$ が存在し，ロンスキー行列式

$$\eta(t) = x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t), \qquad t \in \mathcal{K}$$

は $\eta(t) = ce^{-P(t)}$ と書けることを示せ．ただし，P は p の原始関数である．

（ヒント：x_1 に対する微分方程式の両辺に x_2 をかけて，x_2 に対する微分方程式の両辺に x_1 をかける．）

レポート問題 11（微分積分続論 II）

提出期限：2020 年 7 月 16 日 23:55

問題 11.1　初期値問題 $x'(t) = 2tx(t),\ x(0) = x_0$ に対し逐次近似を実行せよ．

(1) Picard の逐次近似 $x_n(t), n = 0, 1, \ldots$ を具体的に求めよ．

(2) $T > 0$ を固定すれば，$\{x_n(t)\}$ という関数列が区間 $[-T, T]$ で一様収束することを示せ．

(3) $\{x_n(t)\}$ の収束先を求め，初期値問題の解であることを確かめよ．

問題 11.2　次の初期値問題を考える：

$$t^2 \frac{dx}{dt} = x^3, \qquad x(1) = x_0$$

(1) コーシーの定理を用いて，$x_0 \neq 0$ ならば，初期条件を満たす解 $x(t)$ がある区間 $t \in [1 - \delta, 1 + \delta]$ $(\delta > 0)$ でただ一つ存在することを示せ．

(2) 初期値問題の解 $x(t)$ が t の区間 $(-\infty, \infty)$ 全体で存在するような初期値 x_0 を全て求めよ．

レポート問題 12（微分積分続論 II）

提出期限：2020 年 7 月 23 日 23:55

問題 12.1　微分方程式に対する初期値問題

$$t^2\frac{dx}{dt} = x^2 + 2xt, \qquad x(-1) = 2$$

について次の問いに答えよ．

(1) $\delta > 0$ が存在し，この問題の解 $x(t)$ は区間 $t \in [-1-\delta, -1+\delta]$ でただ一つ存在することを示せ．

(2) 設問 (1) で存在を示した解 $x(t)$ を具体的に求めよ．

(3) 上の初期条件を満たす最大解をすべて求めよ．

レポート問題 13（微分積分続論 II）

提出期限：2020 年 7 月 30 日 23:55

問題 13.1　区間 $t \in (0, \infty)$ において，パラメータ $\alpha \in \mathbb{R}$ を含む初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + \frac{2\alpha}{t}, \qquad x(1) = -1$$

を考える．次のステップを実行して，$\alpha = 0$ における解 $x(t, \alpha)$ の α についての微分を求めよ．

(1) 解 $x(t, \alpha)$ が $t \in (0, \infty)$ で定義される範囲において α について連続微分可能であることを示せ（講義で紹介した定理を証明なしで引用してもかまわない）．

(2) $\alpha = 0$ のときの解 $x(t, 0)$ を求めよ．

(3) $u(t) = \frac{\partial x}{\partial \alpha}(t, 0)$ が満たす変分方程式と $u(1)$ に対する初期条件を導け．

(4) 設問 (3) で得られた u に対する初期値問題を解いて，$\frac{\partial x}{\partial \alpha}(t, 0)$ を求めよ．

(5)* （おまけ問題）α が絶対値で小さいときの初期値問題の解 $x(t, \alpha)$ の近似を与えよ．