問題集（微分積分続論 II）

作成者：Karel Švadlenka　　更新：2020 年 7 月 9 日

- *マークのつく問題は基礎問題（試験のために知っておくとよい問題）です．

問題 1.1*　空気の抵抗と重力の影響を考慮した単振動の方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -c\frac{dx}{dt} - kx + mg$$

を連立 1 階微分方程式に書き直せ．ただし，c, g, k, m は正の実数である．

問題 1.2*　連立 1 階微分方程式

$$\begin{aligned} u' &= au + bv \\ v' &= cu + dv \end{aligned}$$

から v を消去し，u に関する微分方程式を導け．ここで，$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ は定数である．

問題 1.3　エジプトの木棺の木材に含まれる炭素 14 の量が現在の木材に含まれる炭素 14 の量の 60%であることが測定によりわかった．微分方程式を用いて，木棺の作られた年代を特定せよ．

問題 1.4　$a, b \in \mathbb{R}$ が $a^2 - 4b < 0$ を満たすとする．方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の根を $\lambda = \alpha \pm i\beta$（$\alpha, \beta$ は実数）とおくと，関数

$$x(t) = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t - \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t\right)$$

が微分方程式

$$x'' + ax' + bx = 0$$

の解であり，初期条件

$$x(0) = 1, \qquad x'(0) = 0$$

を満たすことを示せ．

問題 1.5*　次の微分方程式に対する方向の場を，原点を中心とする領域において図示して，解曲線を合わせて数本描け（Matlab などのソフトウェアを使ってもかまわない）．

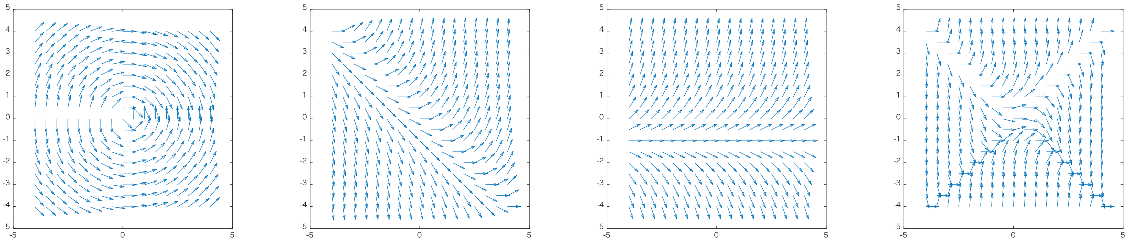
(1) $x' = x - t^2$

(2) $x' = -\dfrac{2tx}{1+t^2}$

(3) $x' = (1-t)x + \dfrac{t}{2}$

問題 1.6　次の微分方程式に対応する方向の場を図のなかから選べ．図の横軸は t，縦軸は x である．

(1) $x' = t + x$　　(2) $x' = x + 1$　　(3) $x' = -\dfrac{t}{x}$　　(4) $x' = x^2 - t^2$



(a) (b) (c) (d)

問題 1.7*　以下では微分方程式と複数の点が与えられる．それぞれの微分方程式に対する方向の場を図示し，与えられた点を通る解曲線を一つの図に描け．

(1) $x' = 2(x-4)$,　点：$(0,1); (0,4); (0,5)$

(2) $x' = x(t+x)$,　点：$(0,1); (0,-2); (0,\frac{1}{4}); (-1,-1)$

(3) $x' = x^2$,　点：$(0,1); (0,2); (0,-1); (0,0)$

(4) $x' = (x-1)(t+2)$,　点：$(0,-1); (0,1); (0,3); (1,-1)$

(5) $x' = \frac{tx}{t^2+4}$,　点：$(0,2); (0,-6); (-2\sqrt{3},-4)$

(6) $x' = x(2-x)$,　点：$(0,\frac{1}{2}); (0,1); (0,2)$

(7) $x' = (\sin t)(\sin x)$,　点：$(0,2)$

問題 1.8　次の微分方程式の解は初等関数を用いて表すことができない．オイラー法のプログラムを書くか，Matlab などのソフトウェアを用いるなどして，それぞれの初期値問題を数値的に解け．

(1) $x' = \cos(2t-x)$,　$x(0) = 2$

(2) $x' = x\left(\frac{1}{2} - \ln x\right)$,　$x(0) = \frac{1}{3}$

問題 2.1*　次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$x' - 1 = -x^2$$

三つの異なる特殊解を選んで，そのグラフを描け．

問題 2.2*　微分方程式

$$txx' = t^2 + x^2$$

に対し，初期条件

$$x(1) = 0$$

を満たす特殊解を求め，解のグラフを描け．

問題 2.3*　次の微分方程式を解いて，3 つ以上の異なる初期値に対する解のグラフを一つの図にまとめて図示せよ．

$$(t^2-t)x' + (1-2t)x + t^2 = 0$$

問題 2.4* [1] p.7　次の微分方程式を解け．

(1) $x' = \cot t \cdot \cot x$

(2) $(1+t)x + (1-x)tx' = 0$

問題 2.5* [1] p.9　次の微分方程式を解け．

(1) $x' = -\dfrac{2tx}{t^2+x^2}$

(2) $t \cdot \tan \dfrac{x}{t} - x + tx' = 0$

問題 2.6* [1] p.10　次の微分方程式を解け．

(1) $x' = -\dfrac{x}{t} + t^3$

(2) $x' + x\cos t = \sin t \cdot \cos t$

問題 2.7* [1] p.11　次の初期値問題を解け．

(1) $x' + x = t \sin t,\quad x(0) = 1$

(2) $tx' + x = t^3,\quad x(1) = a \in \mathbb{R}$

問題 2.8 [1] p.12　次の微分方程式を解け．

(1) $4tx' + 2x = tx^5$

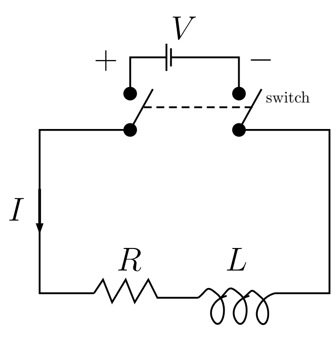
(2) $3x' - x\tan t = x^{-2}\cos t$

問題 2.9 [1] p.13　次の微分方程式を解け．

(1) $x' = x^2 - x - 2$

(2) $x' = -x^2 + \dfrac{x}{t} + t^2$

問題 2.10　抵抗 R（定数）と自己インダクタンス L（定数）を持つ，図のような電気回路を考える．スウィッチを入れると，回路は電源 V（定数）につながる．オームの法則に基づいて電流 I の時間変化を表す微分方程式を立て，スウィッチを入れたあとの電流の時間変化を調べよ．



問題 2.11　容器に 25 キロの塩（NaCl）を溶かした 300 リットルの塩水が入っている状態から次の実験を始める．1 リットル当たり塩 0.3 キロの濃度をもつ塩水を 15 リットル/1 分の速度で注いでいく．それと同時に，12 リットル/1 分の速度で容器から塩水を空けていく．容器のなかの液体が瞬時にかき混ぜられ，常に一様な濃度で保たれていると仮定し，以下の問いに答えよ．

(1) 時刻 t において，塩（NaCl）が容器に入っていく速度（kg/min）を求めよ．

(2) 時刻 t における容器の中の塩水の体積（ℓ）を求めよ．

(3) 時刻 t において，塩（NaCl）が容器を出ていく速度（kg/min）を求めよ．

(4) この混ぜる過程を表す微分方程式の初期値問題を書き，その解を求めよ．

(5) 混ぜる過程を開始してから 25 分経ったときの容器のなかの塩水の濃度を求めよ．

問題 2.12*　次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $tx' + x = e^t$

(2) $tx' + 3x = \dfrac{\sin t}{t^2}$

(3) $x' + (\tan t)x = \cos^2 t, \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(4) $tx' + 2x = 1 - \dfrac{1}{t}$

(5) $(1+t)x' + x = \sqrt{t}, \quad t > 0$

(6) $tx' - x = 2t \log t, \quad t > 0$

(7) $(\sin t)x' + (\cos t)x = \tan t, \quad t \in (0, \frac{\pi}{2})$

問題 2.13*　次の初期値問題を解け．

(1) $x' + 2x = 3,\ \ x(0) = 1$

(2) $tx' + 2x = t^3,\ \ x(2) = 1$

(3) $tx' + x = \sin t,\ \ x(\frac{\pi}{2}) = 1$

(4) $(t+1)x' - 2(t^2+t)x = \dfrac{e^t}{t+1},\ \ x(0) = 5$

(5) $x' + tx = t,\ \ x(0) = -6$

問題 3.1*　次の微分方程式が全微分型であるか判定せよ．

(1) $x^3 + 3tx^2x' = 0$

(2) $x^2 + 3txx' = 0$

(3) $x^4 + 3tx^3x' = 0$

問題 3.2* 次の微分方程式を解け．

(1) $(x\sin t - t) + (x^2 - \cos t)x' = 0$

(2) $(1 + t\sqrt{t^2 + x^2}) + (-1 + x\sqrt{t^2 + x^2})x' = 0$

問題 3.3* 次の微分方程式を解け．

(1) $(\sin x - \sin t) + t\cos x\, x' = 0$

(2) $xe^t + (e^t - \cos x)x' = 0$

問題 3.4* 積分因子を求めて，微分方程式を解け．

(1) $(1 + tx) + t^2 x' = 0$

(2) $t + (x - t)x' = 0$

(3) $(t^2 + 2t - x^2) - 2xx' = 0$

(4) $(t^2x^2 - x) - tx' = 0$

問題 3.5* 積分因子を見つけて，解け．

(1) $(t + t^2 + x^2)dt + tx\, dx = 0$

(2) $(\sin t - t\cos t - 3t^2(x - t)^2)dt + 3t^2(x - t)^2 dx = 0$

(3) $x\, dt + 2t(1 + tx^3)dx = 0$

(4) $(x^2 + tx)dt - t^2 dx = 0$

問題 3.6* 級数解法を用いて，次の微分方程式を解け．ただし，級数の中心を $t_0 = 0$ とする．

(1) $x' = t^2 x$

(2) $(t - 3)x' + 2x = 0$

問題 3.7 初期値問題

$$t^2x'' + tx' + t^2x = 0, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = 0$$

の解は 0 次のベッセル関数と呼ばれる．以下の問いに答えよ．

(1) 級数解法を用いて，ベッセル関数の級数展開を求めよ．

(2) (1) で得た級数の部分和を区間 $[-5, 5]$ でいくつか図示し，ベッセル関数のよい近似と思われる部分和の階数を定めよ．

問題　テキスト [1] の 28-31 ページにある問題のうち，A1*, A2*, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A10, A11, B1*, B2, B3, B4*, B5, B6, B7, B8, B10, B11, B12, B13, B14 の問題.

問題 4.1* [1] p.63　次の微分方程式を解け.

(1) $x'' + 3x' + 2x = 0$

(2) $x'' + 8x' + 12x = 0$

(3) $x''' - 7x'' + 12x' = 0$

問題 4.2* [1] p.64　次の方程式の実数解を求めよ.

(1) $x'' + x' + x = 0$

(2) $x''' - 3x'' + 2x' - 6x = 0$

(3) $x'''' - x = 0$

問題 4.3*　次の方程式の一つの解を求めよ.

(1) $x'' + x' + x = 5t^2 - t$

(2) $x''' - 2x' + x = 3t^2 + 1$

(3) $2x''' + x'' - x' = t^3$

(4) $x'' - x' + x = e^{-2t}$

(5) $x''' + 2x' + x = te^{-t}$

(6) $x'' - x = t \sin t$

問題 4.4*　次の関数が一次独立であるか答えよ.

(1) $f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = 3x - 4x^2$

(2) $f_1(x) = 0,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = e^x$

(3) $f_1(x) = 3,\ f_2(x) = \cos^2 x,\ f_3(x) = \sin^2 x$

(4) $f_1(x) = 1 + x,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2$

問題 4.5　与えられた解を用いて，微分方程式を階が一つ低いものに帰着せよ.

(1) $t^2x'' - 7tx' + 16x = 0, \quad x_1(t) = t^4$

(2) $4t^2x'' + x = 0, \quad x_1(t) = \sqrt{t}\,\ln t$

(3) $(1 - 2t - t^2)x'' + 2(1 + t)x' - 2x = 0, \quad x_1(t) = t + 1$

問題 4.6* 次の微分方程式を解け．

(1) $x'''' + 2x'' + x = 0$

(2) $x''' + 3x'' - 4x = 0$

(3) $x'' - 2x' - 3x = 4t - 5 + 6te^{2t}$

(4) $x'' + x = 4t + 10\sin t$

(5) $x'''' + x''' = 1 - t^2e^{-t}$

(6) $x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{1+t^2}$

問題 4.7 自然長が $70\,cm$ のバネに重さ $0.5\,kg$ の錘をつけると，定常状態（動かない状態）のバネの長さは $168\,cm$ となる．錘を定常状態の $40\,cm$ より上の位置から離したときの錘の変位を時間の関数 $x(t)$ として求めよ．ただし，周りの抵抗力は，その値をニュートンの単位で表したとき，メートル/秒で表した錘の速度の値に等しいことが実験でわかったとする．

問題 4.8 バネに吊るされた錘の運動が，バネの先端が固定されている台を動かすなどして，周期的な外力 $F\sin\gamma t$ で駆動されているとする．初期値問題

$$x'' + \omega^2 x = F\sin\gamma t, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

を解け．ただし，F は定数で，$\gamma \neq \omega$ とする．
得られた解で $\gamma \to \omega$ という極限をとり，極限操作で得た関数の $t \to \infty$ のときの振る舞いを調べ，その物理的な意味を説明せよ．

問題 4.9 前の問題と同様な初期値問題

$$x'' + \omega^2 x = F\cos\gamma t, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

を解け．ただし，F は定数で，$\gamma \neq \omega$ とする．
γ が ω に近いとき，$\varepsilon = \frac{1}{2}(\gamma - \omega)$ とおくと，解は近似的に

$$x(t) = \frac{F}{2\varepsilon\gamma}\sin\varepsilon t\,\sin\gamma t$$

と書けることを示せ．この関数のグラフを Matlab などのソフトウェアを用いてプロットし,「うなり」と呼ばれる二重周期的な構造をもつことを確かめよ．

問題 4.10 次のバネの運動方程式を数値的に解き，数値解のグラフを図示せよ．

(1) $x'' + x' + x + x^3 = 0,\ x(0) = -3, x'(0) = 4$

(2) $x'' + x' + x + x^3 = 0,\ x(0) = 0, x'(0) = -8$

(3) $x'' + x' + x - x^3 = 0,\ x(0) = 0, x'(0) = 1.5$

(4) $x'' + x' + x - x^3 = 0,\ x(0) = -1, x'(0) = 1$

問題 4.11　数値ソルバーを用いて，Duffing 方程式

$$x'' + x + k_1 x^3 = \cos\frac{3}{2}t, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

の解が振動運動を行うような $k_1 < 0$ の範囲を調べよ．

問題 4.12　空気抵抗を考慮した振り子のモデル

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda\frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \sin\theta = 0$$

を考える．適当な初期値とパラメータ λ, ω の値を設定し，バネ運動のように，$\lambda^2 - \omega^2$ の符号によって過減衰と不足減衰の現象が起こるか数値計算して調べよ．

問題 4.13　ロケットを地球から垂直方向に打ち上げ，高さ h_0 で燃料がなくなった時点での速度が v_0 であるとする．万有引力の法則に基づくロケット運動の微分方程式モデルを立て，それを解くことにより，ロケットの宇宙速度を求めよ．ただし，空気抵抗がない，h_0 が小さい，などのように，必要に応じて計算を簡単にするための仮定をおいてもかまわない．または，仮定をせずに解を数値計算で求めてもよい．

問題 5.1*　次の行列 A に対して e^{tA} を求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -12 & -9 & 4 \\ -12 & -8 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

問題 5.2* [1] p.94　次の連立方程式の係数行列 A に対して e^{tA} を求め，解け．

(1) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

(2) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

(3) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

(4) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

(5) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

問題 5.3* 次の行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}_0$ に対して，e^{tA} を求めて，初期値問題

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

を解け．

(1) $A = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & -3 \\ -16 & -12 & 5 \\ -8 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

問題 6.1* 上記問題 5.1-5.3 を射影行列の方法を用いて解け．

問題 7.1* [1] p.133 次の微分方程式の解軌道の図を相平面上に描け．

(1) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

(2) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

(3) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

(4) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

(5) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

問題 7.2 振り子の運動を表す微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\sin\theta \end{aligned}$$

の解軌道の図を相平面上に描け．解 $(\theta(t), v(t))$ に沿って，エネルギー $\frac{1}{2}v^2 - \cos\theta$ が保存されることを用いるとよい．

問題 7.3　2 種の動物の関わり合いのモデルである Lotka-Volterra 方程式

$$\begin{aligned} x' &= (a + by - \alpha x)x \\ y' &= (c + dx - \beta y)y \end{aligned}$$

について次の問いに答えよ．

(1) $\alpha = \beta = 0$ のときの解軌道を相平面上に描き，軌道の形状がパラメータ a, b, c, d の符号にどのように依存するか調べよ．

(2) $\alpha, \beta > 0$ のときの解軌道を数値計算を用いて調べよ．

問題 8.1　[1] p.78　二つの関数 $x(t), y(t)$ に対して，ロンスキー行列式

$$\eta(t) = \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix}$$

が恒等的に 0 でも，この二つの関数が 1 次従属とは限らない．そのような例を考えよ．

問題 8.2　[1] p.101　単独高階線型方程式

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = 0$$

を 1 階化したとき，係数行列 A はどんな形になるか．また，この行列の固有多項式は $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ に等しいことを示せ．

問題 8.3　[1] p.101　正方行列関数 $A(t)$ が反対称行列，$A(t)^T = -A(t)$，であるとき，次の連立微分方程式を考える．

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}$$

(1) 解は $|\boldsymbol{x}(t)| = |\boldsymbol{x}(0)|$ を満たすことを示せ．

(2) 基本行列 $V(t)$ に対して，$V(t)V^{-1}(s)$ はすべての $t, s \in \mathbb{R}$ で直交行列であることを示せ．

ただし，A^T は A の転置，$|\boldsymbol{x}|$ は $\boldsymbol{x}$ のユークリッドノルムである．

問題 8.4　[1] p.101

(1) 正方行列関数 $A(t)$ が $B(t) = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau$ と可換ならば，

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

の解は $\boldsymbol{x}(t) = e^{B(t)}\boldsymbol{x}_0$ であることを示せ．

(2) 2 次正方行列の場合，$A(t)$ が $B(t)$ と可換になるための必要十分条件は $A(t) = a(t)I + b(t)C$（C は定数行列）であることを示せ．

問題 8.5　[1] p.101　$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}$ の基本行列を $V(t)$ とするとき，行列微分方程式

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X - XA(t)$$

の任意の解 $X(t)$ は

$$X(t) = V(t)PV^{-1}(t) \qquad (P \text{ は定数行列})$$

の形であり，逆にこの形の行列はすべて解である．このことを示せ．

問題 8.6*　関数 $x_1, x_2 : (-1,1) \to \mathbb{R}$ を

$$x_1(t) = \begin{cases} t^3, & t \in (-1,0] \text{ のとき} \\ 0, & t \in (0,1) \text{ のとき} \end{cases}, \qquad x_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-1,0] \text{ のとき} \\ t^3, & t \in (0,1) \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義する．

(1) $x_1(t), x_2(t)$ が $t \in (-1,1)$ において 1 次独立な関数であることを示せ．

(2) ロンスキー行列式 $\eta(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}$ の値を求めよ．

(3) 2 階常微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}(t) + a(t)\dfrac{dx}{dt}(t) + b(t)x(t) = 0$ を 1 階化せよ．ここで，$a(t), b(t) : (-1,1) \to \mathbb{R}$ は与えられた連続関数である．

(4) $x_1(t), x_2(t)$ が区間 $t \in (-1,1)$ において微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}(t) + a(t)\dfrac{dx}{dt}(t) + b(t)x(t) = 0$ をともに満たすような連続関数 $a(t), b(t)$ が存在しないことを示せ．

問題 8.7　$\liminf_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(\tau))\,d\tau = \infty$ ならば，連立微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}$$

が有界でない解をもつことを示せ．

問題 8.8　任意の行列 A に対し，$\mathrm{Re}(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$ は対称行列より，固有値はすべて実数値である．$A(t)$ に対し，$\mathrm{Re}(A(t))$ の最大の固有値を $\alpha_0(t)$ とするとき，

$$\left\| V(t)V^{-1}(t_0) \right\| \leq \exp\left(\int_{t_0}^{t} \alpha_0(\tau)\,d\tau \right), \quad t \geq t_0$$

が成り立つことを示せ．ただし，ここで，$V(t)$ は $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}$ の基本行列，$\|\cdot\|$ は行列のノルムである．

問題 8.9　適当な関数 $p, q : I \to \mathbb{R}$ に対して，$x_1, x_2 : I \to \mathbb{R}$ を $x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$ の解とする．ロンスキー行列式

$$W(t) = x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t)$$

が

$$W(t) = ce^{-P(t)}$$

を満たすことを示せ．ただし，P は p の原始関数で $c \in \mathbb{R}$ は定数である．

問題 8.10

(1) 関数 $u_1, \ldots, u_n \in C([0,1])$ が $\int_0^1 |u_j(t)|^2\,dt = 1, j = 1, \ldots, n$ および $\int_0^1 u_i(t)u_j(t)\,dt = 0, i \neq j$ を満たすとき，$\{u_1, \ldots, u_n\}$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) 関数 $a \in C^1([0,1])$ は $a(t) \geq \kappa > 0,\ t \in [0,1]$ を満たすとする．さらに，関数 $u, v \in C^2([0,1]), \int_0^1 |u(t)|^2\,dt = \int_0^1 |v(t)|^2\,dt = 1$ はある $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \neq \mu$ に対して，

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\left(a(t)\tfrac{du(t)}{dt}\right) &= \lambda u(t), \quad u(0) = u(1) = 0 \\ \tfrac{d}{dt}\left(a(t)\tfrac{dv(t)}{dt}\right) &= \mu v(t), \quad v(0) = v(1) = 0 \end{aligned}$$

の解であるとする．このとき，$\{u, v\}$ が 1 次独立であることを示せ．

問題 9.1* [1] p.52 次の微分方程式に対し逐次近似を実行せよ．

$$x' = ax, \qquad x(0) = x_0$$

ただし，a は実数パラメータである．

問題 9.2 [1] p.52 $x'' + x = 0,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1$ を 1 階連立微分方程式に書き直して，逐次近似を行え．

問題 9.3 [1] p.52 解の一意性定理を用いて，三角関数の加法定理

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned}$$

を証明せよ．

問題 9.4 [1] p.52 解の一意性定理を用いて，$\sinh x$ の逆関数が $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ であることを示せ．

問題 9.5 [1] p.53 連立微分方程式

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) x_k, \qquad i = 1, \ldots, n$$

において $a_{ik}(t)$ はすべての $-\infty < t < \infty$ で連続で，

$$|a_{ik}(t)| \leq M, \qquad i, k = 1, \ldots, n$$

をみたすものとする．この方程式の 1 組の解を $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ とするとき，

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| e^{-nMt}$$

は t の非増加関数であることを示せ．

問題 9.6* 微分方程式に対する次の初期値問題を考える：

$$2tx\frac{dx}{dt} = t^2 + x^2, \qquad x(1) = x_0$$

(1) $x_0 \neq 0$ ならば，初期条件を満たす解 $x(t)$ がある区間 $t \in [1-\delta, 1+\delta]$ $(\delta > 0)$ でただ一つ存在することを示せ．

(2) 初期値問題の解 $x(t)$ が t の区間 $(-\infty, \infty)$ 全体で存在するような初期値 x_0 を全て求めよ．

問題 9.7* 微分方程式に対する初期値問題

$$t\frac{dx}{dt} + x = \sin t, \qquad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = x_0$$

について次の問いに答えよ．

(2a) コーシーの定理を用いて，初期条件を満たす解 $x(t)$ がある区間 $t \in [\frac{\pi}{2}-\delta, \frac{\pi}{2}+\delta]$ $(\delta > 0)$ でただ一つ存在することを示せ．

(2b) 初期値問題の解 $x(t)$ が区間 $(0, \infty)$ で存在し有界である（つまり，$\sup_{t \in (0,\infty)} |x(t)| < \infty$ が成り立つ）ような初期値 x_0 を全て求めよ．

問題 9.8*　微分方程式に対する初期値問題

$$t^2 \frac{dx}{dt} + tx + 2 = 0, \qquad x(1) = 2$$

について次の問いに答えよ．

(1) この問題の解 $x(t)$ はある区間 $t \in [1-\delta, 1+\delta]$ $(\delta > 0)$ でただ一つ存在することを，コーシーの定理を用いて示せ．

(2) この解 $x(t)$ を求めよ．

(3) 上の初期条件を満たす最大解をすべて求めよ．

参考文献

[1] 笠原晧司，微分方程式の基礎，朝倉書店（数理科学ライブラリー）