微分積分学続論 II： 第 2 回

Karel Svadlenka

2020 年 4 月 15 日

1　はじめに

■常微分方程式（Ordinary Differential Equation = ODE）

定義 **1**（微分方程式）
$x(t)$ に関する 微分方程式 ：

$$F\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)\right) = 0 \tag{1}$$

ここで，$F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ 関数，$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 関数，$x' = \frac{dx}{dt}$，$x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}$.

(1) の 階数 ＝ x の導関数の最高階数 n (1) の 解 ＝ (1) を満たす関数 $x(t)$ t ... 独立変数，x ... 従属変数 / 未知関数

例．$x' = (t+1)^2 - x$
このとき，　$F(t, x, x') = -(t+1)^2 + x + x'$，1 階 ODE．　$x(t) = t^2 + 1$ という関数は解である：　$x' = 2t = (t+1)^2 - (t^2+1)$.

■連立微分方程式
上の定義で，x, F をベクトル値関数とすれば， 連立 ODE の定義となる：

$$\begin{aligned}
F_1\left(t, x_1, \ldots, x_k, x_1', \ldots, x_k', \ \ldots\ , x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}\right) &= 0 \\
F_2\left(t, x_1, \ldots, x_k, x_1', \ldots, x_k', \ \ldots\ , x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}\right) &= 0 \\
&\vdots \\
F_\ell\left(t, x_1, \ldots, x_k, x_1', \ldots, x_k', \ \ldots\ , x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}\right) &= 0
\end{aligned}$$

例（連立微分方程式）

$$\begin{aligned}
x' &= x - xy \\
y' &= -y + xy
\end{aligned}$$

は $x(t), y(t)$ についての連立 ODE.

■1 階化
どの n 階 ODE も，それと同値な 1 階連立 ODE に書きなおすことができる．

新しい未知関数 $x_0, \ldots, x_{n-1}$ を導入　　$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$

$$
\begin{aligned}
x_0 &= x \\
x_1 &= x' \\
x_2 &= x'' \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= x^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

すると，次の連立 ODE を得る：

$$
\left\{
\begin{aligned}
x_0' &= x_1 \\
x_1' &= x_2 \\
&\vdots \\
x_{n-2}' &= x_{n-1} \\
F(t, x_0, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}') &= 0
\end{aligned}
\right. \tag{2}
$$

例：$x'' + (x')^2 - 1 = 0$

$$
\begin{aligned}
x_0(t) &= x(t) \\
x_1(t) &= x'(t)
\end{aligned}
\quad \text{とおいて，} \quad
\left\{
\begin{aligned}
x_0' &= x_1 \\
x_1' &= -x_1^2 + 1
\end{aligned}
\right.
$$

■微分方程式の種類

- 常微分方程式（ODE = ordinary DE）：独立変数が 1 つ（ここでは t としている），例：上の 3 つの例
- 偏微分方程式（PDE = partial DE）：独立変数が 2 つ以上， 例：熱方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(t,x)$ ... 温度

本講義では ODE（単独も連立も）を扱う．

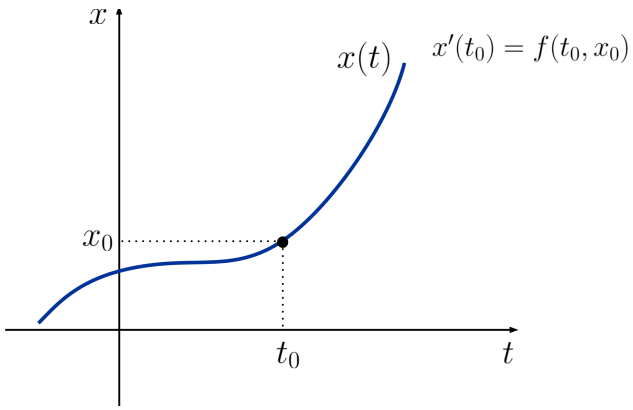
まずは，1 階単独

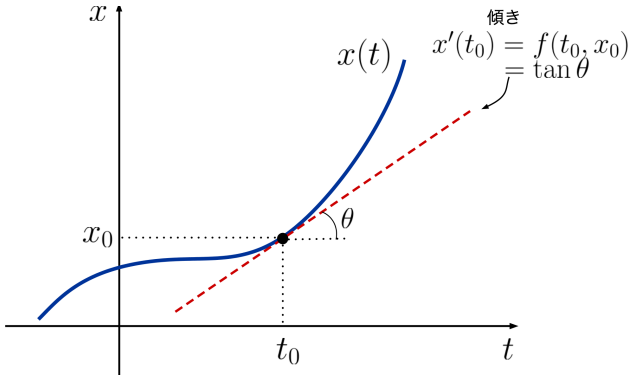
$$
\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{3}
$$

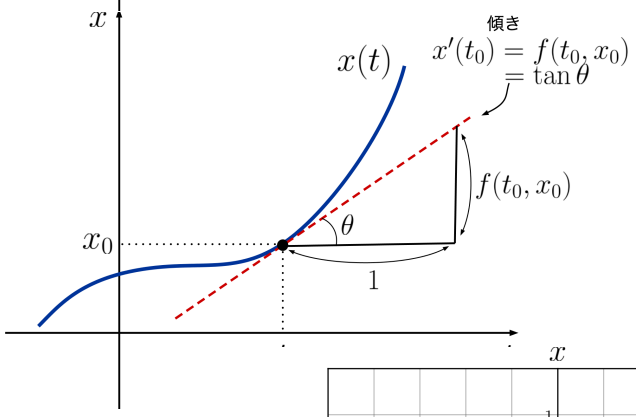
の形で書けるとする．

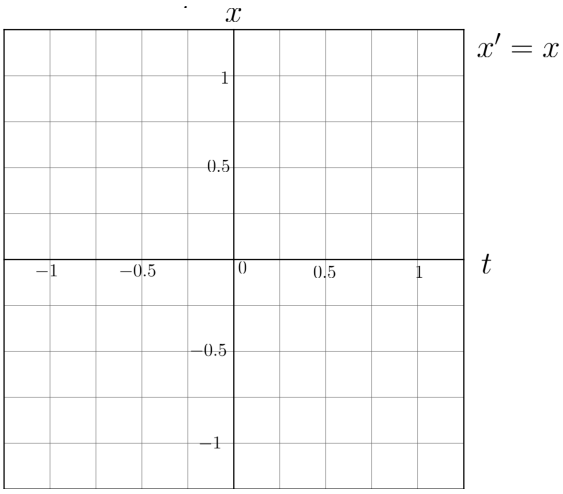
■方向の場： $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ (3)

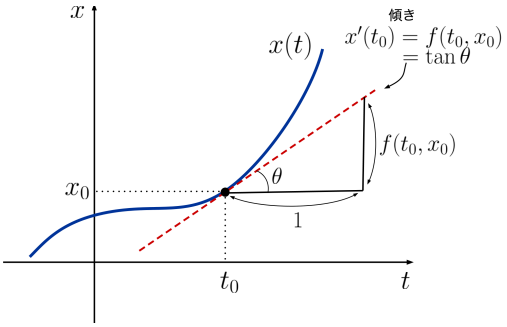
(3) の解の振る舞いをだいたい把握するのが簡単： $x(t)$ が解で，(t,x)-平面の点 (t_0, x_0) を通るならば， この点での $x(t)$ のグラフの傾きは $x'(t_0) = f(t_0, x(t_0)) = f(t_0, x_0)$． これは，ODE を解かなくても，右辺を見てわかる情報．

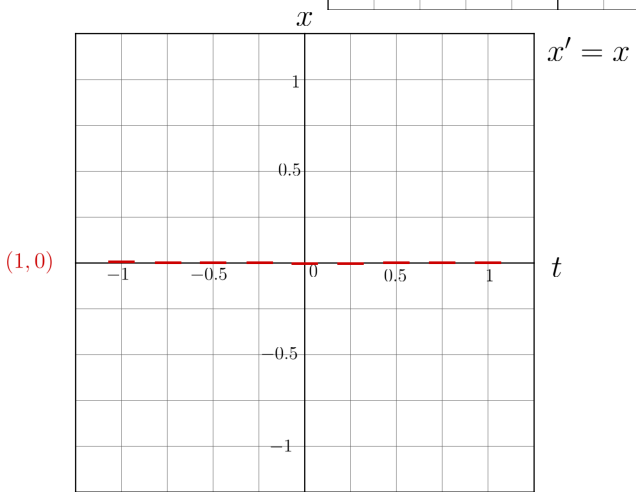


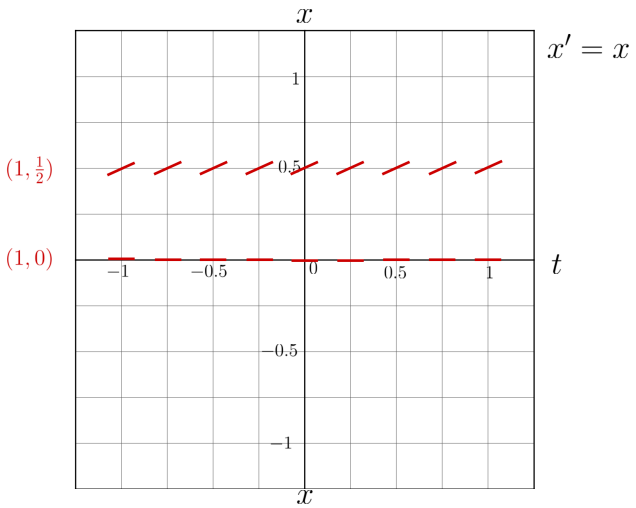

x
x(t)
傾き
x′(t0) = f(t0, x0)
= tan θ
θ
x0
t0
t

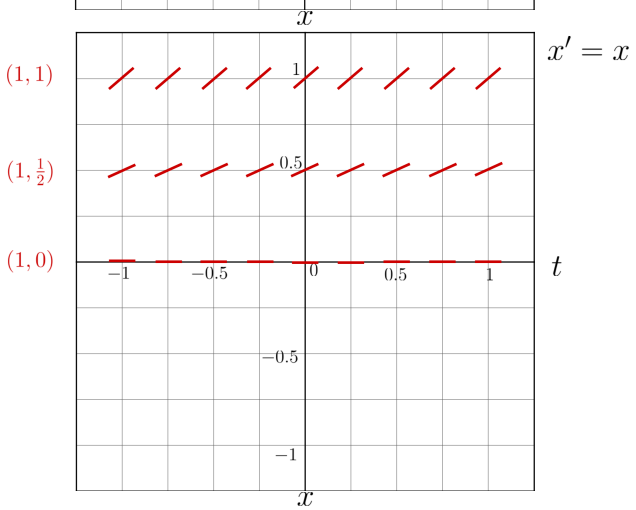

x
x(t)
傾き
x′(t0) = f(t0, x0)
= tan θ
f(t0, x0)
θ
x0
1

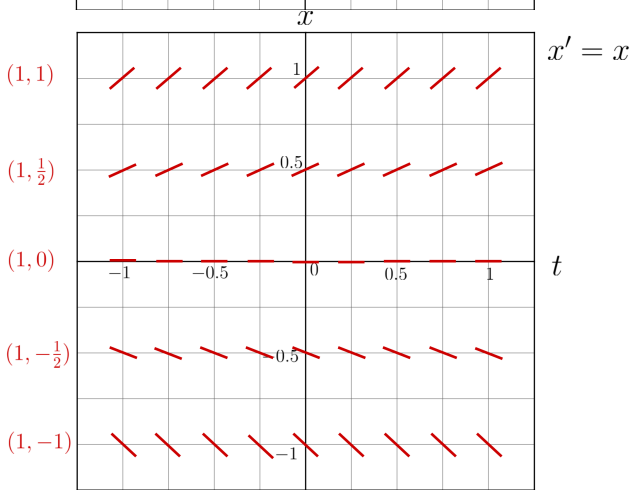

x
x′ = x
1
0.5
−1
−0.5
0
0.5
1
t
−0.5
−1

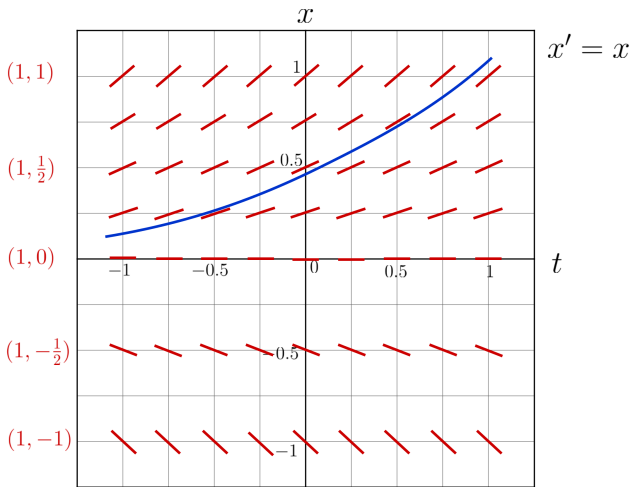

x
x(t)
傾き
x′(t0) = f(t0, x0)
= tan θ
f(t0, x0)
θ
x0
1
t0
t


x
x′ = x
1
0.5
(1, 0)
−1
−0.5
0
0.5
1
t
−0.5
−1


x
$x' = x$
$(1, \frac{1}{2})$
$(1, 0)$
t
1
0.5
−1
−0.5
0
0.5
1
−0.5
−1


x
$x' = x$
$(1, 1)$
$(1, \frac{1}{2})$
$(1, 0)$
t
1
0.5
−1
−0.5
0
0.5
1
−0.5
−1

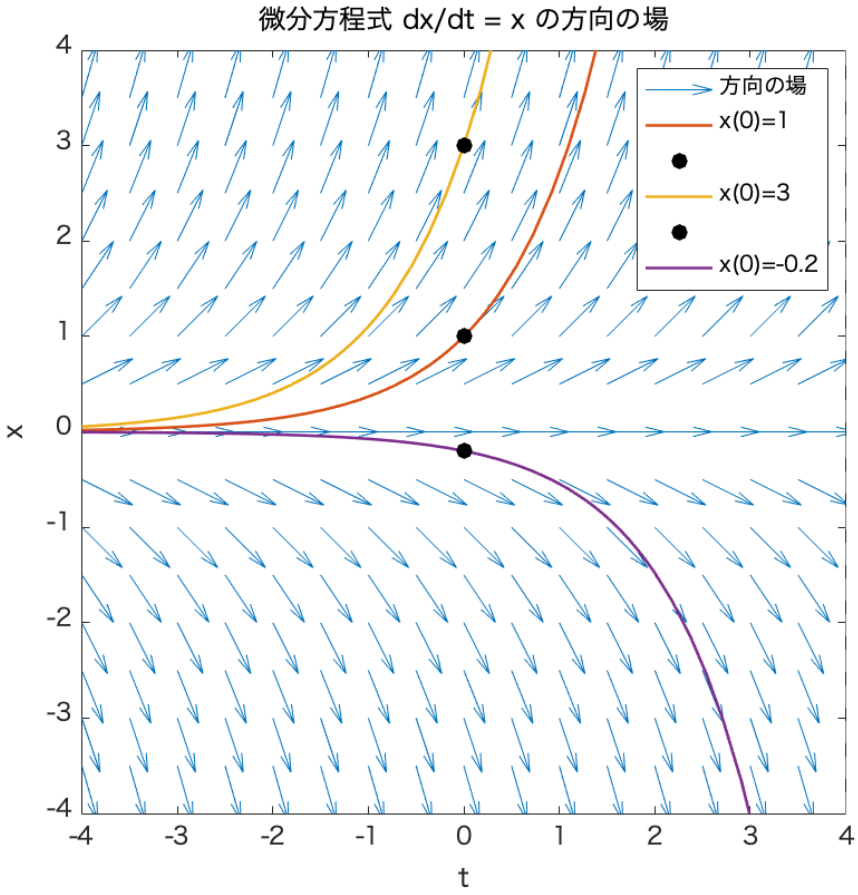

x
$x' = x$
$(1, 1)$
$(1, \frac{1}{2})$
$(1, 0)$
$(1, -\frac{1}{2})$
$(1, -1)$
t
1
0.5
−1
−0.5
0
0.5
1
−0.5
−1



(t,x)-平面の各点において，その点を通る解曲線の傾きを示す短い線分（方向は $(1, f(t,x))$）を引いた図を 方向の場 （または勾配場）という．

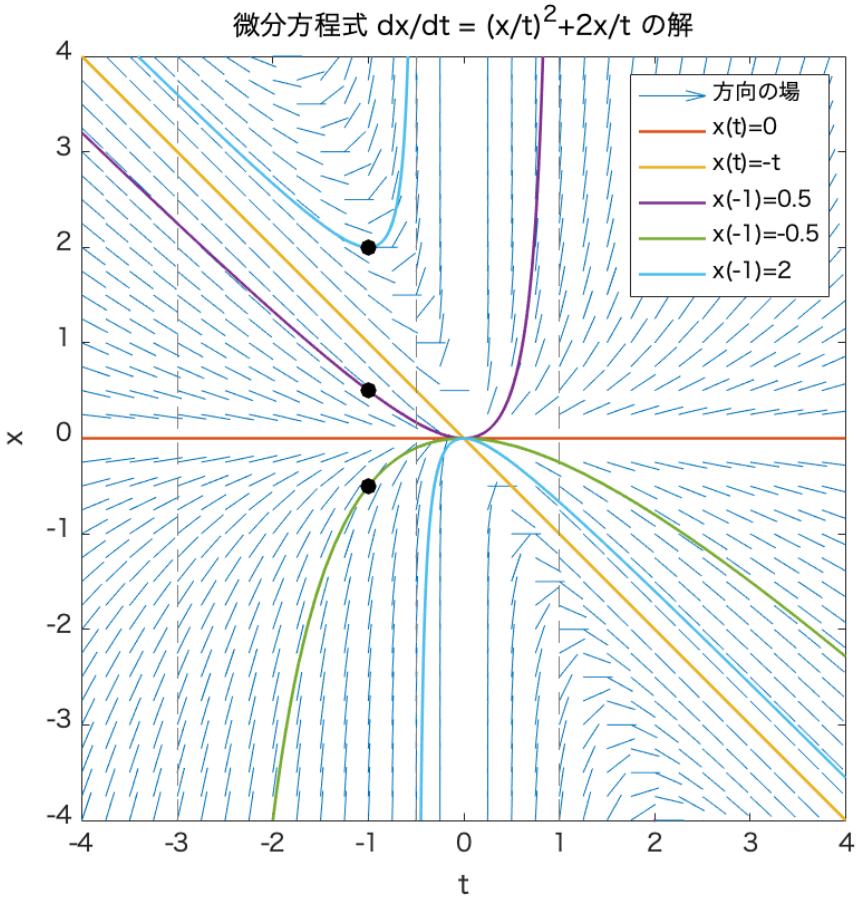
■Matlab の例

$$x' = x \quad \text{解}: x(t) = Ce^t$$



Matlab コード：houkounoba1.m

$$x' = \frac{x^2}{t^2} + 2\frac{x}{t} \quad \text{解}: x(t) = \frac{t^2}{C-t}$$



Matlab コード：houkounoba2.m

■解の存在と一意性

次の初期値問題の解の存在について考える：

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{4}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{5}$$

■解の存在と一意性：$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ (4)，　$x(t_0) = x_0$ (5)

コーシーの定理

仮定：$f(t,x) : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$

(A1) f は $[a,b] \times [c,d]$ で連続

(A2) f は x についてリプシッツ連続，つまり，$K > 0$ があって，

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le K|x_1 - x_2| \quad \forall t \in [a,b],\ \forall x_1, x_2 \in [c,d] \tag{6}$$

主張：任意の $(t_0, x_0) \in [a,b] \times [c,d]$ に対し，$\delta > 0$ があって，(4)-(5) を $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ において満たす $x(t)$ がただ一つ存在する．

注：$\frac{\partial f}{\partial x}$ が $[a,b]\times[c,d]$ で連続ならば，定理の仮定 (A2) は満たされる．実際，このとき，$|\frac{\partial f}{\partial x}|$ は $[a,b]\times[c,d]$ で有界であり，この最大値を K とすると，リプシッツの条件が成り立つ．

■レポート

今回の講義のレポート問題を解いて，提出して下さい．（詳しいことは PandA の「手紙 02」を参照すること．）

微分積分学続論 II： 第 2 回

Karel Svadlenka

京都大学大学院理学研究科 数学教室

2020 年 4 月 15 日

常微分方程式（Ordinary Differential Equation = ODE）

定義 1（微分方程式）

$x(t)$ に関する **微分方程式** ：

$$F\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)\right) = 0 \tag{1}$$

ここで，$F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ 関数，$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 関数，$x' = \frac{dx}{dt}$，$x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}$.

(1) の **階数** = x の導関数の最高階数 n

(1) の **解** = (1) を満たす関数 $x(t)$

t ... 独立変数，x ... 従属変数 / 未知関数

例. $x' = (t+1)^2 - x$

このとき，$F(t, x, x') = -(t+1)^2 + x + x'$，1 階 ODE.

$x(t) = t^2 + 1$ という関数は解である： $x' = 2t = (t+1)^2 - (t^2+1)$.

常微分方程式（Ordinary Differential Equation = ODE）

定義 1（微分方程式）

$x(t)$ に関する **微分方程式** ：

$$F\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)\right) = 0 \tag{1}$$

ここで，$F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ 関数，$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 関数，$x' = \frac{dx}{dt}$，$x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}$.

(1) の **階数** ＝ x の導関数の最高階数 n

(1) の **解** ＝ (1) を満たす関数 $x(t)$

t ... 独立変数，x ... 従属変数 / 未知関数

例. $x' = (t+1)^2 - x$

このとき，$F(t, x, x') = -(t+1)^2 + x + x'$，1 階 ODE.

$x(t) = t^2 + 1$ という関数は解である： $x' = 2t = (t+1)^2 - (t^2+1)$.

常微分方程式（Ordinary Differential Equation = ODE）

定義 1（微分方程式）

$x(t)$ に関する **微分方程式** ：

$$F\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)\right) = 0 \tag{1}$$

ここで，$F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ 関数，$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 関数，$x' = \frac{dx}{dt}$，$x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}$.

(1) の **階数** ＝ x の導関数の最高階数 n

(1) の **解** ＝ (1) を満たす関数 $x(t)$

t ... 独立変数，x ... 従属変数 / 未知関数

例. $x' = (t+1)^2 - x$

このとき，$F(t, x, x') = -(t+1)^2 + x + x'$，1 階 ODE.

$x(t) = t^2 + 1$ という関数は解である： $x' = 2t = (t+1)^2 - (t^2+1)$.

連立微分方程式

上の定義で，x, F をベクトル値関数とすれば，**連立 ODE** の定義となる：

$$\begin{aligned}
F_1\left(t, x_1, \ldots, x_k, x_1', \ldots, x_k', \ \ldots \ , x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}\right) &= 0 \\
F_2\left(t, x_1, \ldots, x_k, x_1', \ldots, x_k', \ \ldots \ , x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}\right) &= 0 \\
&\vdots \\
F_\ell\left(t, x_1, \ldots, x_k, x_1', \ldots, x_k', \ \ldots \ , x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}\right) &= 0
\end{aligned}$$

例（連立微分方程式）

$$\begin{aligned}
x' &= x - xy \\
y' &= -y + xy
\end{aligned}$$

は $x(t), y(t)$ についての連立 ODE.

連立微分方程式

上の定義で，x, F をベクトル値関数とすれば，**連立 ODE** の定義となる：

$$\begin{aligned}
F_1\left(t, x_1, \ldots, x_k, x_1', \ldots, x_k', \ \ldots\ , x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}\right) &= 0 \\
F_2\left(t, x_1, \ldots, x_k, x_1', \ldots, x_k', \ \ldots\ , x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}\right) &= 0 \\
&\vdots \\
F_\ell\left(t, x_1, \ldots, x_k, x_1', \ldots, x_k', \ \ldots\ , x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}\right) &= 0
\end{aligned}$$

例（連立微分方程式）

$$\begin{aligned}
x' &= x - xy \\
y' &= -y + xy
\end{aligned}$$

は $x(t), y(t)$ についての連立 ODE.

1 階化

どの n 階 ODE も，それと同値な 1 階連立 ODE に書きなおすことができる.

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$$

新しい未知関数 $x_0, \ldots, x_{n-1}$ を導入

$$\begin{aligned} x_0 &= x \\ x_1 &= x' \\ x_2 &= x'' \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= x^{(n-1)} \end{aligned}$$

すると，次の連立 ODE を得る：

$$\begin{cases} x_0' &= x_1 \\ x_1' &= x_2 \\ &\vdots \\ x_{n-2}' &= x_{n-1} \\ F(t, x_0, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}') &= 0 \end{cases} \tag{2}$$

例：$x'' + (x')^2 - 1 = 0$

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x(t) \\ x_1(t) &= x'(t) \end{aligned}$$ とおいて，$$\begin{cases} x_0' &= x_1 \\ x_1' &= -x_1^2 + 1 \end{cases}$$

1 階化

どの n 階 ODE も，それと同値な 1 階連立 ODE に書きなおすことができる.

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$$

新しい未知関数 $x_0, \ldots, x_{n-1}$ を導入

$$\begin{aligned} x_0 &= x \\ x_1 &= x' \\ x_2 &= x'' \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= x^{(n-1)} \end{aligned}$$

すると，次の連立 ODE を得る：

$$\begin{cases} x_0' &= x_1 \\ x_1' &= x_2 \\ &\vdots \\ x_{n-2}' &= x_{n-1} \\ F(t, x_0, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}') &= 0 \end{cases} \tag{2}$$

例：$x'' + (x')^2 - 1 = 0$

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x(t) \\ x_1(t) &= x'(t) \end{aligned}$$ とおいて，$$\begin{cases} x_0' &= x_1 \\ x_1' &= -x_1^2 + 1 \end{cases}$$

1 階化

どの n 階 ODE も，それと同値な 1 階連立 ODE に書きなおすことができる．

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$$

新しい未知関数 $x_0, \ldots, x_{n-1}$ を導入

$$\begin{aligned} x_0 &= x \\ x_1 &= x' \\ x_2 &= x'' \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= x^{(n-1)} \end{aligned}$$

すると，次の連立 ODE を得る：

$$\begin{cases} x_0' &= x_1 \\ x_1' &= x_2 \\ &\vdots \\ x_{n-2}' &= x_{n-1} \\ F(t, x_0, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}') &= 0 \end{cases} \tag{2}$$

例：$x'' + (x')^2 - 1 = 0$

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x(t) \\ x_1(t) &= x'(t) \end{aligned}$$ とおいて，$$\begin{cases} x_0' &= x_1 \\ x_1' &= -x_1^2 + 1 \end{cases}$$

1 階化

どの n 階 ODE も，それと同値な 1 階連立 ODE に書きなおすことができる．

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$$

新しい未知関数 $x_0, \ldots, x_{n-1}$ を導入

$$\begin{aligned} x_0 &= x \\ x_1 &= x' \\ x_2 &= x'' \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= x^{(n-1)} \end{aligned}$$

すると，次の連立 ODE を得る：

$$\begin{cases} x_0' &= x_1 \\ x_1' &= x_2 \\ &\vdots \\ x_{n-2}' &= x_{n-1} \\ F(t, x_0, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}') &= 0 \end{cases} \tag{2}$$

例：$x'' + (x')^2 - 1 = 0$

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x(t) \\ x_1(t) &= x'(t) \end{aligned}$$ とおいて，$$\begin{cases} x_0' &= x_1 \\ x_1' &= -x_1^2 + 1 \end{cases}$$

微分方程式の種類

- 常微分方程式（ODE = ordinary DE）：独立変数が 1 つ（ここでは t としている），
  例：上の 3 つの例
- 偏微分方程式（PDE = partial DE）：独立変数が 2 つ以上，
  例：熱方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(t,x)$ ... 温度

本講義では ODE（単独も連立も）を扱う．

まずは，1 階単独

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{3}$$

の形で書けるとする．

微分方程式の種類

- **常微分方程式**（ODE = ordinary DE）：独立変数が 1 つ（ここでは t としている），
  例：上の 3 つの例
- **偏微分方程式**（PDE = partial DE）：独立変数が 2 つ以上，
  例：熱方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(t, x)$ ... 温度

本講義では ODE（単独も連立も）を扱う.

まずは，1 階単独

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{3}$$

の形で書けるとする.

微分方程式の種類

- **常微分方程式**（ODE = ordinary DE）：独立変数が 1 つ（ここでは t としている），
  例：上の 3 つの例
- **偏微分方程式**（PDE = partial DE）：独立変数が 2 つ以上，
  例：熱方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(t, x)$ ... 温度

本講義では ODE（単独も連立も）を扱う.

まずは，1 階単独

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{3}$$

の形で書けるとする.

微分方程式の種類

- **常微分方程式**（ODE = ordinary DE）：独立変数が 1 つ（ここでは t としている），
  例：上の 3 つの例
- **偏微分方程式**（PDE = partial DE）：独立変数が 2 つ以上，
  例：熱方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(t, x)$ ... 温度

本講義では ODE（単独も連立も）を扱う.

まずは，1 階単独

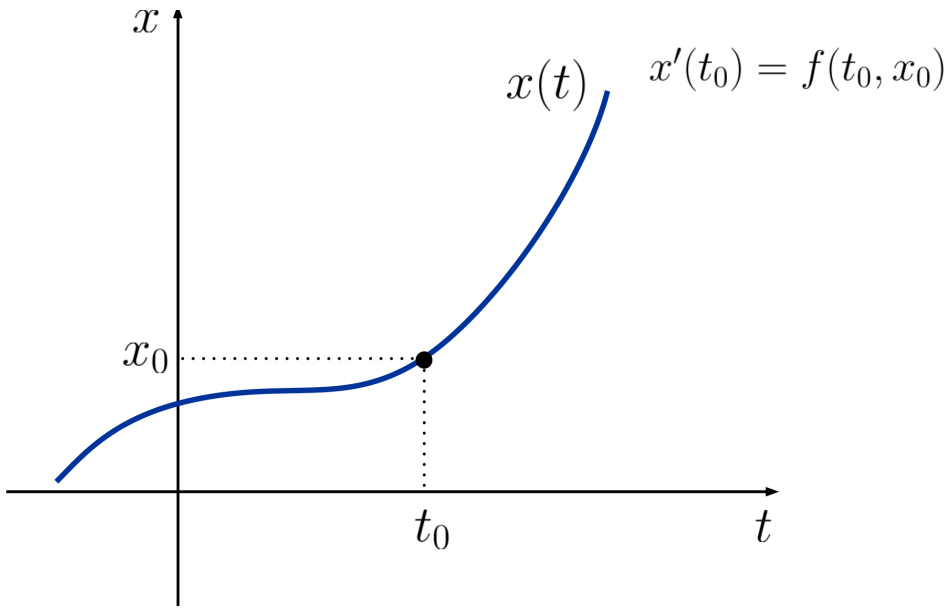
$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{3}$$

の形で書けるとする.

方向の場： $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ (3)

(3) の解の振る舞いをだいたい把握するのが簡単：

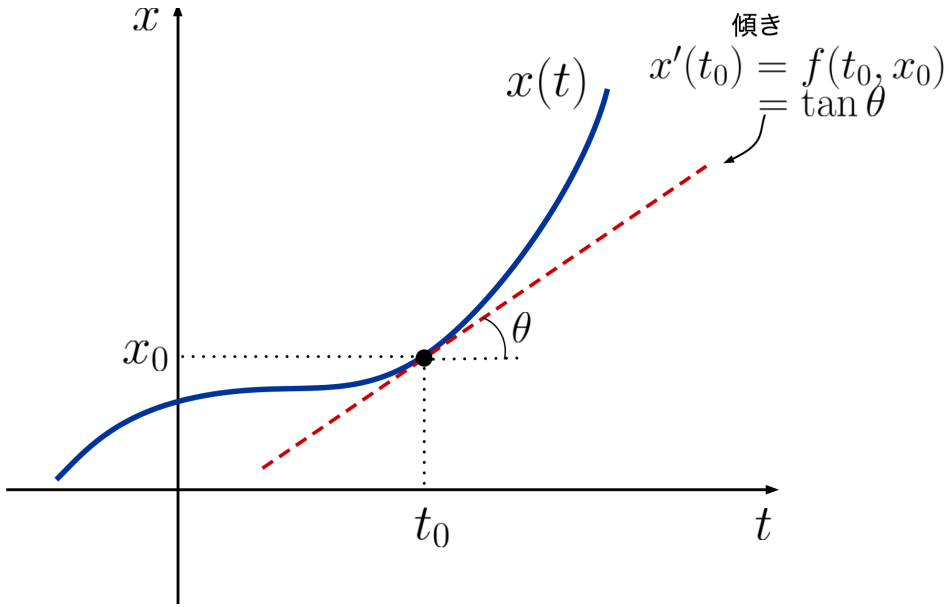
$x(t)$ が解で，(t,x)-平面の点 (t_0,x_0) を通るならば，
この点での $x(t)$ のグラフの傾きは $x'(t_0) = f(t_0, x(t_0)) = f(t_0,x_0)$.
これは，ODE を解かなくても，右辺を見てわかる情報.



(t,x)-平面の各点において，その点を通る解曲線の傾きを示す短い線分（方向は $(1, f(t,x))$）を引いた図を **方向の場**（または勾配場）という.

方向の場： $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ (3)

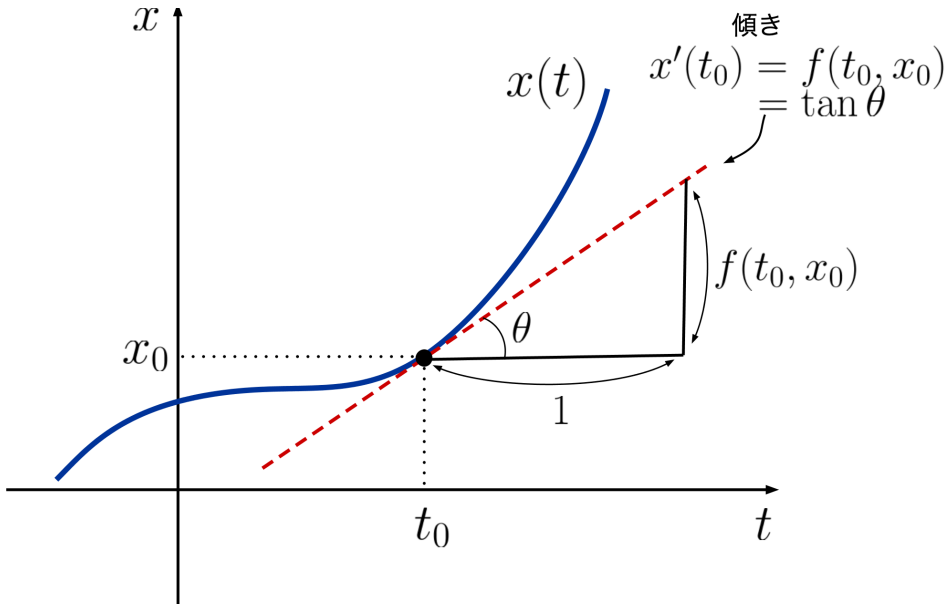
(3) の解の振る舞いをだいたい把握するのが簡単：
$x(t)$ が解で，(t,x)-平面の点 (t_0,x_0) を通るならば，
この点での $x(t)$ のグラフの傾きは $x'(t_0) = f(t_0, x(t_0)) = f(t_0,x_0)$.
これは，ODE を解かなくても，右辺を見てわかる情報.



(t,x)-平面の各点において，その点を通る解曲線の傾きを示す短い線分（方向は $(1, f(t,x))$）を引いた図を 方向の場（または勾配場）という.

方向の場： $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ (3)

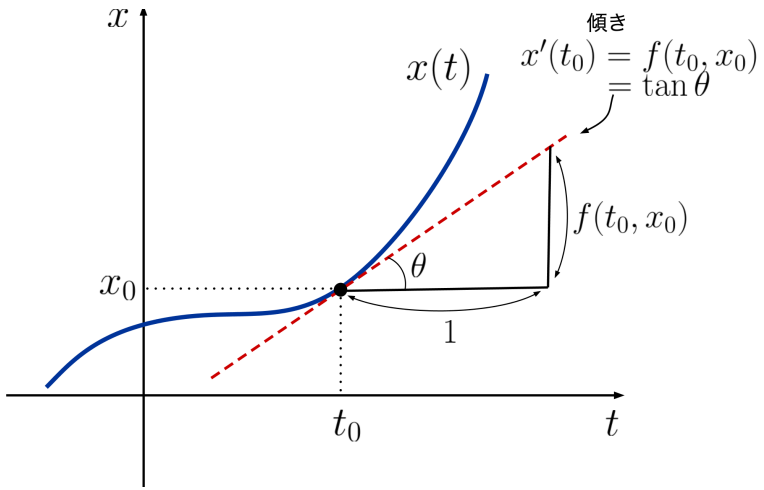
(3) の解の振る舞いをだいたい把握するのが簡単：
$x(t)$ が解で，(t,x)-平面の点 (t_0,x_0) を通るならば，
この点での $x(t)$ のグラフの傾きは $x'(t_0) = f(t_0, x(t_0)) = f(t_0,x_0)$.
これは，ODE を解かなくても，右辺を見てわかる情報.

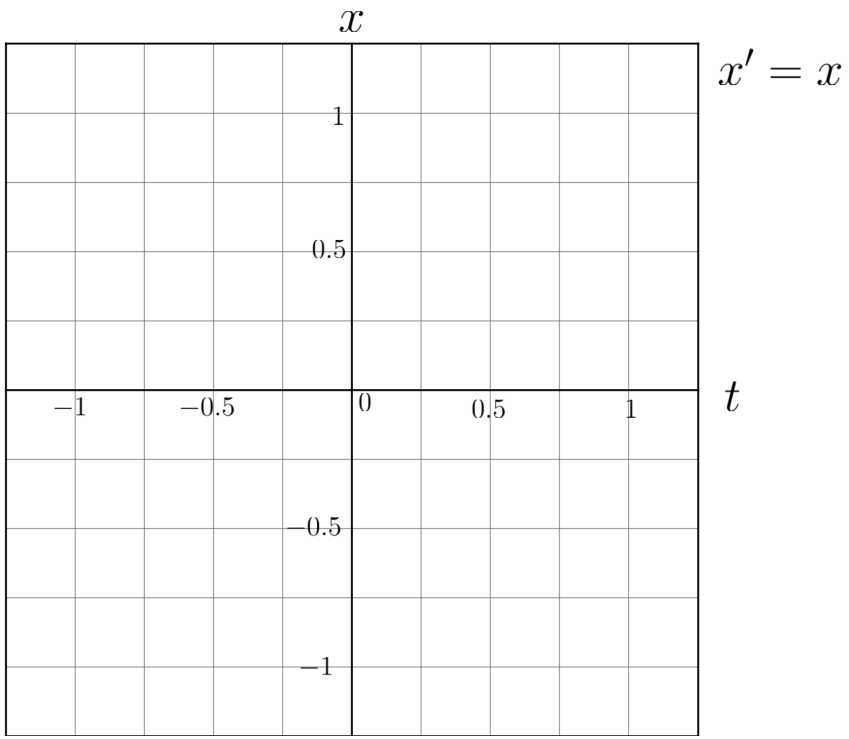


(t,x)-平面の各点において，その点を通る解曲線の傾きを示す短い線分（方向は $(1, f(t,x))$）を引いた図を**方向の場**（または勾配場）という.

方向の場： $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ (3)

(3) の解の振る舞いをだいたい把握するのが簡単：
$x(t)$ が解で，(t,x)-平面の点 (t_0, x_0) を通るならば，
この点での $x(t)$ のグラフの傾きは $x'(t_0) = f(t_0, x(t_0)) = f(t_0, x_0)$.
これは，ODE を解かなくても，右辺を見てわかる情報.

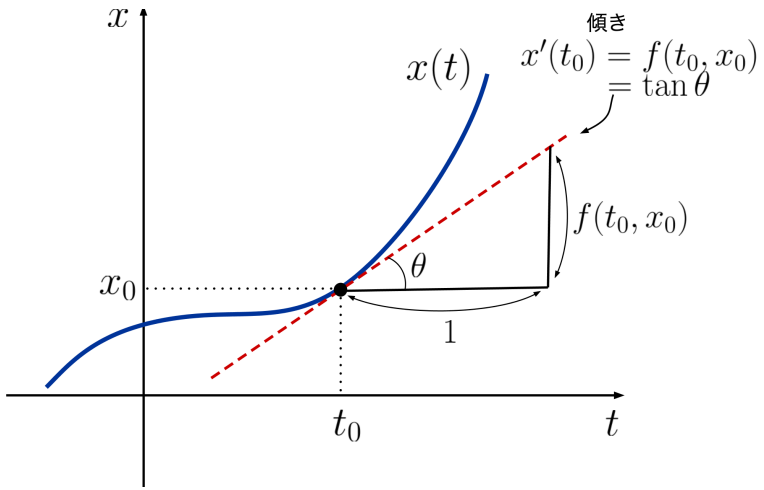


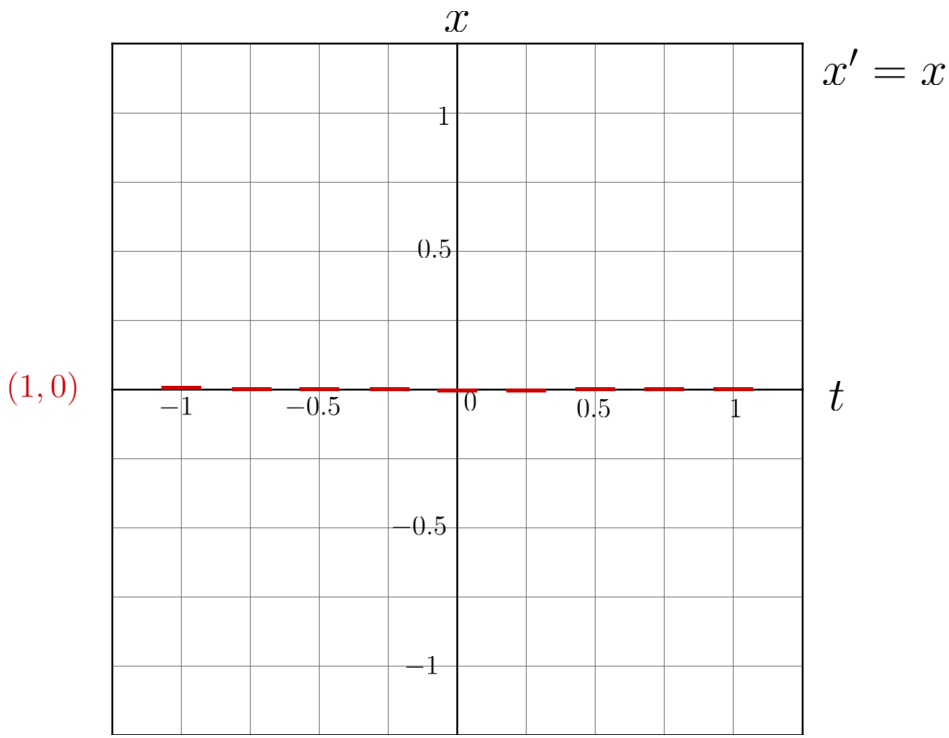


(t,x)-平面の各点において，その点を通る解曲線の傾きを示す短い線分（方向は $(1, f(t,x))$）を引いた図を 方向の場（または勾配場）という.

方向の場： $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ (3)

(3) の解の振る舞いをだいたい把握するのが簡単：
$x(t)$ が解で，(t,x)-平面の点 (t_0, x_0) を通るならば，
この点での $x(t)$ のグラフの傾きは $x'(t_0) = f(t_0, x(t_0)) = f(t_0, x_0)$.
これは，ODE を解かなくても，右辺を見てわかる情報.

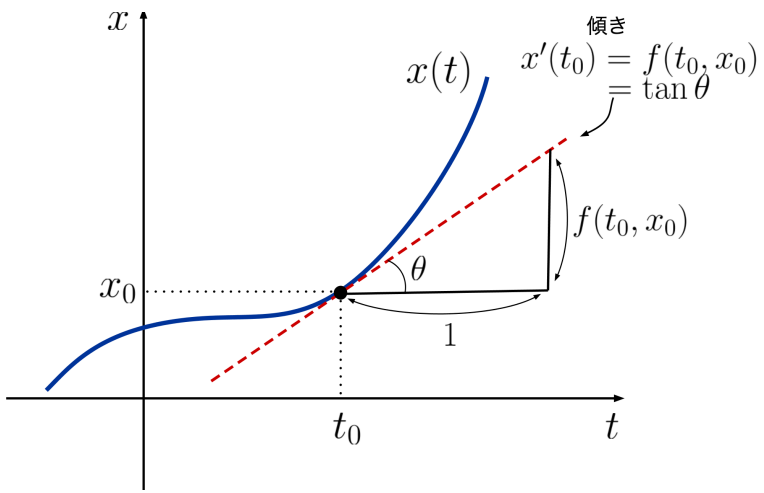


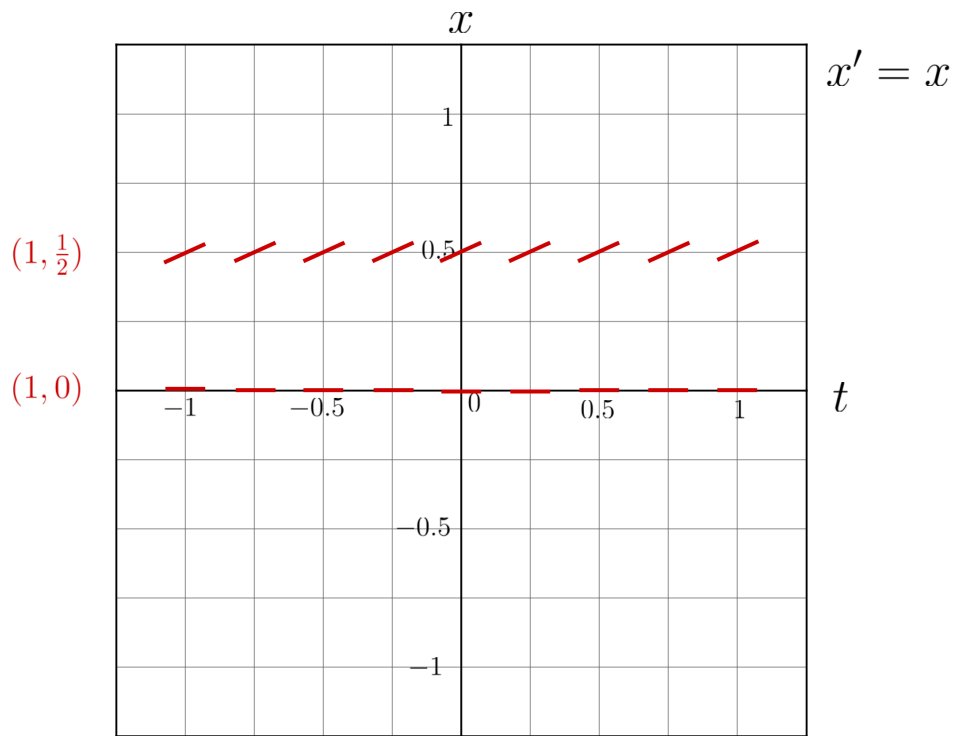


(t,x)-平面の各点において，その点を通る解曲線の傾きを示す短い線分（方向は $(1, f(t,x))$）を引いた図を 方向の場（または勾配場）という.

方向の場： $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ (3)

(3) の解の振る舞いをだいたい把握するのが簡単：
$x(t)$ が解で，(t,x)-平面の点 (t_0, x_0) を通るならば，
この点での $x(t)$ のグラフの傾きは $x'(t_0) = f(t_0, x(t_0)) = f(t_0, x_0)$.
これは，ODE を解かなくても，右辺を見てわかる情報.

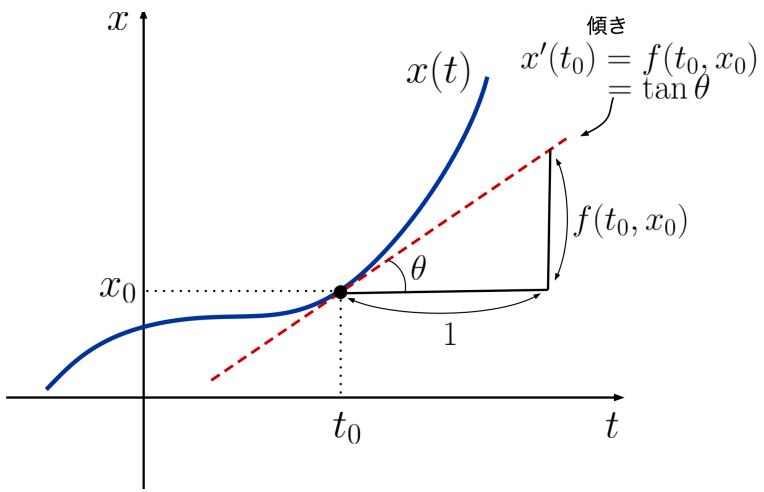


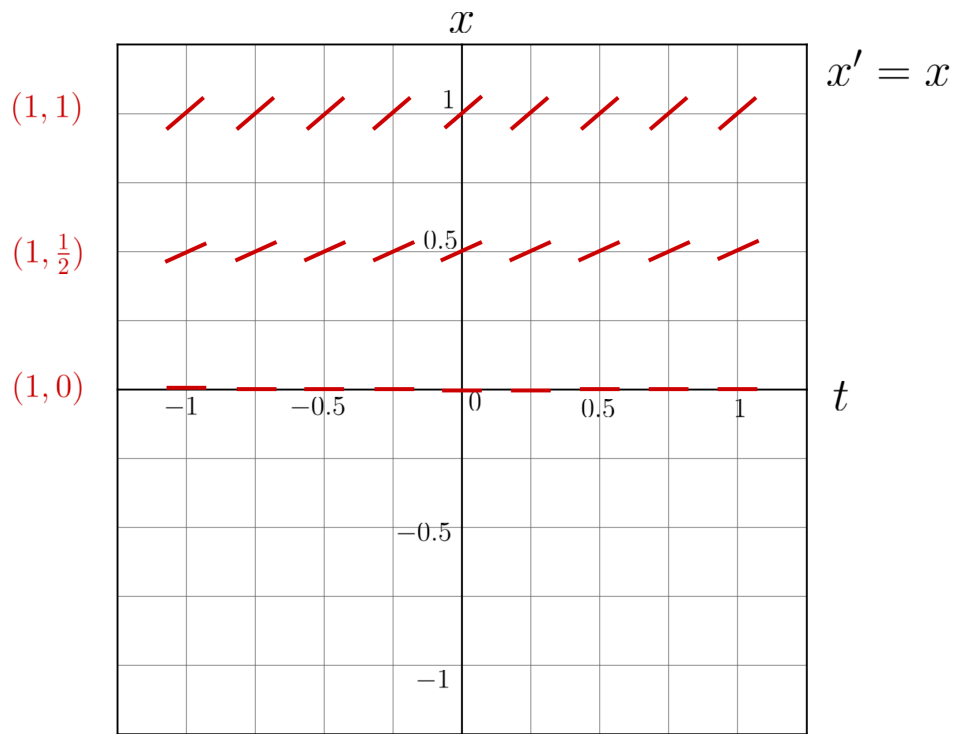


(t,x)-平面の各点において，その点を通る解曲線の傾きを示す短い線分（方向は $(1, f(t,x))$）を引いた図を **方向の場**（または勾配場）という.

方向の場： $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ (3)

(3) の解の振る舞いをだいたい把握するのが簡単：
$x(t)$ が解で，(t,x)-平面の点 (t_0,x_0) を通るならば，
この点での $x(t)$ のグラフの傾きは $x'(t_0) = f(t_0,x(t_0)) = f(t_0,x_0)$.
これは，ODE を解かなくても，右辺を見てわかる情報.

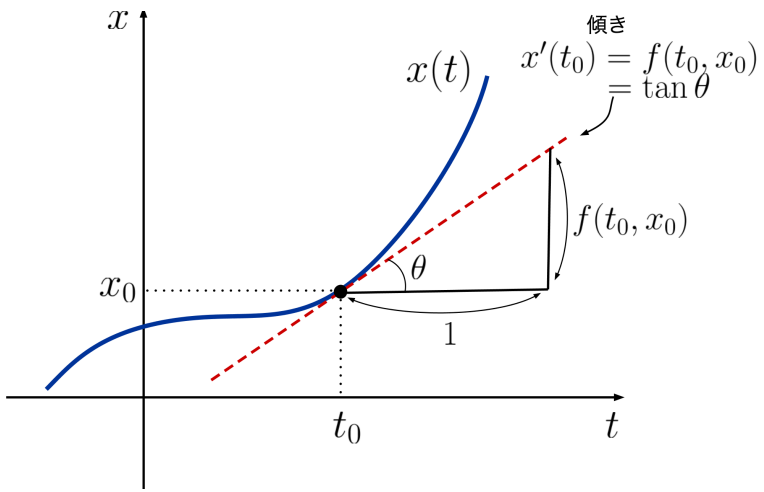


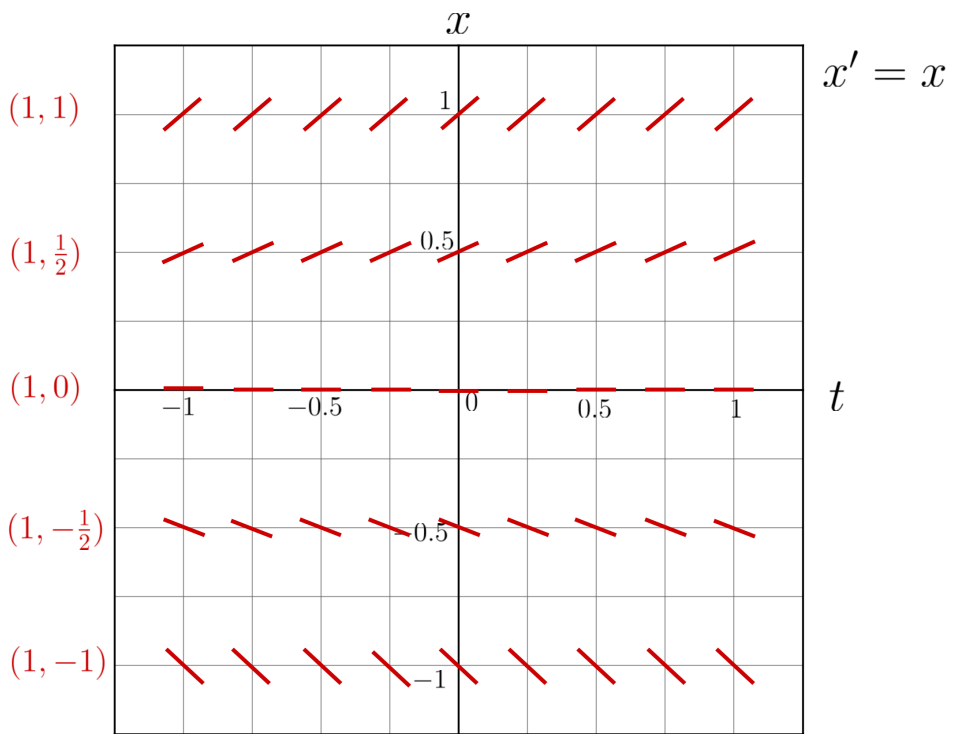


(t,x)-平面の各点において，その点を通る解曲線の傾きを示す短い線分（方向は $(1,f(t,x))$）を引いた図を 方向の場 （または勾配場）という.

方向の場： $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ (3)

(3) の解の振る舞いをだいたい把握するのが簡単：
$x(t)$ が解で，(t,x)-平面の点 (t_0,x_0) を通るならば，
この点での $x(t)$ のグラフの傾きは $x'(t_0) = f(t_0,x(t_0)) = f(t_0,x_0)$.
これは，ODE を解かなくても，右辺を見てわかる情報.

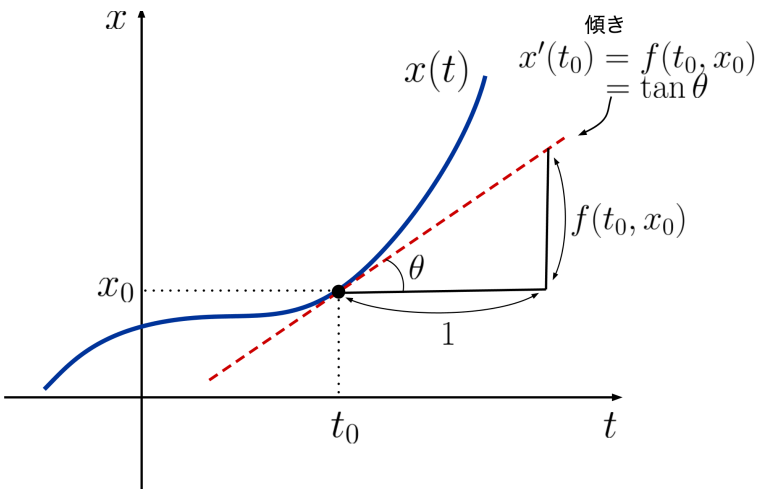


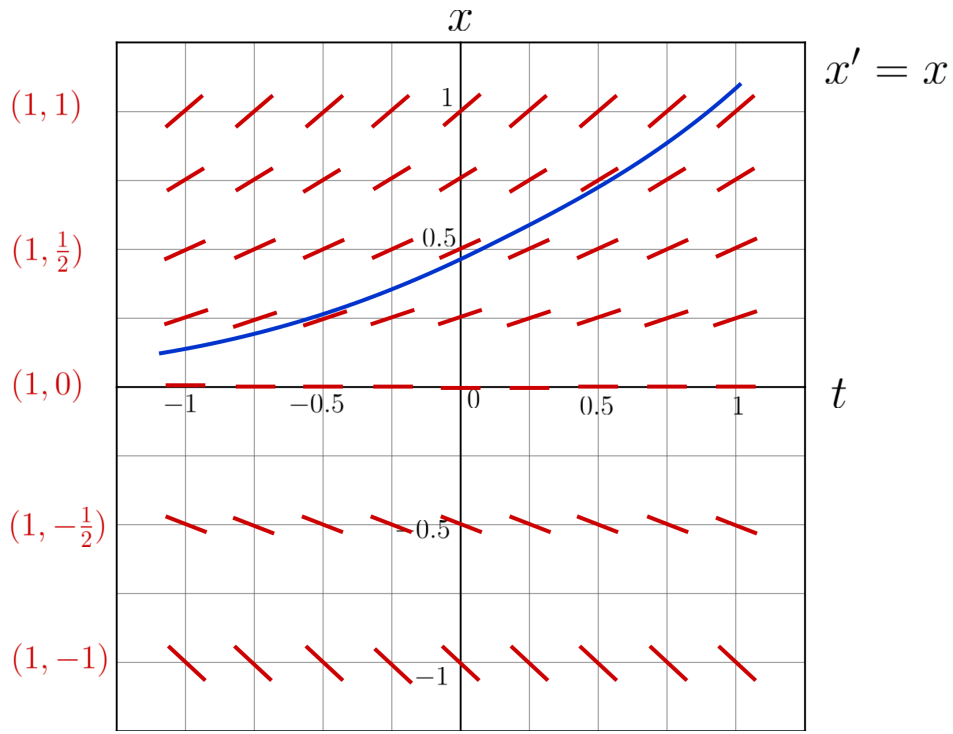


(t,x)-平面の各点において，その点を通る解曲線の傾きを示す短い線分（方向は $(1,f(t,x))$）を引いた図を 方向の場 （または勾配場）という.

方向の場： $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ (3)

(3) の解の振る舞いをだいたい把握するのが簡単：
$x(t)$ が解で，(t,x)-平面の点 (t_0,x_0) を通るならば，
この点での $x(t)$ のグラフの傾きは $x'(t_0) = f(t_0,x(t_0)) = f(t_0,x_0)$.
これは，ODE を解かなくても，右辺を見てわかる情報.

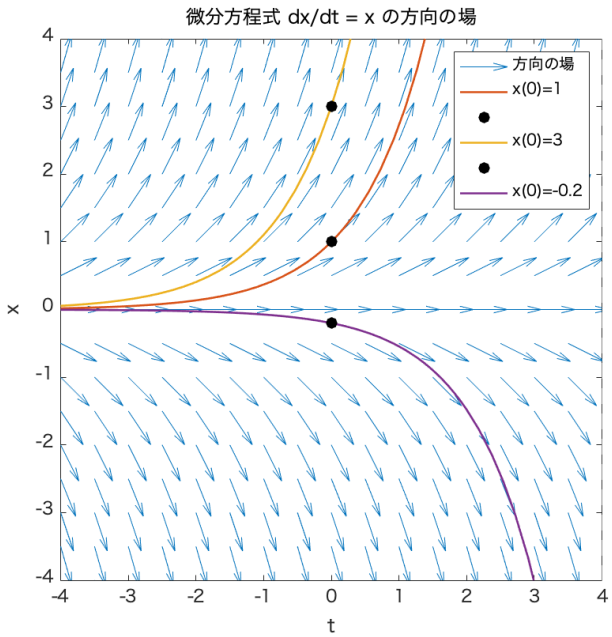




(t,x)-平面の各点において，その点を通る解曲線の傾きを示す短い線分（方向は $(1,f(t,x))$）を引いた図を **方向の場**（または勾配場）という.

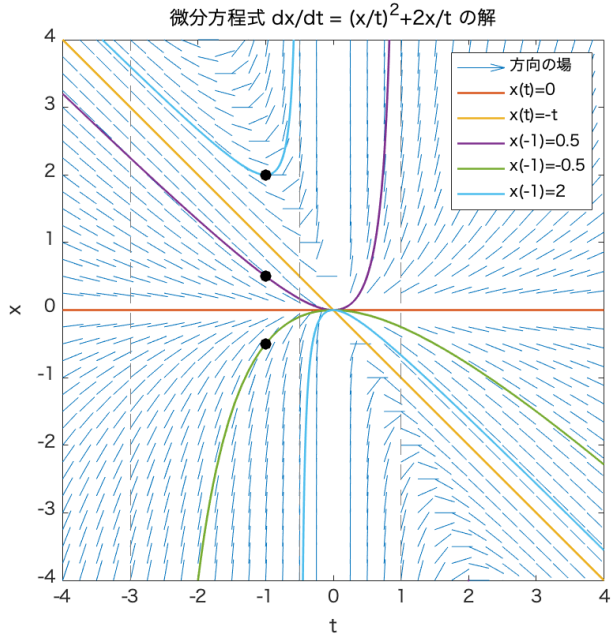
Matlab の例

$x' = x$　解 :$x(t) = Ce^t$



Matlab コード：houkounoba1.m

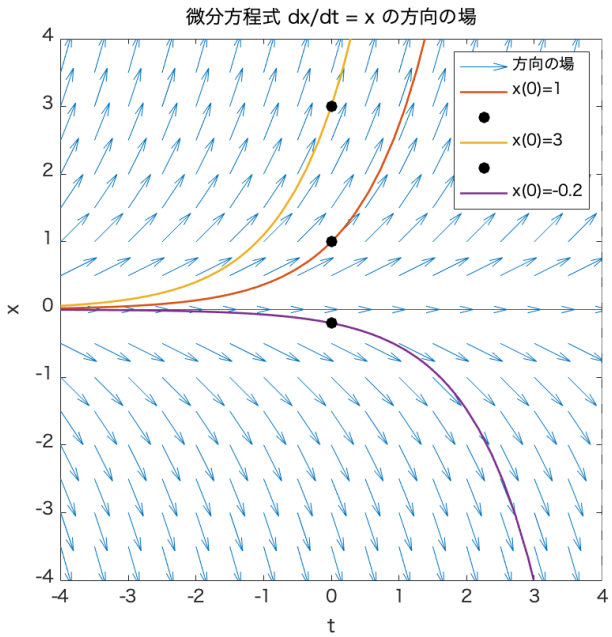
$x' = \frac{x^2}{t^2} + 2\frac{x}{t}$　解 :$x(t) = \frac{t^2}{C-t}$



Matlab コード：houkounoba2.m

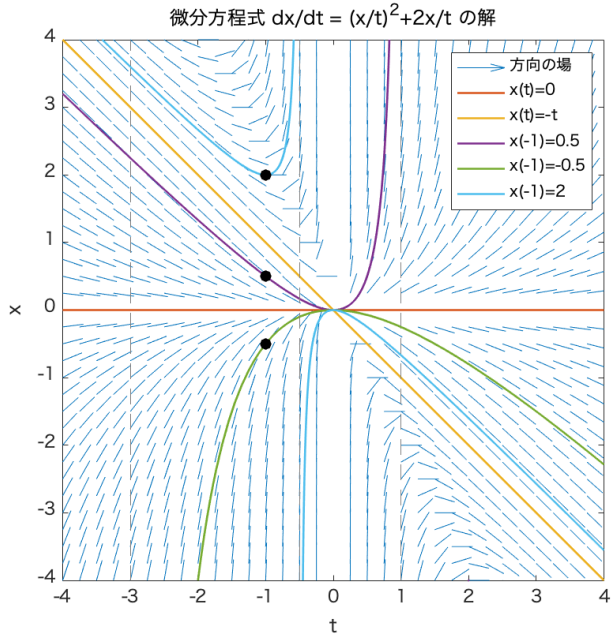
Matlab の例

$x' = x$　解 :$x(t) = Ce^t$



Matlab コード：houkounoba1.m

$x' = \frac{x^2}{t^2} + 2\frac{x}{t}$　解 :$x(t) = \frac{t^2}{C-t}$



Matlab コード：houkounoba2.m

解の存在と一意性

次の初期値問題の解の存在について考える：

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{4}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{5}$$

解の存在と一意性：$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ (4), $x(t_0) = x_0$ (5)

コーシーの定理

仮定：$f(t,x) : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$

(A1) f は $[a,b] \times [c,d]$ で連続

(A2) f は x についてリプシッツ連続，つまり，$K > 0$ があって，

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq K|x_1 - x_2| \quad \forall t \in [a,b],\ \forall x_1, x_2 \in [c,d] \qquad (6)$$

主張：任意の $(t_0, x_0) \in [a,b] \times [c,d]$ に対し，$\delta > 0$ があって，(4)-(5) を $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ において満たす $x(t)$ がただ一つ存在する．

注：$\frac{\partial f}{\partial x}$ が $[a,b] \times [c,d]$ で連続ならば，定理の仮定 (A2) は満たされる．実際，このとき，$|\frac{\partial f}{\partial x}|$ は $[a,b] \times [c,d]$ で有界であり，この最大値を K とすると，リプシッツの条件が成り立つ．

レポート

今回の講義のレポート問題を解いて，提出して下さい.
（詳しいことは PandA の「手紙 02」を参照すること.）

微分積分学続論 II： 第 3 回

Karel Svadlenka

2020 年 4 月 22 日

1　はじめに

■1 階常微分方程式（first order ODE）

1 階 ODE　$F(t, x, x') = 0$　に対して 2 種類の問題がある：

- 初期値問題（または，コーシー問題）

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{1}$$

- 一般解を求める問題 ODE の一般解とは $x(t, c)$ で書ける関数で，次を満たすもの：
  - $x(t, c)$ は全ての $c \in \mathbb{R}$ に対して ODE の解である
  - ODE の全ての解は $x(t, c)$ の形で書ける

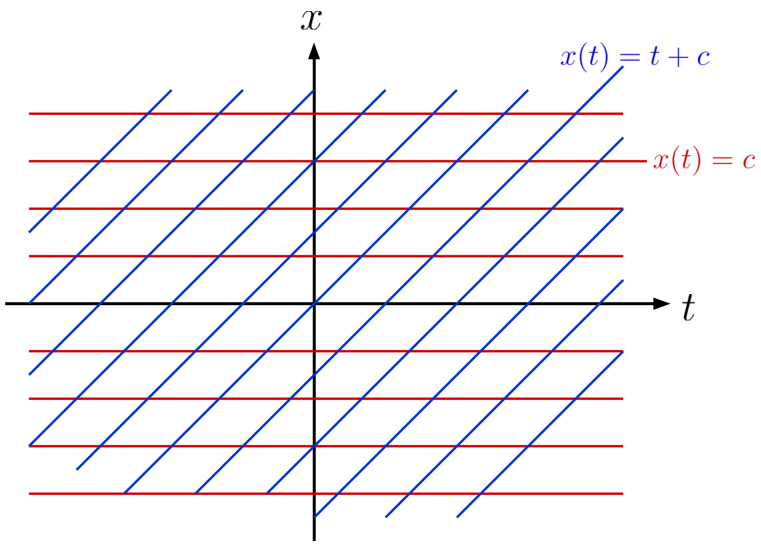
  例．$tx' - x = 0$
  の一般解は　$x(t) = ct,\ c \in \mathbb{R}$　（すべての解はこれで尽くされる）．

■正規型と非正規型

1 階 ODE　$F(t, x, x') = 0$　を二通り考える：

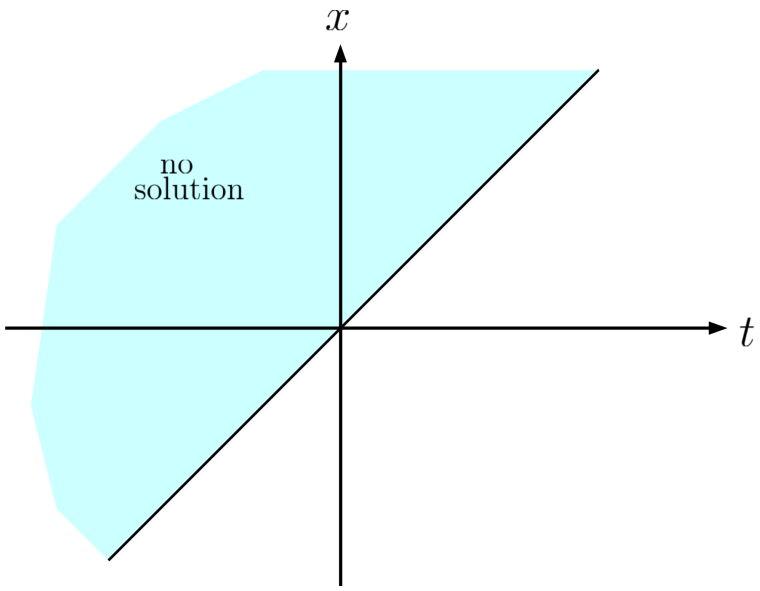
- 正規型：$x' = f(t, x)$ で書けるもの f がよければ，存在と一意性が言える
- 非正規型：それ以外

例．$(x')^2 - x' = 0$
$(x' - 1)x' = 0$ なので，$x' = 1$ または $x' = 0$ を満たす $x(t)$ は全て解：



一意性は成立しない.

例. $(x')^2 = t - x$
$t - x < 0$ となる点 (t, x) を通る実数解は存在しない：



存在は成立しない.

■ODE の求積法
　これから 1 階の正規型　$x' = f(t, x)$　の求積法を見ていく，すなわち，四則演算・微分・積分・関数の操作を用いて解を求める.

1. 変数分離型
2. 同次型
3. 線型
4. 全微分型
5. 積分因子
6. 級数解法

■変数分離型： $\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$

解き方：$h(x) \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{h(x)}\frac{dx}{dt} = g(t)$$

初期値問題：
$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(t)}{h(x(t))}\,dt = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

変数変換 $x = x(t), dx = x'(t)\,dt$

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

一般解：
$$\int \frac{x'(t)}{h(x(t))} = \int g(t)\,dt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)\,dt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

■変数分離型：$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$

解き方：$h(x) \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{h(x)}\frac{dx}{dt} = g(t)$$

初期値問題：
$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(t)}{h(x(t))}\,dt = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

変数変換 $x = x(t), dx = x'(t)\,dt$

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

$h(x) = 0$ を満たす $x_r \in \mathbb{R}$ があれば，$x(t) = x_r$（定数関数）は解である．$\Rightarrow$ $h(x) = 0$ の根 $x_r^1, \ldots, x_r^n$ に対する直線 $x(t) = x_r^i, i = 1, \ldots, n$ によって全ての解が分離される．

■例：ロジスティック方程式　$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 = (a - bx)x$

関数 $f(t, x) = (a - bx)x$ は任意の長方形領域で連続，x についてリプシッツ条件を満たすので，任意の初期値に対してただ一つの解が存在する．$x \neq a/b$ と $x \neq 0$ のとき，

$$\frac{1}{(a-bx)x}\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \text{左辺は} \quad = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{x} - \frac{b}{bx-a}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{a}\Big(\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{b}{bx-a}\,dx\Big) = \int dt + C''$$

$$\frac{1}{a}\big(\log|x| - \log|bx-a|\big) = t + C''$$

$$\log\left|\frac{x}{bx-a}\right| = at + C'$$

$$\frac{x}{bx-a} = \pm e^{at+C'} = \pm e^{C'}e^{at} = Ce^{at} \qquad (C \neq 0)$$

$$x(t) = \frac{a}{be^{at} - \frac{1}{C}}e^{at}, \qquad C \neq 0$$

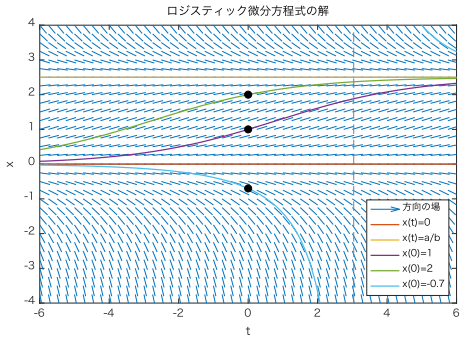
■例：ロジスティック方程式　$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 = (a - bx)x$

$x \neq a/b$ と $x \neq 0$ のとき，

$$\frac{1}{(a-bx)x}\frac{dx}{dt} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{Cae^{at}}{Cbe^{at} - 1}, \quad C \neq 0$$

$x(t) = \frac{a}{b}$, $x(t) = 0$ も解.

$a = 0.5$, $b = 0.2$ のときの解の様子：



■同次型：$\frac{dx}{dt} = \varphi(\frac{x}{t})$

判定方法

$f(t,x) = \varphi(\frac{x}{t})$ となる φ が存在する　$\Leftrightarrow$　$f(\lambda t, \lambda x)$ は λ に依らない.

Proof:

$\Rightarrow$ $f(t,x) = \varphi(\frac{x}{t})$ より $f(\lambda t, \lambda x) = \varphi(\frac{\lambda x}{\lambda t}) = \varphi(\frac{x}{t})$, λ に依らない

$\Leftarrow$ $f(\lambda t, \lambda x)$ は λ に依らないことより，（$\lambda = 1$ と $\lambda = \frac{1}{t}$ として）$f(t,x) = f(\frac{1}{t}t, \frac{1}{t}x) = f(1, \frac{x}{t})$. $\varphi(s) = f(1,s)$ とすればよい.

解き方：新しい未知関数 $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ を導入すると，

$$x'(t) = (tu(t))' = u(t) + tu'(t)$$

よって，ODE に代入すると，

$$\begin{aligned} u + tu' &= \varphi(u) \\ u' &= \frac{\varphi(u) - u}{t} \end{aligned}$$ … 変数分離型として解ける

■同次型：$\frac{dx}{dt} = \varphi(\frac{x}{t})$

解き方：変数変換 $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ により $x' = u + tu'$,

$$\begin{aligned} u + tu' &= \varphi(u) \\ u' &= \frac{\varphi(u) - u}{t} \end{aligned}$$ … 変数分離型として解ける

注：

- u_r が $\varphi(u) - u = 0$ の根ならば，直線 $x(t) = u_r t$ は解.
- 直線 $x = mt$ 上では，$x' = \varphi(\frac{x}{t}) = \varphi(m)$ が一定なので，方向の場も一定で，すべての解曲線と $x = mt$ は同じ角度で交わっている.

■例：$t^2 \frac{dx}{dt} = x^2 + 2tx$

$x' = f(t,x) = (\frac{x}{t})^2 + 2\frac{x}{t}$ と書き換えられる． f は $t=0$ となるような点を含まない任意の長方形領域で連続，x についてリプシッツ条件を満たす $\Rightarrow$ $t=0$ 以外はただ一つの解が存在． 点 $(0,x_0)$ を通る解が存在しない / 複数ある可能性がある．

解く ：$x(t) = tu(t)$ で $u(t)$ を定義して，

$$tu' + u = u^2 + 2u \qquad \text{すなわち} \qquad tu' = u^2 + u$$

$u \neq 0,\ u \neq -1$ のとき，

$$\int \frac{du}{u^2+u} = \int \frac{dt}{t} + C'$$
$$\log|u| - \log|u+1| = \log|t| + C', \qquad C' \in \mathbb{R}.$$
$$\frac{u}{u+1} = Ct \qquad (C = \pm e^{C'},\ C \in \mathbb{R},\ C \neq 0)$$

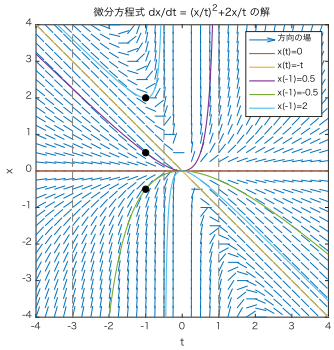
ここで，u をもとの x/t で置き換え，整理すれば，一般解

$$x(t) = \frac{Ct^2}{1-Ct}, \quad C \in \mathbb{R},\ C \neq 0 \qquad \text{定義域 :} t \neq \frac{1}{C}.$$

■例：$t^2\frac{dx}{dt} = x^2 + 2tx$

$$\text{変数変換：} \quad x(t) = tu(t) \Rightarrow \int \frac{du}{u^2+u} = \int \frac{dt}{t} + C'$$
$$\text{積分して，} \quad x \text{ を戻す} \Rightarrow x(t) = \frac{Ct^2}{1-Ct}, \quad C \in \mathbb{R},\ C \neq 0$$

$u^2 + u = 0$ の根 $u_r^1 = 0,\ u_r^2 = -1$ に対応する解は $x(t) = 0$ と $x(t) = -t$. 一般解で $C = 0,\ C \to \infty$ とそれぞれおいて得られる特殊解である．



■線型：$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)$

解き方 1 ：$e^{-\int p(t)\,dt}$ を両辺にかける：

$$\underbrace{e^{-\int p(t)\,dt}\frac{dx}{dt} - p(t)e^{-\int p(t)\,dt}x(t)}_{=\frac{d}{dt}\left(e^{-\int p(t)\,dt}x(t)\right)} = q(t)e^{-\int p(t)\,dt}$$

$$\text{積分して} \qquad e^{-\int p(t)\,dt}x(t) = \int q(t)e^{-\int p(t)\,dt} + C$$
$$x(t) = e^{\int p(t)\,dt}\left(C + \int q(t)e^{-\int p(t)\,dt}\right)$$

コーシー問題（初期条件 $x(t_0) = x_0$）の場合，$e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}$ をかけて， 結果を t_0 から t まで積分する．

■例：$x' = -x\cos t + e^{-\sin t}$

ここでは，$p(t) = -\cos t, q(t) = e^{-\sin t}$.

$e^{-\int p(t)\,dt} = e^{\sin t}$ を両辺にかける．

$$\begin{aligned} x'e^{\sin t} + x\cos t e^{\sin t} &= 1 \\ \frac{d}{dt}\left(x(t)e^{\sin t}\right) &= 1 \\ x(t)e^{\sin t} &= t + C \\ x(t) &= (t+C)e^{-\sin t}, \qquad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

■線型：$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)$

解き方 2 = 定数変化法 は次の観察に基づく：線型 ODE の一般解は定数 C について 1 次関数で，C を含む項は $q = 0$ とした方程式の解である．

(1) $q = 0$ とした方程式を解く： $x'(t) = p(t)x$

(2) 定数 C を t の関数とみなし，　一般解は　$x(t) = Ce^{\int p(t)\,dt},\ C \in \mathbb{R}.$

$$x(t) = C(t)e^{\int p(t)\,dt} \qquad \text{が元の方程式} \qquad x' = p(t)x + q(t)$$

を満たすように $C(t)$ を決める．

ODE に代入すると，

$$\begin{aligned} C'e^{\int p} + Cpe^{\int p} &= pCe^{\int p} + q \\ C' &= qe^{-\int p} \end{aligned}$$

解法 1 と同じ形の解を得る．

■線型に帰着できる ODE の例

- ベルヌイ方程式： $\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)x^\alpha$ $(\alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$

$$\begin{aligned} x^\alpha\text{で割る：}\quad x^{-\alpha}\frac{dx}{dt} &= p(t)x^{1-\alpha} + q(t) \\ \frac{1}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\left(x^{1-\alpha}\right) &= p(t)x^{1-\alpha} + q(t) \\ \Rightarrow \quad u = x^{1-\alpha} &\quad \text{について線型} \end{aligned}$$

- リッカチ方程式： $\frac{dx}{dt} = p(t)x^2 + q(t)x + r(t)$

一つの解 $\widetilde{x}(t)$ (特殊解) が見つかれば，一般解を求めることができる：新しい未知関数 u を $x(t) = \widetilde{x}(t) + u(t)$ で定義し，ODE に代入:

$$\begin{aligned} &\widetilde{x}' + u' = p(\widetilde{x}+u)^2 + q(\widetilde{x}+u) + r \\ &\underbrace{u' = pu^2 + (2p\widetilde{x}+q)u}_{\alpha=2\text{ のときのベルヌイ ODE}} + \underbrace{(-\widetilde{x}' + p\widetilde{x}^2 + q\widetilde{x} + r)}_{=0} \end{aligned}$$

■レポート

今回の講義のレポート問題を解いて，提出して下さい．（詳しいことは PandA の「手紙 03」を参照すること．）

「解答付き問題」のファイルで他の例題を紹介しています．

微分積分学続論 II： 第 3 回

Karel Svadlenka

京都大学大学院理学研究科 数学教室

2020 年 4 月 22 日

1階常微分方程式（first order ODE）

1階 ODE　$F(t, x, x') = 0$　に対して2種類の問題がある：

- 初期値問題（または，コーシー問題）

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{1}$$

- 一般解を求める問題

  ODE の一般解とは $x(t, c)$ で書ける関数で，次を満たすもの：
  - $x(t, c)$ は全ての $c \in \mathbb{R}$ に対して ODE の解である
  - ODE の全ての解は $x(t, c)$ の形で書ける

例．$tx' - x = 0$

の一般解は　$x(t) = ct,\ c \in \mathbb{R}$

（すべての解はこれで尽くされる）．

1階常微分方程式（first order ODE）

1階 ODE　$F(t, x, x') = 0$　に対して2種類の問題がある：

- **初期値問題**（または，コーシー問題）

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{1}$$

- **一般解を求める問題**

  ODE の一般解とは $x(t, c)$ で書ける関数で，次を満たすもの：
  - $x(t, c)$ は全ての $c \in \mathbb{R}$ に対して ODE の解である
  - ODE の全ての解は $x(t, c)$ の形で書ける

例．$tx' - x = 0$

の一般解は　$x(t) = ct,\ c \in \mathbb{R}$

（すべての解はこれで尽くされる）．

1階常微分方程式（first order ODE）

1階 ODE　$F(t, x, x') = 0$　に対して2種類の問題がある：

- **初期値問題**（または，コーシー問題）

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{1}$$

- **一般解を求める問題**

  ODE の一般解とは $x(t, c)$ で書ける関数で，次を満たすもの：
  - $x(t, c)$ は全ての $c \in \mathbb{R}$ に対して ODE の解である
  - ODE の全ての解は $x(t, c)$ の形で書ける

例． $tx' - x = 0$

の一般解は　$x(t) = ct,\ c \in \mathbb{R}$

（すべての解はこれで尽くされる）.

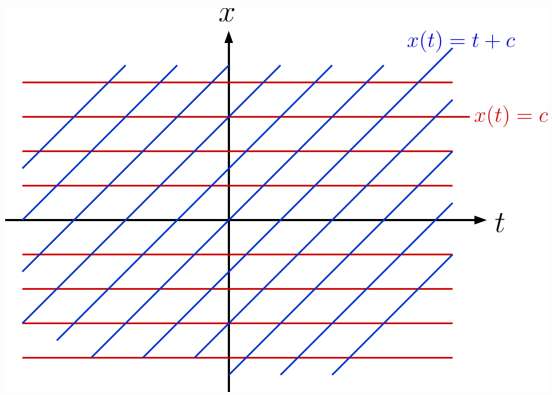
正規型と非正規型

1 階 ODE　$F(t, x, x') = 0$　を二通り考える：

- **正規型**：$x' = f(t, x)$ で書けるもの
  f がよければ，存在と一意性が言える
- **非正規型**：それ以外

例. $(x')^2 - x' = 0$

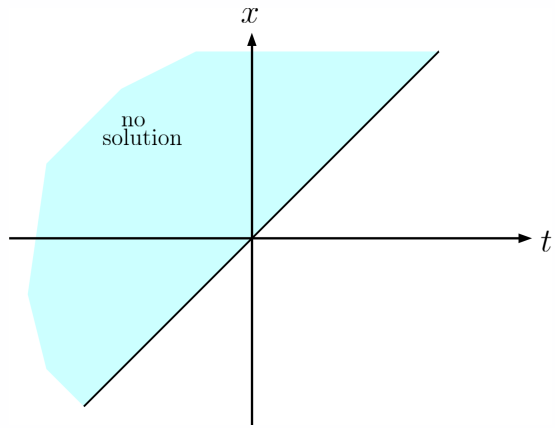
$(x' - 1)x' = 0$ なので，$x' = 1$ または $x' = 0$ を満たす $x(t)$ は全て解：



一意性は成立しない.

例. $(x')^2 = t - x$

$t - x < 0$ となる点 (t, x) を通る実数解は存在しない：



存在は成立しない.

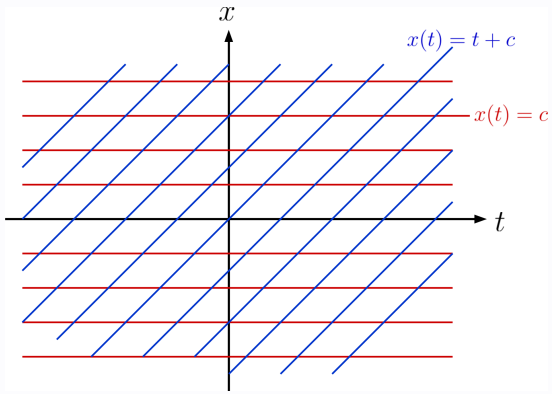
正規型と非正規型

1 階 ODE　$F(t, x, x') = 0$　を二通り考える：

- **正規型**：$x' = f(t, x)$ で書けるもの
  f がよければ，存在と一意性が言える
- **非正規型**：それ以外

例. $(x')^2 - x' = 0$

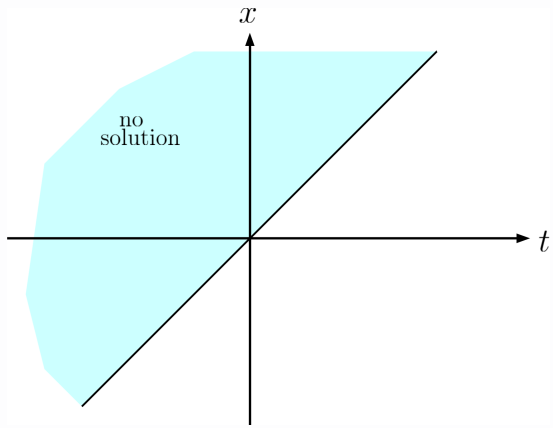
$(x' - 1)x' = 0$ なので，$x' = 1$ または $x' = 0$ を満たす $x(t)$ は全て解：



一意性は成立しない.

例. $(x')^2 = t - x$

$t - x < 0$ となる点 (t, x) を通る実数解は存在しない：



存在は成立しない.

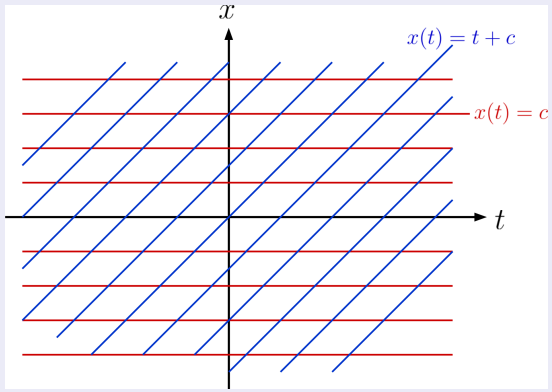
正規型と非正規型

1 階 ODE　$F(t, x, x') = 0$　を二通り考える：

- **正規型**：$x' = f(t, x)$ で書けるもの
  f がよければ，存在と一意性が言える
- **非正規型**：それ以外

例. $(x')^2 - x' = 0$

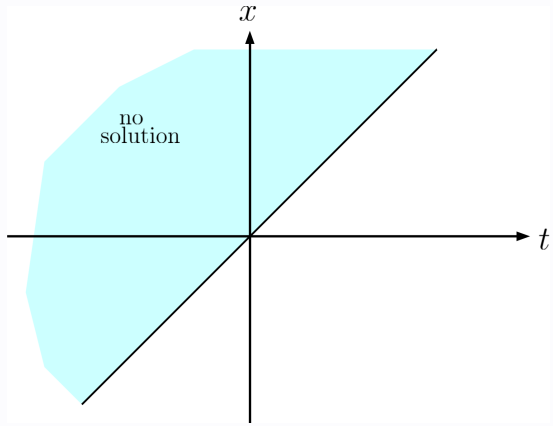
$(x' - 1)x' = 0$ なので，$x' = 1$ または $x' = 0$ を満たす $x(t)$ は全て解：



一意性は成立しない.

例. $(x')^2 = t - x$

$t - x < 0$ となる点 (t, x) を通る実数解は存在しない：



存在は成立しない.

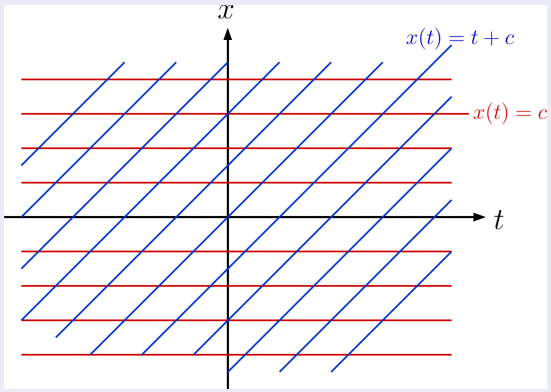
正規型と非正規型

1 階 ODE　$F(t, x, x') = 0$　を二通り考える：

- **正規型**：$x' = f(t, x)$ で書けるもの
  f がよければ，存在と一意性が言える
- **非正規型**：それ以外

例. $(x')^2 - x' = 0$

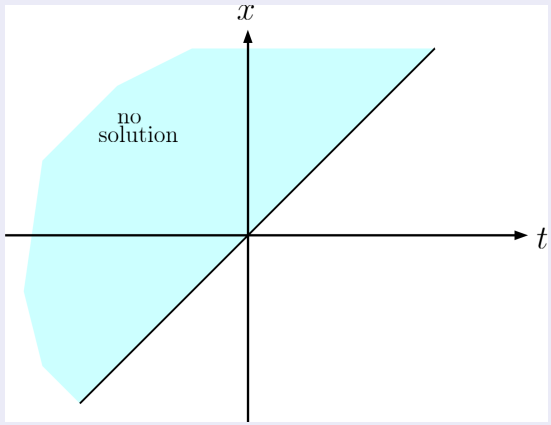
$(x' - 1)x' = 0$ なので，$x' = 1$ または $x' = 0$ を満たす $x(t)$ は全て解：



一意性は成立しない.

例. $(x')^2 = t - x$

$t - x < 0$ となる点 (t, x) を通る実数解は存在しない：



存在は成立しない.

ODE の求積法

これから 1 階の正規型　$x' = f(t, x)$　の求積法を見ていく，すなわち，四則演算・微分・積分・関数の操作を用いて解を求める.

1. 変数分離型
2. 同次型
3. 線型
4. 全微分型
5. 積分因子
6. 級数解法

ODE の求積法

これから 1 階の正規型　$x' = f(t, x)$　の求積法を見ていく，すなわち，四則演算・微分・積分・関数の操作を用いて解を求める.

1. 変数分離型
2. 同次型
3. 線型
4. 全微分型
5. 積分因子
6. 級数解法

変数分離型： $\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$

解き方：$h(x) \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h(x)}\frac{dx}{dt} &= g(t) \\
\int_{t_0}^{t} \frac{x'(t)}{h(x(t))}\,dt &= \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt \\
\text{変数変換 } x = x(t), dx = x'(t)\,dt & \\
\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{h(x)} &= \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt \\
\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{h(x)} &= \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt \\
\text{一般解：} \int \frac{x'(t)}{h(x(t))} &= \int g(t)\,dt + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
\int \frac{dx}{h(x)} &= \int g(t)\,dt + C, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

初期値問題：

変数分離型： $\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$

解き方：$h(x) \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{h(x)}\frac{dx}{dt} = g(t)$$

初期値問題：
$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(t)}{h(x(t))}\,dt = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

変数変換 $x = x(t), dx = x'(t)\,dt$

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

一般解：
$$\int \frac{x'(t)}{h(x(t))} = \int g(t)\,dt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)\,dt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

変数分離型： $\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$

解き方：$h(x) \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{h(x)}\frac{dx}{dt} = g(t)$$

初期値問題：
$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(t)}{h(x(t))}\,dt = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

変数変換 $x = x(t), dx = x'(t)\,dt$

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

一般解：
$$\int \frac{x'(t)}{h(x(t))} = \int g(t)\,dt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)\,dt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

変数分離型： $\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$

解き方：$h(x) \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{h(x)}\frac{dx}{dt} = g(t)$$

初期値問題：
$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(t)}{h(x(t))}\,dt = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

変数変換 $x = x(t), dx = x'(t)\,dt$

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

一般解：
$$\int \frac{x'(t)}{h(x(t))} = \int g(t)\,dt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)\,dt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

変数分離型： $\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$

解き方：$h(x) \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{h(x)}\frac{dx}{dt} = g(t)$$

初期値問題：
$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(t)}{h(x(t))}\,dt = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

変数変換 $x = x(t), dx = x'(t)\,dt$

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

一般解：
$$\int \frac{x'(t)}{h(x(t))} = \int g(t)\,dt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)\,dt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

変数分離型： $\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$

解き方：$h(x) \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{h(x)}\frac{dx}{dt} = g(t)$$

初期値問題：
$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(t)}{h(x(t))}\,dt = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

変数変換 $x = x(t), dx = x'(t)\,dt$

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

一般解：
$$\int \frac{x'(t)}{h(x(t))} = \int g(t)\,dt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)\,dt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

変数分離型： $\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$

解き方：$h(x) \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{h(x)}\frac{dx}{dt} = g(t)$$

初期値問題：
$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(t)}{h(x(t))}\,dt = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

変数変換 $x = x(t), dx = x'(t)\,dt$

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

一般解：
$$\int \frac{x'(t)}{h(x(t))} = \int g(t)\,dt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)\,dt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

変数分離型： $\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$

解き方：$h(x) \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{h(x)}\frac{dx}{dt} = g(t)$$

初期値問題：
$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(t)}{h(x(t))}\,dt = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

変数変換 $x = x(t), dx = x'(t)\,dt$

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

$h(x) = 0$ を満たす $x_r \in \mathbb{R}$ があれば，$x(t) = x_r$（定数関数）は解である．
$\Rightarrow$ $h(x) = 0$ の根 $x_r^1, \ldots, x_r^n$ に対する直線 $x(t) = x_r^i, i = 1, \ldots, n$ によって全ての解が分離される．

変数分離型： $\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$

解き方：$h(x) \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{h(x)}\frac{dx}{dt} = g(t)$$

初期値問題：
$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(t)}{h(x(t))}\,dt = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

変数変換 $x = x(t), dx = x'(t)\,dt$

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

$h(x) = 0$ を満たす $x_r \in \mathbb{R}$ があれば，$x(t) = x_r$（定数関数）は解である．
$\Rightarrow$ $h(x) = 0$ の根 $x_r^1, \ldots, x_r^n$ に対する直線 $x(t) = x_r^i, i = 1, \ldots, n$ によって全ての解が分離される．

例：ロジスティック方程式 $\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 = (a - bx)x$

関数 $f(t, x) = (a - bx)x$ は任意の長方形領域で連続，x についてリプシッツ条件を満たすので，任意の初期値に対してただ一つの解が存在する．

$x \neq a/b$ と $x \neq 0$ のとき，

$$\frac{1}{(a-bx)x}\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \text{左辺は} \quad = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{x} - \frac{b}{bx-a}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{a}\left(\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{b}{bx-a}\,dx\right) = \int dt + C''$$

$$\frac{1}{a}\left(\log|x| - \log|bx-a|\right) = t + C''$$

$$\log\left|\frac{x}{bx-a}\right| = at + C'$$

$$\frac{x}{bx-a} = \pm e^{at+C'} = \pm e^{C'}e^{at} = Ce^{at} \qquad (C \neq 0)$$

$$x(t) = \frac{a}{be^{at} - \frac{1}{C}}e^{at}, \qquad C \neq 0$$

例：ロジスティック方程式 $\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 = (a - bx)x$

関数 $f(t, x) = (a - bx)x$ は任意の長方形領域で連続，x についてリプシッツ条件を満たすので，任意の初期値に対してただ一つの解が存在する．
$x \neq a/b$ と $x \neq 0$ のとき，

$$\frac{1}{(a-bx)x}\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \text{左辺は} \quad = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{x} - \frac{b}{bx-a}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{a}\left(\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{b}{bx-a}\,dx\right) = \int dt + C''$$

$$\frac{1}{a}\left(\log|x| - \log|bx-a|\right) = t + C''$$

$$\log\left|\frac{x}{bx-a}\right| = at + C'$$

$$\frac{x}{bx-a} = \pm e^{at+C'} = \pm e^{C'}e^{at} = Ce^{at} \qquad (C \neq 0)$$

$$x(t) = \frac{a}{be^{at} - \frac{1}{C}}e^{at}, \qquad C \neq 0$$

例：ロジスティック方程式 $\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 = (a - bx)x$

関数 $f(t, x) = (a - bx)x$ は任意の長方形領域で連続，x についてリプシッツ条件を満たすので，任意の初期値に対してただ一つの解が存在する．
$x \neq a/b$ と $x \neq 0$ のとき，

$$\frac{1}{(a-bx)x}\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \text{左辺は} \quad = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{x} - \frac{b}{bx-a}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{a}\left(\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{b}{bx-a}\,dx\right) = \int dt + C''$$

$$\frac{1}{a}\left(\log|x| - \log|bx-a|\right) = t + C''$$

$$\log\left|\frac{x}{bx-a}\right| = at + C'$$

$$\frac{x}{bx-a} = \pm e^{at+C'} = \pm e^{C'}e^{at} = Ce^{at} \qquad (C \neq 0)$$

$$x(t) = \frac{a}{be^{at} - \frac{1}{C}}e^{at}, \qquad C \neq 0$$

例：ロジスティック方程式 $\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 = (a - bx)x$

関数 $f(t, x) = (a - bx)x$ は任意の長方形領域で連続，x についてリプシッツ条件を満たすので，任意の初期値に対してただ一つの解が存在する．
$x \neq a/b$ と $x \neq 0$ のとき，

$$\frac{1}{(a-bx)x}\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \text{左辺は} \quad = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{x} - \frac{b}{bx-a}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{a}\left(\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{b}{bx-a}\,dx\right) = \int dt + C''$$

$$\frac{1}{a}\left(\log|x| - \log|bx-a|\right) = t + C''$$

$$\log\left|\frac{x}{bx-a}\right| = at + C'$$

$$\frac{x}{bx-a} = \pm e^{at+C'} = \pm e^{C'}e^{at} = Ce^{at} \qquad (C \neq 0)$$

$$x(t) = \frac{a}{be^{at} - \frac{1}{C}}e^{at}, \qquad C \neq 0$$

例：ロジスティック方程式 $\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 = (a - bx)x$

関数 $f(t, x) = (a - bx)x$ は任意の長方形領域で連続，x についてリプシッツ条件を満たすので，任意の初期値に対してただ一つの解が存在する．
$x \neq a/b$ と $x \neq 0$ のとき，

$$\frac{1}{(a-bx)x}\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \text{左辺は} \quad = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{x} - \frac{b}{bx-a}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{a}\left(\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{b}{bx-a}\,dx\right) = \int dt + C''$$

$$\frac{1}{a}\left(\log|x| - \log|bx-a|\right) = t + C''$$

$$\log\left|\frac{x}{bx-a}\right| = at + C'$$

$$\frac{x}{bx-a} = \pm e^{at+C'} = \pm e^{C'}e^{at} = Ce^{at} \qquad (C \neq 0)$$

$$x(t) = \frac{a}{be^{at} - \frac{1}{C}}e^{at}, \qquad C \neq 0$$

例：ロジスティック方程式 $\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 = (a - bx)x$

関数 $f(t, x) = (a - bx)x$ は任意の長方形領域で連続，x についてリプシッツ条件を満たすので，任意の初期値に対してただ一つの解が存在する．
$x \neq a/b$ と $x \neq 0$ のとき，

$$\frac{1}{(a-bx)x}\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \text{左辺は} \quad = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{x} - \frac{b}{bx-a}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{a}\left(\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{b}{bx-a}\,dx\right) = \int dt + C''$$

$$\frac{1}{a}\left(\log|x| - \log|bx-a|\right) = t + C''$$

$$\log\left|\frac{x}{bx-a}\right| = at + C'$$

$$\frac{x}{bx-a} = \pm e^{at+C'} = \pm e^{C'}e^{at} = Ce^{at} \qquad (C \neq 0)$$

$$x(t) = \frac{a}{be^{at} - \frac{1}{C}}e^{at}, \qquad C \neq 0$$

例：ロジスティック方程式 $\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 = (a - bx)x$

関数 $f(t, x) = (a - bx)x$ は任意の長方形領域で連続，x についてリプシッツ条件を満たすので，任意の初期値に対してただ一つの解が存在する．
$x \neq a/b$ と $x \neq 0$ のとき，

$$\frac{1}{(a-bx)x}\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \text{左辺は} \quad = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{x} - \frac{b}{bx-a}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{a}\left(\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{b}{bx-a}\,dx\right) = \int dt + C''$$

$$\frac{1}{a}\left(\log|x| - \log|bx-a|\right) = t + C''$$

$$\log\left|\frac{x}{bx-a}\right| = at + C'$$

$$\frac{x}{bx-a} = \pm e^{at+C'} = \pm e^{C'}e^{at} = Ce^{at} \qquad (C \neq 0)$$

$$x(t) = \frac{a}{be^{at} - \frac{1}{C}}e^{at}, \qquad C \neq 0$$

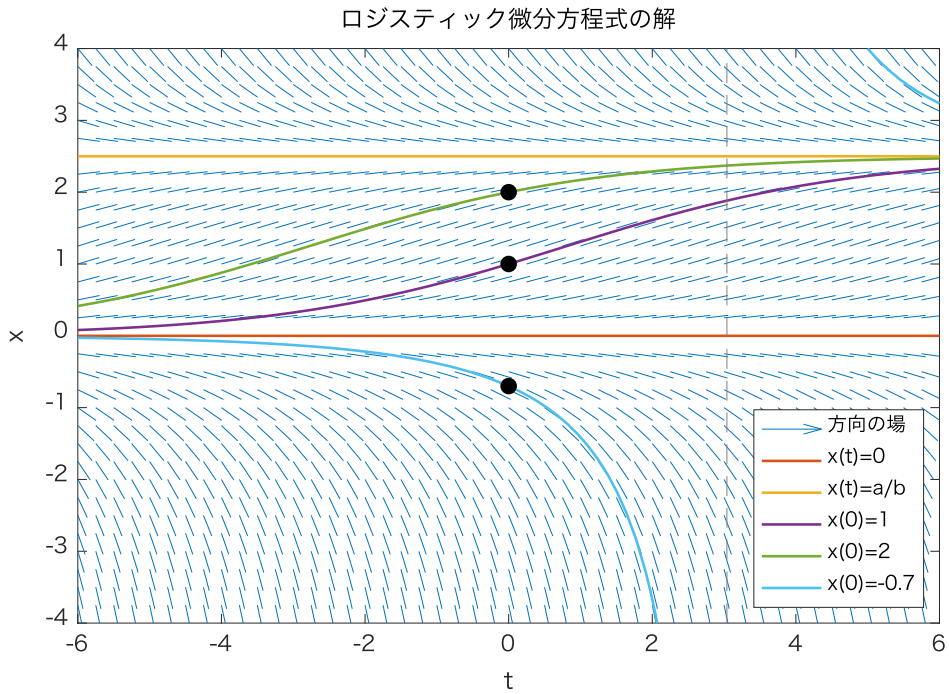
例：ロジスティック方程式 $\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 = (a - bx)x$

$x \neq a/b$ と $x \neq 0$ のとき,

$$\frac{1}{(a - bx)x}\frac{dx}{dt} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{Cae^{at}}{Cbe^{at} - 1}, \quad C \neq 0$$

$x(t) = \frac{a}{b}$, $x(t) = 0$ も解.

$a = 0.5$, $b = 0.2$ のときの解の様子：



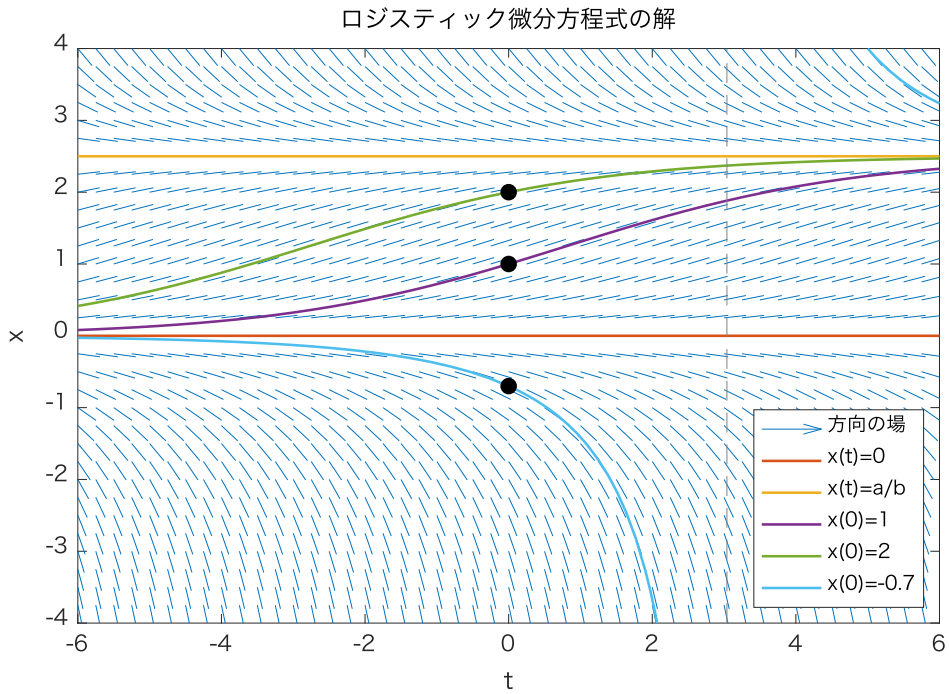
例：ロジスティック方程式 $\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 = (a - bx)x$

$x \neq a/b$ と $x \neq 0$ のとき,

$$\frac{1}{(a - bx)x}\frac{dx}{dt} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{Cae^{at}}{Cbe^{at} - 1}, \quad C \neq 0$$

$x(t) = \frac{a}{b}$, $x(t) = 0$ も解.

$a = 0.5$, $b = 0.2$ のときの解の様子：



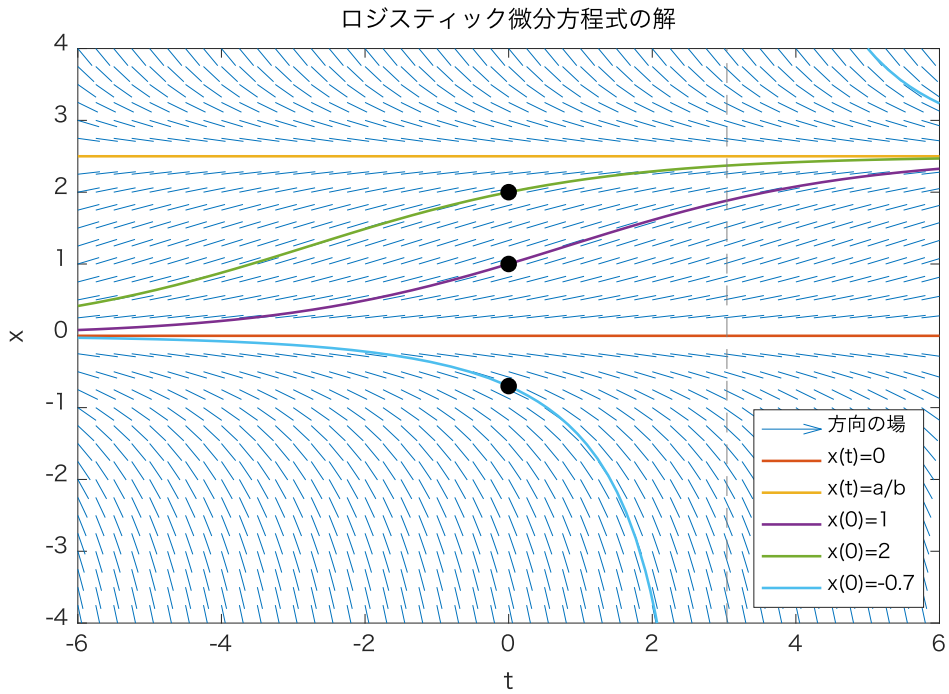
例：ロジスティック方程式 $\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 = (a - bx)x$

$x \neq a/b$ と $x \neq 0$ のとき,

$$\frac{1}{(a - bx)x}\frac{dx}{dt} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{Cae^{at}}{Cbe^{at} - 1}, \quad C \neq 0$$

$x(t) = \frac{a}{b}$, $x(t) = 0$ も解.

$a = 0.5$, $b = 0.2$ のときの解の様子：



同次型：$\frac{dx}{dt} = \varphi(\frac{x}{t})$

判定方法

$f(t,x) = \varphi(\frac{x}{t})$ となる φ が存在する $\Leftrightarrow$ $f(\lambda t, \lambda x)$ は λ に依らない.

Proof:

$\Rightarrow$ $f(t,x) = \varphi(\frac{x}{t})$ より $f(\lambda t, \lambda x) = \varphi(\frac{\lambda x}{\lambda t}) = \varphi(\frac{x}{t})$, λ に依らない

$\Leftarrow$ $f(\lambda t, \lambda x)$ は λ に依らないことより, ($\lambda = 1$ と $\lambda = \frac{1}{t}$ として)
$f(t,x) = f(\frac{1}{t}t, \frac{1}{t}x) = f(1, \frac{x}{t})$. $\varphi(s) = f(1,s)$ とすればよい.

解き方：新しい未知関数 $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ を導入すると,

$$x'(t) = (tu(t))' = u(t) + tu'(t)$$

よって, ODE に代入すると,

$$\begin{aligned} u + tu' &= \varphi(u) \\ u' &= \frac{\varphi(u) - u}{t} \quad \cdots \text{ 変数分離型として解ける} \end{aligned}$$

同次型：$\frac{dx}{dt} = \varphi(\frac{x}{t})$

判定方法

$f(t,x) = \varphi(\frac{x}{t})$ となる φ が存在する $\Leftrightarrow$ $f(\lambda t, \lambda x)$ は λ に依らない.

Proof:

- $\Rightarrow$ $f(t,x) = \varphi(\frac{x}{t})$ より $f(\lambda t, \lambda x) = \varphi(\frac{\lambda x}{\lambda t}) = \varphi(\frac{x}{t})$, λ に依らない
- $\Leftarrow$ $f(\lambda t, \lambda x)$ は λ に依らないことより, ($\lambda = 1$ と $\lambda = \frac{1}{t}$ として)
  $f(t,x) = f(\frac{1}{t}t, \frac{1}{t}x) = f(1, \frac{x}{t})$. $\varphi(s) = f(1,s)$ とすればよい.

解き方：新しい未知関数 $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ を導入すると,

$$x'(t) = (tu(t))' = u(t) + tu'(t)$$

よって，ODE に代入すると,

$$\begin{aligned} u + tu' &= \varphi(u) \\ u' &= \frac{\varphi(u) - u}{t} \quad \dots \text{ 変数分離型として解ける} \end{aligned}$$

同次型：$\frac{dx}{dt} = \varphi(\frac{x}{t})$

判定方法

$f(t,x) = \varphi(\frac{x}{t})$ となる φ が存在する $\Leftrightarrow$ $f(\lambda t, \lambda x)$ は λ に依らない.

Proof:

- $\Rightarrow$ $f(t,x) = \varphi(\frac{x}{t})$ より $f(\lambda t, \lambda x) = \varphi(\frac{\lambda x}{\lambda t}) = \varphi(\frac{x}{t})$, λ に依らない
- $\Leftarrow$ $f(\lambda t, \lambda x)$ は λ に依らないことより, ($\lambda = 1$ と $\lambda = \frac{1}{t}$ として)
  $f(t,x) = f(\frac{1}{t}t, \frac{1}{t}x) = f(1, \frac{x}{t})$. $\varphi(s) = f(1,s)$ とすればよい.

解き方：新しい未知関数 $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ を導入すると,

$$x'(t) = (tu(t))' = u(t) + tu'(t)$$

よって，ODE に代入すると,

$$\begin{aligned} u + tu' &= \varphi(u) \\ u' &= \frac{\varphi(u) - u}{t} \quad \dots \text{ 変数分離型として解ける} \end{aligned}$$

同次型：$\frac{dx}{dt} = \varphi(\frac{x}{t})$

判定方法

$f(t,x) = \varphi(\frac{x}{t})$ となる φ が存在する $\Leftrightarrow$ $f(\lambda t, \lambda x)$ は λ に依らない.

Proof:

$\Rightarrow$ $f(t,x) = \varphi(\frac{x}{t})$ より $f(\lambda t, \lambda x) = \varphi(\frac{\lambda x}{\lambda t}) = \varphi(\frac{x}{t})$, λ に依らない

$\Leftarrow$ $f(\lambda t, \lambda x)$ は λ に依らないことより, ($\lambda = 1$ と $\lambda = \frac{1}{t}$ として)
$f(t,x) = f(\frac{1}{t}t, \frac{1}{t}x) = f(1, \frac{x}{t})$. $\varphi(s) = f(1,s)$ とすればよい.

解き方：新しい未知関数 $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ を導入すると,

$$x'(t) = (tu(t))' = u(t) + tu'(t)$$

よって，ODE に代入すると,

$$\begin{aligned} u + tu' &= \varphi(u) \\ u' &= \frac{\varphi(u) - u}{t} \quad \ldots \text{ 変数分離型として解ける} \end{aligned}$$

同次型：$\frac{dx}{dt} = \varphi\left(\frac{x}{t}\right)$

解き方：変数変換 $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ により $x' = u + tu'$,

$$\begin{aligned} u + tu' &= \varphi(u) \\ u' &= \frac{\varphi(u) - u}{t} \quad \ldots \text{ 変数分離型として解ける} \end{aligned}$$

注：

- u_r が $\varphi(u) - u = 0$ の根ならば，直線 $x(t) = u_r t$ は解.
- 直線 $x = mt$ 上では，$x' = \varphi\left(\frac{x}{t}\right) = \varphi(m)$ が一定なので，方向の場も一定で，すべての解曲線と $x = mt$ は同じ角度で交わっている.

同次型：$\frac{dx}{dt} = \varphi\left(\frac{x}{t}\right)$

解き方：変数変換 $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ により $x' = u + tu'$,

$$\begin{aligned} u + tu' &= \varphi(u) \\ u' &= \frac{\varphi(u) - u}{t} \quad \ldots \text{ 変数分離型として解ける} \end{aligned}$$

注：

- u_r が $\varphi(u) - u = 0$ の根ならば，直線 $x(t) = u_r t$ は解.
- 直線 $x = mt$ 上では，$x' = \varphi\left(\frac{x}{t}\right) = \varphi(m)$ が一定なので，方向の場も一定で，すべての解曲線と $x = mt$ は同じ角度で交わっている.

同次型：$\frac{dx}{dt} = \varphi\left(\frac{x}{t}\right)$

解き方：変数変換 $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ により $x' = u + tu'$,

$$\begin{aligned} u + tu' &= \varphi(u) \\ u' &= \frac{\varphi(u) - u}{t} \quad \ldots \text{ 変数分離型として解ける} \end{aligned}$$

注：

- u_r が $\varphi(u) - u = 0$ の根ならば，直線 $x(t) = u_r t$ は解.
- 直線 $x = mt$ 上では，$x' = \varphi\left(\frac{x}{t}\right) = \varphi(m)$ が一定なので，方向の場も一定で，すべての解曲線と $x = mt$ は同じ角度で交わっている.

例：$t^2\frac{dx}{dt} = x^2 + 2tx$

$x' = f(t,x) = (\frac{x}{t})^2 + 2\frac{x}{t}$ と書き換えられる.

f は $t = 0$ となるような点を含まない任意の長方形領域で連続，x についてリプシッツ条件を満たす $\Rightarrow$ $t = 0$ 以外はただ一つの解が存在.

点 $(0, x_0)$ を通る解が存在しない / 複数ある可能性がある.

解く：$x(t) = tu(t)$ で $u(t)$ を定義して，

$$tu' + u = u^2 + 2u \qquad \text{すなわち} \qquad tu' = u^2 + u$$

$u \neq 0,\ u \neq -1$ のとき，

$$\int \frac{du}{u^2+u} = \int \frac{dt}{t} + C'$$

$$\log|u| - \log|u+1| = \log|t| + C', \qquad C' \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{u}{u+1} = Ct \qquad (C = \pm e^{C'},\ C \in \mathbb{R},\ C \neq 0)$$

ここで，u をもとの x/t で置き換え，整理すれば，一般解

$$x(t) = \frac{Ct^2}{1-Ct}, \quad C \in \mathbb{R},\ C \neq 0 \qquad \text{定義域：} t \neq \frac{1}{C}.$$

例：$t^2\frac{dx}{dt} = x^2 + 2tx$

$x' = f(t,x) = (\frac{x}{t})^2 + 2\frac{x}{t}$ と書き換えられる.

f は $t = 0$ となるような点を含まない任意の長方形領域で連続，x についてリプシッツ条件を満たす $\Rightarrow$ $t = 0$ 以外はただ一つの解が存在.

点 $(0, x_0)$ を通る解が存在しない / 複数ある可能性がある.

解く：$x(t) = tu(t)$ で $u(t)$ を定義して，

$$tu' + u = u^2 + 2u \qquad \text{すなわち} \qquad tu' = u^2 + u$$

$u \neq 0$, $u \neq -1$ のとき，

$$\int \frac{du}{u^2+u} = \int \frac{dt}{t} + C'$$

$$\log|u| - \log|u+1| = \log|t| + C', \qquad C' \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{u}{u+1} = Ct \qquad (C = \pm e^{C'},\ C \in \mathbb{R},\ C \neq 0)$$

ここで，u をもとの x/t で置き換え，整理すれば，一般解

$$x(t) = \frac{Ct^2}{1-Ct}, \quad C \in \mathbb{R},\ C \neq 0 \qquad \text{定義域：} t \neq \frac{1}{C}.$$

例：$t^2\frac{dx}{dt} = x^2 + 2tx$

$x' = f(t,x) = (\frac{x}{t})^2 + 2\frac{x}{t}$ と書き換えられる.

f は $t = 0$ となるような点を含まない任意の長方形領域で連続，x についてリプシッツ条件を満たす $\Rightarrow$ $t = 0$ 以外はただ一つの解が存在.

点 $(0, x_0)$ を通る解が存在しない / 複数ある可能性がある.

解く：$x(t) = tu(t)$ で $u(t)$ を定義して，

$$tu' + u = u^2 + 2u \qquad \text{すなわち} \qquad tu' = u^2 + u$$

$u \neq 0,\ u \neq -1$ のとき，

$$\int \frac{du}{u^2+u} = \int \frac{dt}{t} + C'$$

$$\log|u| - \log|u+1| = \log|t| + C', \qquad C' \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{u}{u+1} = Ct \qquad (C = \pm e^{C'},\ C \in \mathbb{R},\ C \neq 0)$$

ここで，u をもとの x/t で置き換え，整理すれば，一般解

$$x(t) = \frac{Ct^2}{1-Ct}, \quad C \in \mathbb{R},\ C \neq 0 \qquad \text{定義域}: t \neq \frac{1}{C}.$$

例：$t^2\frac{dx}{dt} = x^2 + 2tx$

$x' = f(t,x) = (\frac{x}{t})^2 + 2\frac{x}{t}$ と書き換えられる.

f は $t = 0$ となるような点を含まない任意の長方形領域で連続，x についてリプシッツ条件を満たす $\Rightarrow$ $t = 0$ 以外はただ一つの解が存在.

点 $(0, x_0)$ を通る解が存在しない / 複数ある可能性がある.

解く：$x(t) = tu(t)$ で $u(t)$ を定義して，

$$tu' + u = u^2 + 2u \qquad \text{すなわち} \qquad tu' = u^2 + u$$

$u \neq 0$, $u \neq -1$ のとき，

$$\int \frac{du}{u^2+u} = \int \frac{dt}{t} + C'$$

$$\log|u| - \log|u+1| = \log|t| + C', \qquad C' \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{u}{u+1} = Ct \qquad (C = \pm e^{C'},\ C \in \mathbb{R},\ C \neq 0)$$

ここで，u をもとの x/t で置き換え，整理すれば，一般解

$$x(t) = \frac{Ct^2}{1-Ct}, \quad C \in \mathbb{R},\ C \neq 0 \qquad \text{定義域}: t \neq \frac{1}{C}.$$

例：$t^2\frac{dx}{dt} = x^2 + 2tx$

$x' = f(t,x) = (\frac{x}{t})^2 + 2\frac{x}{t}$ と書き換えられる.
f は $t = 0$ となるような点を含まない任意の長方形領域で連続，x についてリプシッツ条件を満たす $\Rightarrow$ $t = 0$ 以外はただ一つの解が存在.
点 $(0, x_0)$ を通る解が存在しない / 複数ある可能性がある.

解く：$x(t) = tu(t)$ で $u(t)$ を定義して，

$$tu' + u = u^2 + 2u \qquad \text{すなわち} \qquad tu' = u^2 + u$$

$u \neq 0$, $u \neq -1$ のとき，

$$\int \frac{du}{u^2+u} = \int \frac{dt}{t} + C'$$

$$\log|u| - \log|u+1| = \log|t| + C', \qquad C' \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{u}{u+1} = Ct \qquad (C = \pm e^{C'},\ C \in \mathbb{R},\ C \neq 0)$$

ここで，u をもとの x/t で置き換え，整理すれば，一般解

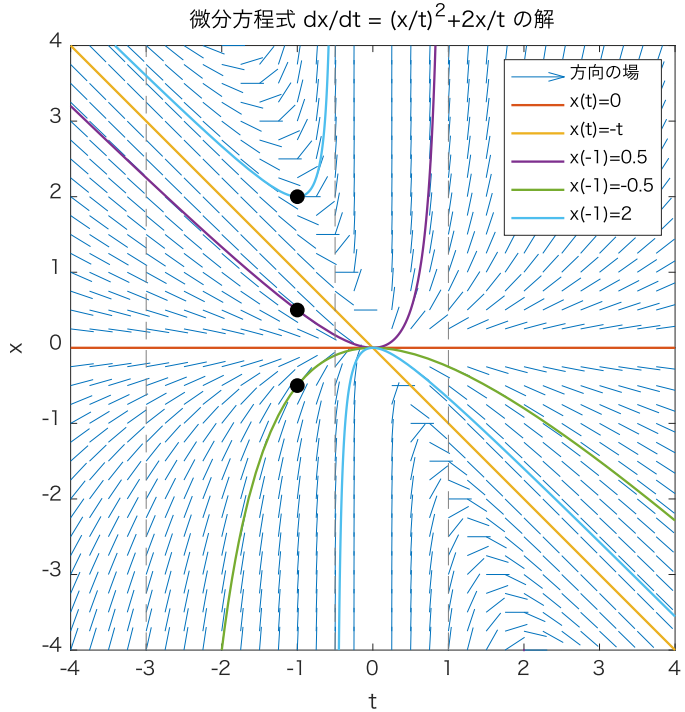
$$x(t) = \frac{Ct^2}{1-Ct}, \quad C \in \mathbb{R},\ C \neq 0 \qquad \text{定義域}: t \neq \frac{1}{C}.$$

例：$t^2\frac{dx}{dt} = x^2 + 2tx$

変数変換： $x(t) = tu(t) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u^2+u} = \int \frac{dt}{t} + C'$

積分して， x を戻す $\Rightarrow \quad x(t) = \frac{Ct^2}{1-Ct}, \quad C \in \mathbb{R},\ C \neq 0$

$u^2 + u = 0$ の根 $u_r^1 = 0,\ u_r^2 = -1$ に対応する解は $x(t) = 0$ と $x(t) = -t$.
一般解で $C = 0,\ C \to \infty$ とそれぞれおいて得られる特殊解である.

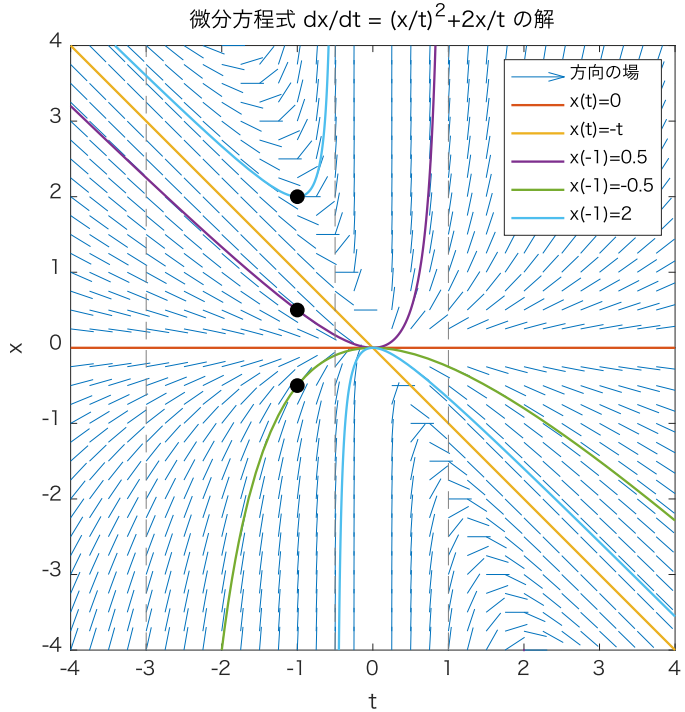


例：$t^2\frac{dx}{dt} = x^2 + 2tx$

変数変換：　$x(t) = tu(t) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u^2+u} = \int \frac{dt}{t} + C'$

積分して，　x を戻す　$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{Ct^2}{1-Ct}, \quad C \in \mathbb{R},\ C \neq 0$

$u^2 + u = 0$ の根 $u_r^1 = 0,\ u_r^2 = -1$ に対応する解は $x(t) = 0$ と $x(t) = -t$.
一般解で $C = 0,\ C \to \infty$ とそれぞれおいて得られる特殊解である.

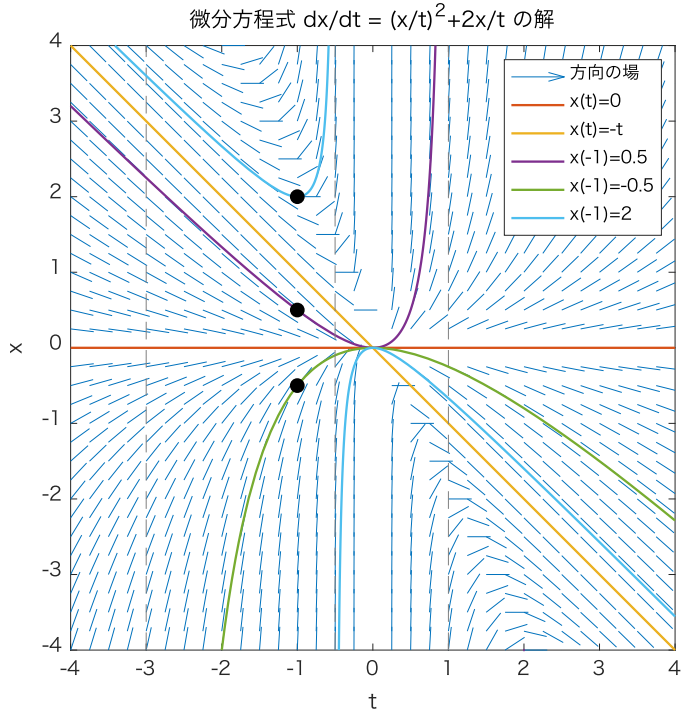


例：$t^2\frac{dx}{dt} = x^2 + 2tx$

変数変換：　$x(t) = tu(t) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u^2+u} = \int \frac{dt}{t} + C'$

積分して，　x を戻す　$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{Ct^2}{1-Ct}, \quad C \in \mathbb{R},\ C \neq 0$

$u^2 + u = 0$ の根 $u_r^1 = 0,\ u_r^2 = -1$ に対応する解は $x(t) = 0$ と $x(t) = -t$.
一般解で $C = 0,\ C \to \infty$ とそれぞれおいて得られる特殊解である.



線型：$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)$

解き方 1：$e^{-\int p(t)\,dt}$ を両辺にかける：

$$\underbrace{e^{-\int p(t)\,dt}\frac{dx}{dt} - p(t)e^{-\int p(t)\,dt}x(t)}_{=\frac{d}{dt}\left(e^{-\int p(t)\,dt}x(t)\right)} = q(t)e^{-\int p(t)\,dt}$$

積分して
$$e^{-\int p(t)\,dt}x(t) = \int q(t)e^{-\int p(t)\,dt} + C$$

$$x(t) = e^{\int p(t)\,dt}\left(C + \int q(t)e^{-\int p(t)\,dt}\right)$$

コーシー問題（初期条件 $x(t_0) = x_0$）の場合，$e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}$ をかけて，結果を t_0 から t まで積分する．

線型：$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)$

解き方 1：$e^{-\int p(t)\,dt}$ を両辺にかける：

$$\underbrace{e^{-\int p(t)\,dt}\frac{dx}{dt} - p(t)e^{-\int p(t)\,dt}x(t)}_{=\frac{d}{dt}\left(e^{-\int p(t)\,dt}x(t)\right)} = q(t)e^{-\int p(t)\,dt}$$

積分して

$$e^{-\int p(t)\,dt}x(t) = \int q(t)e^{-\int p(t)\,dt} + C$$

$$x(t) = e^{\int p(t)\,dt}\left(C + \int q(t)e^{-\int p(t)\,dt}\right)$$

コーシー問題（初期条件 $x(t_0) = x_0$）の場合，$e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}$ をかけて，結果を t_0 から t まで積分する．

線型：$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)$

解き方 1：$e^{-\int p(t)\,dt}$ を両辺にかける：

$$\underbrace{e^{-\int p(t)\,dt}\frac{dx}{dt} - p(t)e^{-\int p(t)\,dt}x(t)}_{=\frac{d}{dt}\left(e^{-\int p(t)\,dt}x(t)\right)} = q(t)e^{-\int p(t)\,dt}$$

積分して

$$e^{-\int p(t)\,dt}x(t) = \int q(t)e^{-\int p(t)\,dt} + C$$

$$x(t) = e^{\int p(t)\,dt}\left(C + \int q(t)e^{-\int p(t)\,dt}\right)$$

コーシー問題（初期条件 $x(t_0) = x_0$）の場合，$e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}$ をかけて，結果を t_0 から t まで積分する．

線型：$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)$

解き方 1：$e^{-\int p(t)\,dt}$ を両辺にかける：

$$\underbrace{e^{-\int p(t)\,dt}\frac{dx}{dt} - p(t)e^{-\int p(t)\,dt}x(t)}_{=\frac{d}{dt}\left(e^{-\int p(t)\,dt}x(t)\right)} = q(t)e^{-\int p(t)\,dt}$$

積分して
$$e^{-\int p(t)\,dt}x(t) = \int q(t)e^{-\int p(t)\,dt} + C$$

$$x(t) = e^{\int p(t)\,dt}\left(C + \int q(t)e^{-\int p(t)\,dt}\right)$$

コーシー問題（初期条件 $x(t_0) = x_0$）の場合，$e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}$ をかけて，結果を t_0 から t まで積分する．

線型：$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)$

解き方 1：$e^{-\int p(t)\,dt}$ を両辺にかける：

$$\underbrace{e^{-\int p(t)\,dt}\frac{dx}{dt} - p(t)e^{-\int p(t)\,dt}x(t)}_{=\frac{d}{dt}\left(e^{-\int p(t)\,dt}x(t)\right)} = q(t)e^{-\int p(t)\,dt}$$

積分して
$$e^{-\int p(t)\,dt}x(t) = \int q(t)e^{-\int p(t)\,dt} + C$$
$$x(t) = e^{\int p(t)\,dt}\left(C + \int q(t)e^{-\int p(t)\,dt}\right)$$

コーシー問題（初期条件 $x(t_0) = x_0$）の場合，$e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}$ をかけて，
結果を t_0 から t まで積分する．

例：$x' = -x\cos t + e^{-\sin t}$

ここでは，$p(t) = -\cos t, q(t) = e^{-\sin t}$.

$e^{-\int p(t)\,dt} = e^{\sin t}$ を両辺にかける.

$$\begin{aligned} x'e^{\sin t} + x\cos t e^{\sin t} &= 1 \\ \frac{d}{dt}\left(x(t)e^{\sin t}\right) &= 1 \\ x(t)e^{\sin t} &= t + C \\ x(t) &= (t+C)e^{-\sin t}, \qquad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

例：$x' = -x\cos t + e^{-\sin t}$

ここでは，$p(t) = -\cos t, q(t) = e^{-\sin t}$.

$e^{-\int p(t)\,dt} = e^{\sin t}$ を両辺にかける.

$$\begin{aligned} x'e^{\sin t} + x\cos t e^{\sin t} &= 1 \\ \frac{d}{dt}\left(x(t)e^{\sin t}\right) &= 1 \\ x(t)e^{\sin t} &= t + C \\ x(t) &= (t + C)e^{-\sin t}, \qquad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

例：$x' = -x\cos t + e^{-\sin t}$

ここでは，$p(t) = -\cos t, q(t) = e^{-\sin t}$.

$e^{-\int p(t)\,dt} = e^{\sin t}$ を両辺にかける.

$$\begin{aligned} x'e^{\sin t} + x\cos t e^{\sin t} &= 1 \\ \frac{d}{dt}\left(x(t)e^{\sin t}\right) &= 1 \\ x(t)e^{\sin t} &= t + C \\ x(t) &= (t + C)e^{-\sin t}, \qquad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

例：$x' = -x\cos t + e^{-\sin t}$

ここでは，$p(t) = -\cos t, q(t) = e^{-\sin t}$.

$e^{-\int p(t)\,dt} = e^{\sin t}$ を両辺にかける.

$$\begin{aligned} x'e^{\sin t} + x\cos t e^{\sin t} &= 1 \\ \frac{d}{dt}\left(x(t)e^{\sin t}\right) &= 1 \\ x(t)e^{\sin t} &= t + C \\ x(t) &= (t + C)e^{-\sin t}, \qquad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

例：$x' = -x\cos t + e^{-\sin t}$

ここでは，$p(t) = -\cos t, q(t) = e^{-\sin t}$.

$e^{-\int p(t)\,dt} = e^{\sin t}$ を両辺にかける.

$$\begin{aligned} x'e^{\sin t} + x\cos t e^{\sin t} &= 1 \\ \frac{d}{dt}\left(x(t)e^{\sin t}\right) &= 1 \\ x(t)e^{\sin t} &= t + C \\ x(t) &= (t + C)e^{-\sin t}, \qquad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

線型：$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)$

解き方 2 = 定数変化法 は次の観察に基づく：線型 ODE の一般解は定数 C について 1 次関数で，C を含む項は $q = 0$ とした方程式の解である．

(1) $q = 0$ とした方程式を解く： $x'(t) = p(t)x$

一般解は $\quad x(t) = Ce^{\int p(t)\,dt},\ C \in \mathbb{R}.$

(2) 定数 C を t の関数とみなし，

$x(t) = C(t)e^{\int p(t)\,dt}$ が元の方程式 $x' = p(t)x + q(t)$

を満たすように $C(t)$ を決める．

ODE に代入すると，

$$\begin{aligned} C'e^{\int p} + Cpe^{\int p} &= pCe^{\int p} + q \\ C' &= qe^{-\int p} \end{aligned}$$

解法 1 と同じ形の解を得る．

線型：$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)$

解き方 2 = 定数変化法 は次の観察に基づく：線型 ODE の一般解は定数 C について 1 次関数で，C を含む項は $q = 0$ とした方程式の解である．

(1) $q = 0$ とした方程式を解く： $x'(t) = p(t)x$

一般解は　　$x(t) = Ce^{\int p(t)\,dt},\ C \in \mathbb{R}.$

(2) 定数 C を t の関数とみなし，

$x(t) = C(t)e^{\int p(t)\,dt}$　　が元の方程式　　$x' = p(t)x + q(t)$

を満たすように $C(t)$ を決める．

ODE に代入すると，

$$\begin{aligned} C'e^{\int p} + Cpe^{\int p} &= pCe^{\int p} + q \\ C' &= qe^{-\int p} \end{aligned}$$

解法 1 と同じ形の解を得る．

線型：$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)$

解き方 2 = 定数変化法 は次の観察に基づく：線型 ODE の一般解は定数 C について 1 次関数で，C を含む項は $q = 0$ とした方程式の解である．

(1) $q = 0$ とした方程式を解く： $x'(t) = p(t)x$

$$\text{一般解は} \qquad x(t) = Ce^{\int p(t)\,dt},\ C \in \mathbb{R}.$$

(2) 定数 C を t の関数とみなし，

$$x(t) = C(t)e^{\int p(t)\,dt} \qquad \text{が元の方程式} \qquad x' = p(t)x + q(t)$$

を満たすように $C(t)$ を決める．

ODE に代入すると，

$$\begin{aligned} C'e^{\int p} + Cpe^{\int p} &= pCe^{\int p} + q \\ C' &= qe^{-\int p} \end{aligned}$$

解法 1 と同じ形の解を得る．

線型：$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)$

解き方 2 = 定数変化法 は次の観察に基づく：線型 ODE の一般解は定数 C について 1 次関数で，C を含む項は $q = 0$ とした方程式の解である．

(1) $q = 0$ とした方程式を解く： $x'(t) = p(t)x$

$$\text{一般解は} \qquad x(t) = Ce^{\int p(t)\,dt},\ C \in \mathbb{R}.$$

(2) 定数 C を t の関数とみなし，

$$x(t) = C(t)e^{\int p(t)\,dt} \qquad \text{が元の方程式} \qquad x' = p(t)x + q(t)$$

を満たすように $C(t)$ を決める．

ODE に代入すると，

$$\begin{aligned} C'e^{\int p} + Cpe^{\int p} &= pCe^{\int p} + q \\ C' &= qe^{-\int p} \end{aligned}$$

解法 1 と同じ形の解を得る．

線型に帰着できる ODE の例

- **ベルヌイ方程式**： $\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)x^{\alpha} \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$

x^{α} で割る： $x^{-\alpha}\frac{dx}{dt} = p(t)x^{1-\alpha} + q(t)$

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\left(x^{1-\alpha}\right) = p(t)x^{1-\alpha} + q(t)$$

$\Rightarrow \quad u = x^{1-\alpha}$ について線型

- **リッカチ方程式**： $\frac{dx}{dt} = p(t)x^2 + q(t)x + r(t)$

一つの解 $\widetilde{x}(t)$（特殊解）が見つかれば，一般解を求めることができる：新しい未知関数 u を $x(t) = \widetilde{x}(t) + u(t)$ で定義し，ODE に代入:

$$\widetilde{x}' + u' = p(\widetilde{x} + u)^2 + q(\widetilde{x} + u) + r$$

$$\underbrace{u' = pu^2 + (2p\widetilde{x} + q)u}_{\alpha=2 \text{ のときのベルヌイ ODE}} + \underbrace{\left(-\widetilde{x}' + p\widetilde{x}^2 + q\widetilde{x} + r\right)}_{=0}$$

線型に帰着できる ODE の例

- **ベルヌイ方程式**： $\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)x^{\alpha} \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$

$$
\begin{aligned}
x^{\alpha}\text{で割る：} \quad x^{-\alpha}\frac{dx}{dt} &= p(t)x^{1-\alpha} + q(t) \\
\frac{1}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\left(x^{1-\alpha}\right) &= p(t)x^{1-\alpha} + q(t)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad u = x^{1-\alpha} \quad \text{について線型}
$$

- **リッカチ方程式**： $\frac{dx}{dt} = p(t)x^2 + q(t)x + r(t)$

一つの解 $\widetilde{x}(t)$（特殊解）が見つかれば，一般解を求めることができる：新しい未知関数 u を $x(t) = \widetilde{x}(t) + u(t)$ で定義し，ODE に代入:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{x}' + u' = p(\widetilde{x} + u)^2 + q(\widetilde{x} + u) + r \\
&\underbrace{u' = pu^2 + (2p\widetilde{x} + q)u}_{\alpha=2\text{ のときのベルヌイ ODE}} + \underbrace{(-\widetilde{x}' + p\widetilde{x}^2 + q\widetilde{x} + r)}_{=0}
\end{aligned}
$$

線型に帰着できる ODE の例

- **ベルヌイ方程式**： $\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)x^{\alpha} \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$

$$x^{\alpha}\text{で割る：} \quad x^{-\alpha}\frac{dx}{dt} = p(t)x^{1-\alpha} + q(t)$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\left(x^{1-\alpha}\right) = p(t)x^{1-\alpha} + q(t)$$

$$\Rightarrow \quad u = x^{1-\alpha} \quad \text{について線型}$$

- **リッカチ方程式**： $\frac{dx}{dt} = p(t)x^2 + q(t)x + r(t)$

一つの解 $\widetilde{x}(t)$（特殊解）が見つかれば，一般解を求めることができる：新しい未知関数 u を $x(t) = \widetilde{x}(t) + u(t)$ で定義し，ODE に代入:

$$\widetilde{x}' + u' = p(\widetilde{x} + u)^2 + q(\widetilde{x} + u) + r$$

$$\underbrace{u' = pu^2 + (2p\widetilde{x} + q)u}_{\alpha=2 \text{ のときのベルヌイ ODE}} + \underbrace{(-\widetilde{x}' + p\widetilde{x}^2 + q\widetilde{x} + r)}_{=0}$$

線型に帰着できる ODE の例

- **ベルヌイ方程式**： $\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)x^{\alpha} \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$

$$
\begin{aligned}
x^{\alpha}\text{で割る：} \quad x^{-\alpha}\frac{dx}{dt} &= p(t)x^{1-\alpha} + q(t) \\
\frac{1}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\left(x^{1-\alpha}\right) &= p(t)x^{1-\alpha} + q(t) \\
\Rightarrow \quad u = x^{1-\alpha} &\quad \text{について線型}
\end{aligned}
$$

- **リッカチ方程式**： $\frac{dx}{dt} = p(t)x^2 + q(t)x + r(t)$

一つの解 $\widetilde{x}(t)$（特殊解）が見つかれば，一般解を求めることができる：新しい未知関数 u を $x(t) = \widetilde{x}(t) + u(t)$ で定義し，ODE に代入:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{x}' + u' = p(\widetilde{x} + u)^2 + q(\widetilde{x} + u) + r \\
&\underbrace{u' = pu^2 + (2p\widetilde{x} + q)u}_{\alpha=2 \text{ のときのベルヌイ ODE}} + \underbrace{(-\widetilde{x}' + p\widetilde{x}^2 + q\widetilde{x} + r)}_{=0}
\end{aligned}
$$

レポート

今回の講義のレポート問題を解いて，提出して下さい.
（詳しいことは PandA の「手紙 03」を参照すること.）

「解答付き問題」のファイルで他の例題を紹介しています.

微分積分学続論 II： 第 4 回

Karel Svadlenka

2020 年 4 月 29 日

■全微分型： $P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$

- 2 変数関数 $\varphi(t,x)$ の 全微分 ：$d\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}dt + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}dx$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t,x(t)) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

全微分型 ODE：「ある関数 φ の全微分=0」の形にできる ODE．つまり，

$$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$$

の形をしていて，関数 $\varphi(t,x)$ が存在して，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = P, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Q \tag{1}$$

が成り立つ状況．このとき，ODE は $P(t,x) + Q(t,x)\dfrac{dx}{dt} = 0$ となり， $\varphi(t,x) = C$ は全ての $C \in \mathbb{R}$ に対して解である （すなわち，$\varphi(t,x) = C$ から陰関数定理などにより決まる $x(t)$ は解）．

■例：$t - x\frac{dx}{dt} = 0$

全微分の形：

$$t\,dt - x\,dx = 0$$
$$P(t,x) = t, \qquad Q(t,x) = -x$$

$\varphi(t,x) = \frac{t^2}{2} - \frac{x^2}{2}$ とおくと，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = t = P(t,x), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -x = Q(t,x)$$

より，(1) が成立．よって，

$$\frac{t^2}{2} - \frac{x^2}{2} = C' \qquad \text{または} \qquad x^2 - t^2 = C,\ \ C \in \mathbb{R}$$

は解（すなわち，$x(t) = \pm\sqrt{t^2 + C}$ は解）．

■判定法と解き方

$P(t,x), Q(t,x)$ が $\mathbb{R}^2$ において C^2-級とする．

$$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0 \tag{2}$$

が全微分型であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{3}$$

(3) が満たされるとき，(2) の解 $\varphi(t,x) = C$ は次で与えられる：

$$\varphi(t,x) = \int_{t_0}^{t} P(\tau,x)\,d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,\xi)\,d\xi. \tag{4}$$

■判定法と解き方

$P(t,x), Q(t,x)$ が $\mathbb{R}^2$ において C^2-級とする．

$$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0 \tag{5}$$

が全微分型であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{6}$$

(6) が満たされるとき，(5) の解 $\varphi(t,x) = C$ は次で与えられる：

$$\varphi(t,x) = \int_{t_0}^{t} P(\tau,x)\,d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,\xi)\,d\xi. \tag{7}$$

証明：必要条件である：(5) が全微分型より，$P = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, Q = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ となる φ がある．よって，

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

■判定法と解き方

$P(t,x), Q(t,x)$ が $\mathbb{R}^2$ において C^2-級とする．$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$ が全微分型であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{8}$$

(8) が満たされるとき，微分方程式の解 $\varphi(t,x) = C$ は次で与えられる：

$$\varphi(t,x) = \int_{t_0}^{t} P(\tau,x)\,d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

証明：十分条件である：(8) のとき，φ を (9) で与えれば，$P = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, Q = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ であることを示せばよい．

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = P(t,x) \quad \text{明らか}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial P}{\partial x}\,dt + Q(t_0,x) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial Q}{\partial t}\,dt + Q(t_0,x) = Q(t,x)$$

■ベクトル解析の関係する結果

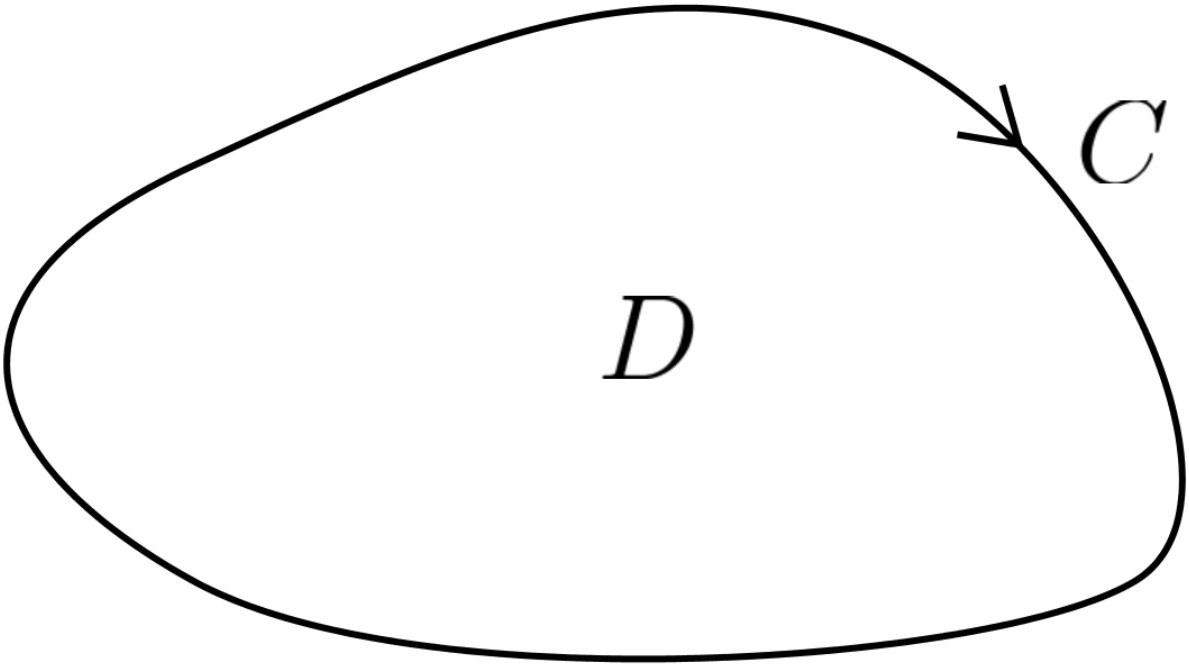
スカラーポテンシャルの存在

ベクトル場 $\overrightarrow{v}(t,x) = (P(t,x), Q(t,x))$ に対してスカラーポテンシャル $\varphi(t,x)$（つまり，$\nabla\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}) = \overrightarrow{v}\ \forall(t,x)$）が存在するための必要十分条件は

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{v} = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

グリーンの定理 $P(t,x), Q(t,x)$ が C^1-級のとき，

$$\oint_C (P\,dt + Q\,dx) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dt\,dx.$$



■ベクトル解析の関係する結果

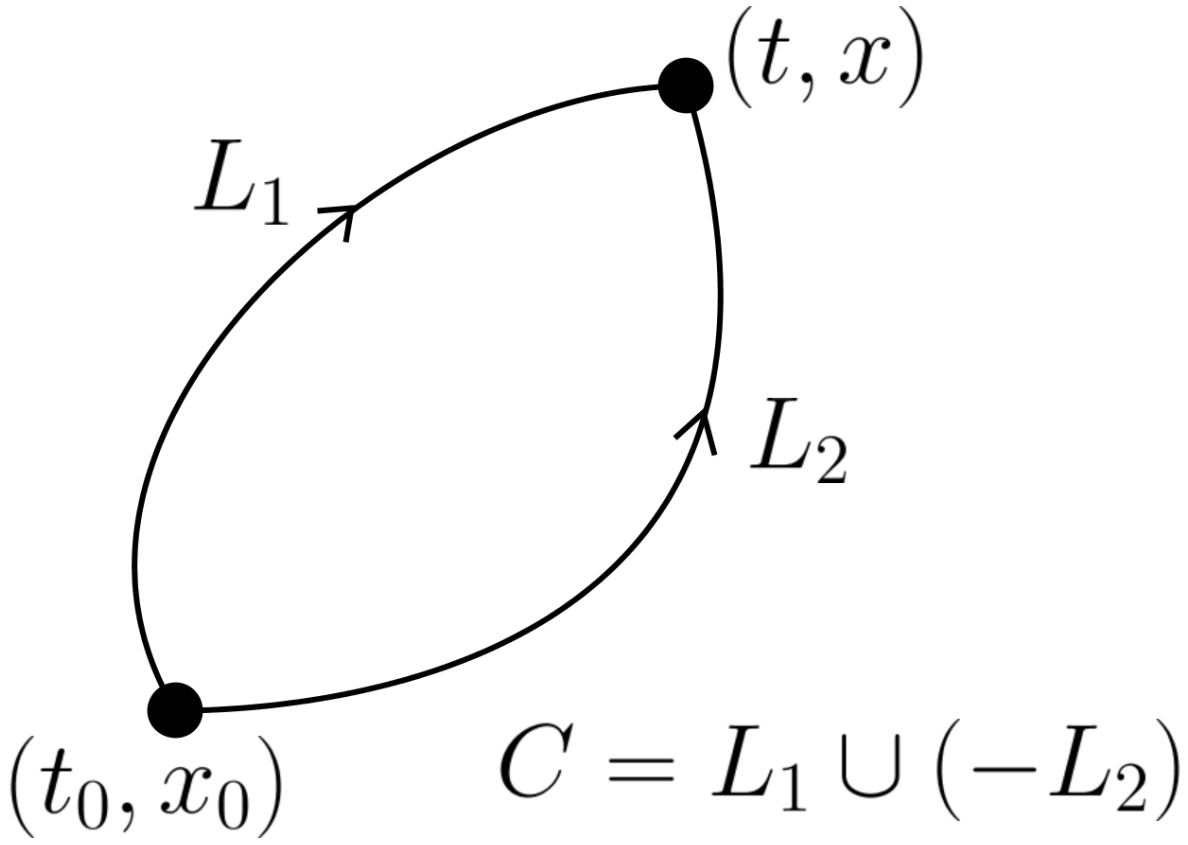
スカラーポテンシャルの存在
ベクトル場 $\overrightarrow{v}(t,x) = (P(t,x), Q(t,x))$ に対してスカラーポテンシャル $\varphi(t,x)$（つまり，$\nabla\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}) = \overrightarrow{v}\ \forall(t,x)$）が存在するための必要十分条件は

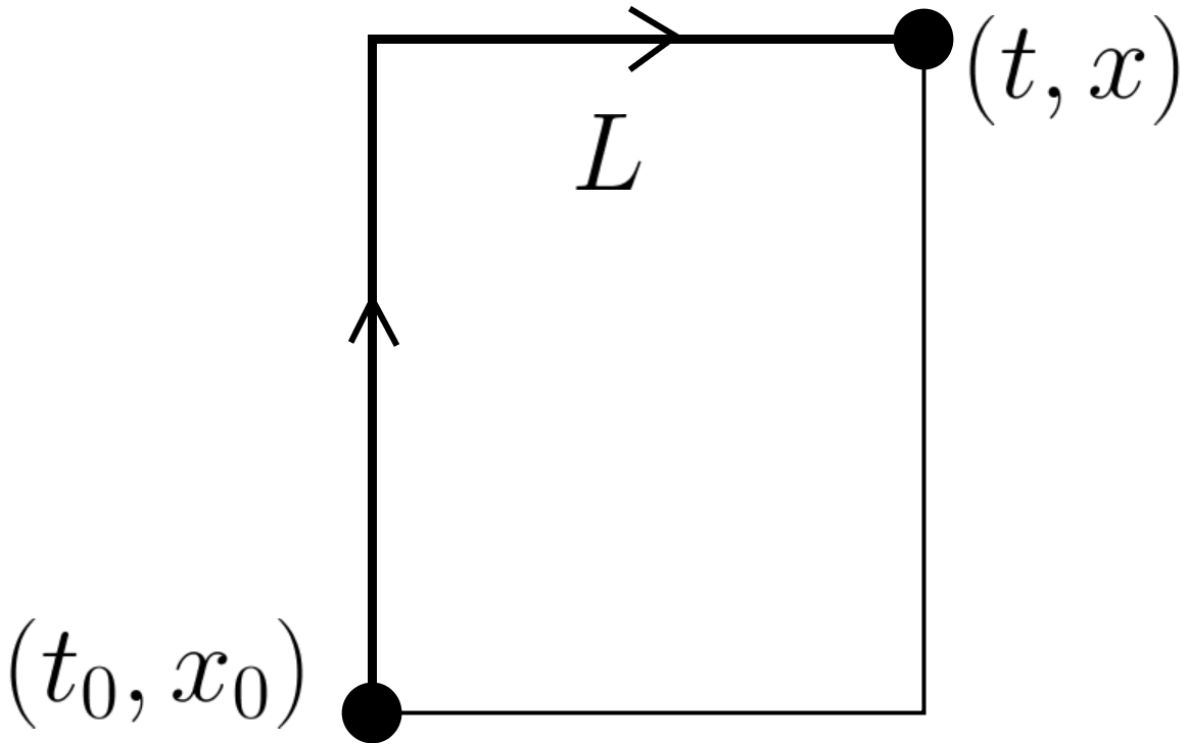
$P(t,x), Q(t,x)$ が C^1-級のとき，

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{v} = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

グリーンの定理

$$\oint_C (P\,dt + Q\,dx) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dt\,dx.$$





$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}$ のとき，任意の閉曲線 C について $\oint_C (P\,dt + Q\,dx) = 0$．よって，

$$\varphi(t,x) = \int_L \nabla\varphi \cdot d\vec{s} = \int_L (P,Q)\cdot d\vec{s} = \int_L (P\,dt + Q\,dx).$$

は L のとり方に依らない．

■例：$2tx + (t^2 - 2x)\frac{dx}{dt} = 0$

ここで，$P(t,x) = 2tx,\ Q(t,x) = t^2 - 2x$ である．

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2t = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

より全微分型．

$$\begin{aligned}
\varphi(t,x) &= \int_{t_0}^{t} P(\tau,x)\,d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,\xi)\,d\xi \\
&= \int_{t_0}^{t} 2\tau x\,d\tau + \int_{x_0}^{x} (t_0^2 - 2\xi)\,d\xi \\
&= (t^2 - t_0^2)x + t_0^2(x - x_0) - (x^2 - x_0^2) \\
&= t^2x - x^2 - (t_0^2 x_0 - x_0^2)
\end{aligned}$$

■積分因子

定義：積分因子

積分因子とは，$P\,dt + Q\,dx = 0$ にかけることによって全微分型が得られるような関数 μ のこと．

$$\begin{aligned}
&(\mu P)dt + (\mu Q)dx = 0 \qquad \text{は全微分型} \\
\Leftrightarrow \qquad &\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial t} \\
\Leftrightarrow \qquad &P\frac{\partial \mu}{\partial x} - Q\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right) = 0 \qquad (10)
\end{aligned}$$

$P_x = \frac{\partial P}{\partial x}, Q_t = \frac{\partial Q}{\partial t}$ とおくと，　$P\dfrac{\partial \mu}{\partial x} - Q\dfrac{\partial \mu}{\partial t} + \mu\,(P_x - Q_t) = 0.$

■積分因子：μ が求まる場合

(1) μ が t のみの関数

$$(10) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{P_x - Q_t}{Q}$$

これを満たす $\mu(t)$ が存在するための必要十分条件は

$$\frac{P_x - Q_t}{Q} \quad \text{は } t \text{ のみの関数}$$

（証明）必要：明らか 十分：$\frac{P_x - Q_t}{Q}$ は t のみの関数ならば，積分して，

$$\log|\mu(t)| = \int \frac{P_x - Q_t}{Q}\,dt \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = e^{\int \frac{P_x - Q_t}{Q}\,dt}$$

(2) μ が x のみの関数：必要十分条件は「$\frac{P_x - Q_t}{P}$ は x のみの関数」

(3) 当てはめ法：ODE の形を見て，積分因子を当てる．

■例：$(t + x^2 + 1)\,dt + 2x\,dx = 0$

$$\frac{P_x - Q_t}{Q} = \frac{2x - 0}{2x} = 1 \qquad t \text{ のみの関数}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = 1 \quad \text{を解いて} \quad \mu(t) = Ce^t$$

$\mu(t) = e^t$ を ODE の両辺にかけて

$$e^t(t + x^2 + 1)\,dt + 2xe^t\,dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^t(t + x^2 + 1)\right) = 2xe^t = \frac{\partial}{\partial t}(2xe^t)$$

より全微分型．解：$\varphi(t, x) = C$．ただし，

$$\begin{aligned}\varphi(t, x) &= \int_{t_0}^{t} e^t(t + x^1 + 2)\,dt + \int_{x_0}^{x} 2xe^{t_0}\,dx \\ &= e^t(x^2 + t) - e^{t_0}(x^2 + t_0) + x^2e^{t_0} - x_0^2e^{t_0} \\ &= e^t(x^2 + t) - e^{t_0}(x_0^2 + t_0)\end{aligned}$$

解：$e^t(x^2 + t) = C$

■例：$t^2x^5\,dt + 2t^3x^4\,dx = 0$

P, Q が多項式または有理関数のとき，$\mu(t, x) = t^m x^n$ の形で求めるとよい．

ここで，

$$d(tx^2) = \frac{\partial}{\partial t}(tx^2)\,dt + \frac{\partial}{\partial x}(tx^2)\,dx = x^2\,dt + 2tx\,dx$$

$$t^2x^3\,d(tx^2) = 0 \qquad \mu(t, x) = \frac{1}{t^2x^3} \text{ とする}$$

$$d(tx^2) = 0$$

$$tx^2 = C$$

■積分因子：まとめ

これまでの全ての ODE のタイプは積分因子の方法に帰着できる：

- 変数分離型：$x' = g(t)h(x)$

$$\mu(t,x) = \frac{1}{h(x)} \quad \text{とすると，} \quad g(t)\,dt - \frac{1}{h(x)}\,dx = 0$$

- 同次型：$u = \frac{x}{t}$ として，変数分離に帰着
- 線型：$\mu(t,x) = e^{-\int p(t)\,dt}$

■級数解法：　例　$x' = \alpha x$

中心 $t_0 = 0$ の級数 $x(t) = t^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $a_0 \neq 0$ の形で解を求める（そうなるように $k \in \mathbb{R}$ を決める）．方程式に代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k) t^{n+k-1} = \alpha \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{m+k}$$

$$a_0 k t^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+1}(n+k+1) - \alpha a_n \right] t^{n+k} = 0$$

係数=0 の条件より $a_0 k = 0 \;\Rightarrow\; k = 0.$

$$a_{n+1} = \frac{\alpha}{n+k+1} a_n = \frac{\alpha}{n+1} a_n$$

$$a_1 = \frac{\alpha}{1} a_0,\; a_2 = \frac{\alpha}{2} a_1 = \frac{\alpha^2}{2!} a_0,\; \ldots, a_n = \frac{\alpha^n}{n!} a_0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = a_0 t^0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} t^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = a_0 e^{\alpha t}$$

■例：$x' = \frac{\alpha}{t} x$

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+k}, \quad a_0 \neq 0$$

方程式に代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k) t^{n+k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n t^{n+k-1}$$

係数の比較：

$$a_0 k = \alpha a_0, \quad a_n (n+k) = \alpha a_n$$

より $k = \alpha$, $a_n = 0.$

$$\Rightarrow \quad x(t) = a_0 t^{\alpha}$$

■例：$x' = \frac{\alpha}{t^2}x$

解は $x(t) = Ce^{-\frac{\alpha}{t}}$ ：$t = 0$ で解析的ではない $\Rightarrow$ 級数解は存在しない．

方程式に $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+k}, \quad a_0 \neq 0$ を代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha a_m t^{m+k-2}$$

t^{k-2} の係数：$0 = \alpha a_0 \Rightarrow a_0 = 0$ 矛盾

$\Rightarrow$ x' が $\frac{1}{t}$ よりはやく発散する場合は使えない．

中心 $t_0 \neq 0$ ならば，級数解 $\sum a_n(t-t_0)^{n+k}$ が求まる．

■例：$x' = \frac{x}{1-t}$

解は $x(t) = \frac{C}{1-t}$ ． $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+k}, \quad a_0 \neq 0$ を $(1-t)x' = x$ に代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-t)a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha a_m t^{m+k}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha a_m(m+k+1)t^{m+k}$$

$a_0 k = 0, \quad a_{n+1} = \frac{n+k+1}{n+k+1}a_n = a_n$ より

$$x(t) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{a_0}{1-t}$$

収束半径は 1 であるが，$|t| > 1$ でも解になっている．

■級数解法

定理

$p(t), q(t)$ が t_0 で解析的ならば，

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$$

は二つの独立な解があり，それを

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n$$

の形で書くことができる． ただし，収束半径は $R(x) \geq \min\{R(p), R(q)\}$.

■レポート

今回の講義のレポート問題を解いて，提出して下さい． （詳しいことは PandA の「手紙 04」を参照すること．）

「解答付き問題」のファイルで他の例題を紹介しています．

微分積分学続論 II： 第 4 回

Karel Svadlenka

京都大学大学院理学研究科 数学教室

2020 年 4 月 29 日

全微分型： $P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$

- 2 変数関数 $\varphi(t,x)$ の **全微分** ：$d\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}dt + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}dx$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t,x(t)) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

全微分型 ODE :「ある関数 φ の全微分=0」の形にできる ODE. つまり,

$$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$$

の形をしていて，関数 $\varphi(t,x)$ が存在して,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = P, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Q \tag{1}$$

が成り立つ状況. このとき，ODE は $P(t,x) + Q(t,x)\dfrac{dx}{dt} = 0$ となり，

$\varphi(t,x) = C$ は全ての $C \in \mathbb{R}$ に対して解である

（すなわち，$\varphi(t,x) = C$ から陰関数定理などにより決まる $x(t)$ は解）.

全微分型： $P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$

- 2 変数関数 $\varphi(t,x)$ の **全微分** ：$d\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}dt + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}dx$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t,x(t)) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

全微分型 ODE :「ある関数 φ の全微分=0」の形にできる ODE. つまり,

$$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$$

の形をしていて，関数 $\varphi(t,x)$ が存在して,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = P, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Q \tag{1}$$

が成り立つ状況. このとき，ODE は $P(t,x) + Q(t,x)\dfrac{dx}{dt} = 0$ となり,

$\varphi(t,x) = C$ は全ての $C \in \mathbb{R}$ に対して解である

（すなわち，$\varphi(t,x) = C$ から陰関数定理などにより決まる $x(t)$ は解）.

全微分型： $P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$

- 2 変数関数 $\varphi(t,x)$ の 全微分 ：$d\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}dt + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}dx$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t,x(t)) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

全微分型 ODE :「ある関数 φ の全微分=0」の形にできる ODE. つまり，

$$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$$

の形をしていて，関数 $\varphi(t,x)$ が存在して，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = P, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Q \tag{1}$$

が成り立つ状況．このとき，ODE は $P(t,x) + Q(t,x)\dfrac{dx}{dt} = 0$ となり，

$\varphi(t,x) = C$ は全ての $C \in \mathbb{R}$ に対して解である

（すなわち，$\varphi(t,x) = C$ から陰関数定理などにより決まる $x(t)$ は解）．

全微分型： $P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$

- 2 変数関数 $\varphi(t,x)$ の **全微分** ：$d\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}dt + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}dx$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t,x(t)) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

全微分型 ODE :「ある関数 φ の全微分=0」の形にできる ODE. つまり,

$$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$$

の形をしていて，関数 $\varphi(t,x)$ が存在して,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = P, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Q \tag{1}$$

が成り立つ状況. このとき，ODE は $P(t,x) + Q(t,x)\dfrac{dx}{dt} = 0$ となり,

$\varphi(t,x) = C$ は全ての $C \in \mathbb{R}$ に対して解である

（すなわち，$\varphi(t,x) = C$ から陰関数定理などにより決まる $x(t)$ は解）.

全微分型： $P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$

- 2 変数関数 $\varphi(t,x)$ の 全微分 ：$d\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}dt + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}dx$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t,x(t)) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

全微分型 ODE :「ある関数 φ の全微分=0」の形にできる ODE. つまり,

$$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$$

の形をしていて，関数 $\varphi(t,x)$ が存在して,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = P, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Q \tag{1}$$

が成り立つ状況. このとき，ODE は $P(t,x) + Q(t,x)\dfrac{dx}{dt} = 0$ となり,

$\varphi(t,x) = C$ は全ての $C \in \mathbb{R}$ に対して解である
（すなわち，$\varphi(t,x) = C$ から陰関数定理などにより決まる $x(t)$ は解）.

全微分型： $P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$

- 2 変数関数 $\varphi(t,x)$ の 全微分 ：$d\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}dt + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t,x(t)) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

全微分型 ODE :「ある関数 φ の全微分=0」の形にできる ODE. つまり,

$$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$$

の形をしていて，関数 $\varphi(t,x)$ が存在して,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = P, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = Q \tag{1}$$

が成り立つ状況. このとき，ODE は $P(t,x) + Q(t,x)\dfrac{dx}{dt} = 0$ となり,

$\varphi(t,x) = C$ は全ての $C \in \mathbb{R}$ に対して解である
（すなわち，$\varphi(t,x) = C$ から陰関数定理などにより決まる $x(t)$ は解）.

例：$t - x\frac{dx}{dt} = 0$

全微分の形：

$$t\,dt - x\,dx = 0$$
$$P(t,x) = t, \qquad Q(t,x) = -x$$

$\varphi(t,x) = \frac{t^2}{2} - \frac{x^2}{2}$ とおくと，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = t = P(t,x), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -x = Q(t,x)$$

より，(1) が成立．よって，

$$\frac{t^2}{2} - \frac{x^2}{2} = C' \qquad \text{または} \qquad x^2 - t^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

は解（すなわち，$x(t) = \pm\sqrt{t^2 + C}$ は解）．

例：$t - x\frac{dx}{dt} = 0$

全微分の形：

$$t\,dt - x\,dx = 0$$
$$P(t,x) = t, \qquad Q(t,x) = -x$$

$\varphi(t,x) = \frac{t^2}{2} - \frac{x^2}{2}$ とおくと，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = t = P(t,x), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -x = Q(t,x)$$

より，(1) が成立．よって，

$$\frac{t^2}{2} - \frac{x^2}{2} = C' \qquad \text{または} \qquad x^2 - t^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

は解（すなわち，$x(t) = \pm\sqrt{t^2 + C}$ は解）．

例：$t - x\frac{dx}{dt} = 0$

全微分の形：

$$t\,dt - x\,dx = 0$$
$$P(t,x) = t, \qquad Q(t,x) = -x$$

$\varphi(t,x) = \frac{t^2}{2} - \frac{x^2}{2}$ とおくと，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = t = P(t,x), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -x = Q(t,x)$$

より，(1) が成立．よって，

$$\frac{t^2}{2} - \frac{x^2}{2} = C' \qquad \text{または} \qquad x^2 - t^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

は解（すなわち，$x(t) = \pm\sqrt{t^2 + C}$ は解）．

例：$t - x\frac{dx}{dt} = 0$

全微分の形：

$$t\,dt - x\,dx = 0$$
$$P(t,x) = t, \qquad Q(t,x) = -x$$

$\varphi(t,x) = \frac{t^2}{2} - \frac{x^2}{2}$ とおくと，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = t = P(t,x), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -x = Q(t,x)$$

より，(1) が成立．よって，

$$\frac{t^2}{2} - \frac{x^2}{2} = C' \qquad \text{または} \qquad x^2 - t^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

は解（すなわち，$x(t) = \pm\sqrt{t^2 + C}$ は解）．

判定法と解き方

$P(t,x), Q(t,x)$ が $\mathbb{R}^2$ において C^2-級とする.

$$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0 \tag{2}$$

が全微分型であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{3}$$

(3) が満たされるとき，(2) の解 $\varphi(t,x) = C$ は次で与えられる：

$$\varphi(t,x) = \int_{t_0}^{t} P(\tau,x)\,d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,\xi)\,d\xi. \tag{4}$$

判定法と解き方

$P(t,x), Q(t,x)$ が $\mathbb{R}^2$ において C^2-級とする.

$$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0 \tag{2}$$

が全微分型であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{3}$$

(3) が満たされるとき，(2) の解 $\varphi(t,x) = C$ は次で与えられる：

$$\varphi(t,x) = \int_{t_0}^{t} P(\tau,x)\,d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,\xi)\,d\xi. \tag{4}$$

判定法と解き方

$P(t,x), Q(t,x)$ が $\mathbb{R}^2$ において C^2-級とする.

$$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0 \tag{5}$$

が全微分型であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{6}$$

(6) が満たされるとき，(5) の解 $\varphi(t,x) = C$ は次で与えられる：

$$\varphi(t,x) = \int_{t_0}^{t} P(\tau,x)\,d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,\xi)\,d\xi. \tag{7}$$

証明：必要条件である：
(5) が全微分型より，$P = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, Q = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ となる φ がある．よって，

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

判定法と解き方

$P(t,x), Q(t,x)$ が $\mathbb{R}^2$ において C^2-級とする．

$$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0 \tag{5}$$

が全微分型であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{6}$$

(6) が満たされるとき，(5) の解 $\varphi(t,x) = C$ は次で与えられる：

$$\varphi(t,x) = \int_{t_0}^{t} P(\tau,x)\,d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,\xi)\,d\xi. \tag{7}$$

証明：必要条件である：
(5) が全微分型より，$P = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, Q = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ となる φ がある．よって，

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

判定法と解き方

$P(t,x), Q(t,x)$ が $\mathbb{R}^2$ において C^2-級とする．$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$ が全微分型であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{8}$$

(8) が満たされるとき，微分方程式の解 $\varphi(t,x) = C$ は次で与えられる：

$$\varphi(t,x) = \int_{t_0}^{t} P(\tau,x)\,d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

証明：十分条件である：(8) のとき，φ を (9) で与えれば，
$P = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, Q = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ であることを示せばよい．

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = P(t,x) \quad \text{明らか}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial P}{\partial x}\,dt + Q(t_0,x) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial Q}{\partial t}\,dt + Q(t_0,x) = Q(t,x)$$

判定法と解き方

$P(t,x), Q(t,x)$ が $\mathbb{R}^2$ において C^2-級とする．$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$ が全微分型であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{8}$$

(8) が満たされるとき，微分方程式の解 $\varphi(t,x) = C$ は次で与えられる：

$$\varphi(t,x) = \int_{t_0}^{t} P(\tau,x)\,d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

証明：十分条件である：(8) のとき，φ を (9) で与えれば，
$P = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, Q = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ であることを示せばよい．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= P(t,x) \quad \text{明らか} \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial P}{\partial x}\,dt + Q(t_0,x) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial Q}{\partial t}\,dt + Q(t_0,x) = Q(t,x)
\end{aligned}$$

ベクトル解析の関係する結果

スカラーポテンシャルの存在

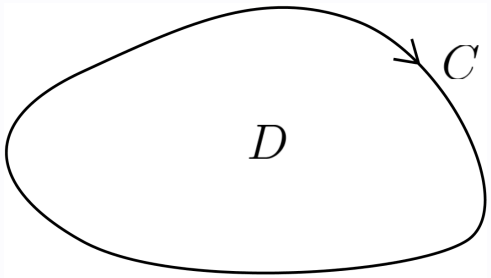
ベクトル場 $\vec{v}(t,x) = (P(t,x), Q(t,x))$ に対してスカラーポテンシャル $\varphi(t,x)$（つまり，$\nabla\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}) = \vec{v}\ \forall(t,x)$）が存在するための必要十分条件は

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

グリーンの定理

$P(t,x), Q(t,x)$ が C^1-級のとき，

$$\oint_C (P\,dt + Q\,dx) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dt\,dx.$$



ベクトル解析の関係する結果

スカラーポテンシャルの存在

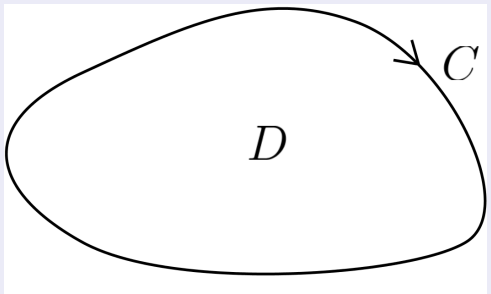
ベクトル場 $\vec{v}(t,x) = (P(t,x), Q(t,x))$ に対してスカラーポテンシャル $\varphi(t,x)$（つまり，$\nabla\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}) = \vec{v}\ \forall(t,x)$）が存在するための必要十分条件は

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

グリーンの定理

$P(t,x), Q(t,x)$ が C^1-級のとき，

$$\oint_C (P\,dt + Q\,dx) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dt\,dx.$$



ベクトル解析の関係する結果

スカラーポテンシャルの存在

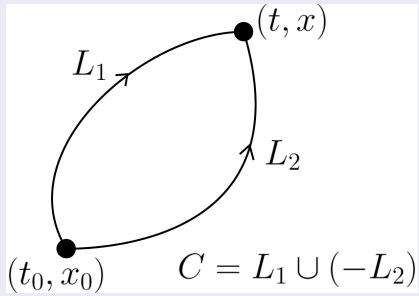
ベクトル場 $\vec{v}(t,x) = (P(t,x), Q(t,x))$ に対してスカラーポテンシャル $\varphi(t,x)$（つまり，$\nabla\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}) = \vec{v}\ \forall(t,x)$）が存在するための必要十分条件は

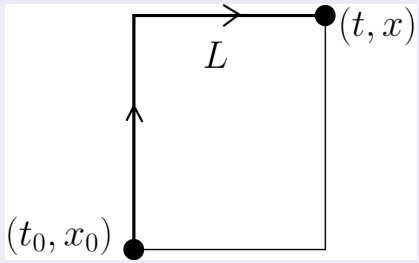
$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

グリーンの定理

$P(t,x), Q(t,x)$ が C^1-級のとき，

$$\oint_C (P\,dt + Q\,dx) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dt\,dx.$$





$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}$ のとき，任意の閉曲線 C について $\oint_C (P\,dt + Q\,dx) = 0$.
よって，

$$\varphi(t,x) = \int_L \nabla\varphi \cdot d\vec{s} = \int_L (P,Q)\cdot d\vec{s} = \int_L (P\,dt + Q\,dx).$$

は L のとり方に依らない．

ベクトル解析の関係する結果

スカラーポテンシャルの存在

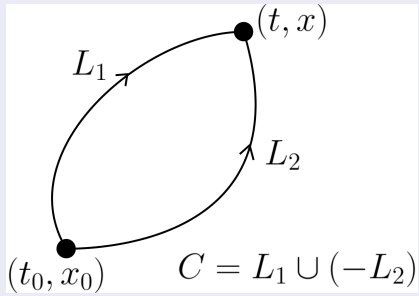
ベクトル場 $\vec{v}(t,x) = (P(t,x), Q(t,x))$ に対してスカラーポテンシャル $\varphi(t,x)$（つまり，$\nabla\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}) = \vec{v}\ \forall(t,x)$）が存在するための必要十分条件は

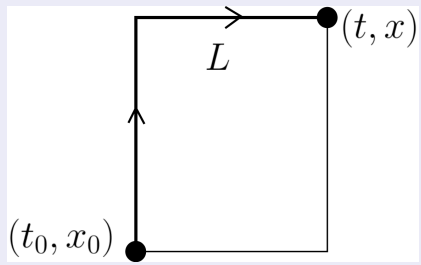
$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

グリーンの定理

$P(t,x), Q(t,x)$ が C^1-級のとき，

$$\oint_C (P\,dt + Q\,dx) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dt\,dx.$$





$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}$ のとき，任意の閉曲線 C について $\oint_C (P\,dt + Q\,dx) = 0$.

よって，

$$\varphi(t,x) = \int_L \nabla\varphi \cdot d\vec{s} = \int_L (P,Q)\cdot d\vec{s} = \int_L (P\,dt + Q\,dx).$$

は L のとり方に依らない．

ベクトル解析の関係する結果

スカラーポテンシャルの存在

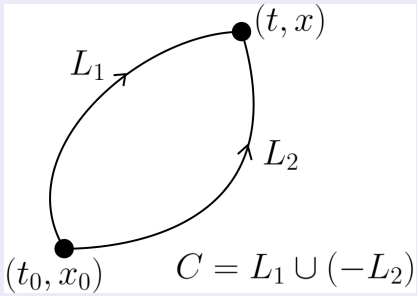
ベクトル場 $\overrightarrow{v}(t,x) = (P(t,x), Q(t,x))$ に対してスカラーポテンシャル $\varphi(t,x)$（つまり，$\nabla\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}) = \overrightarrow{v}\ \forall(t,x)$）が存在するための必要十分条件は

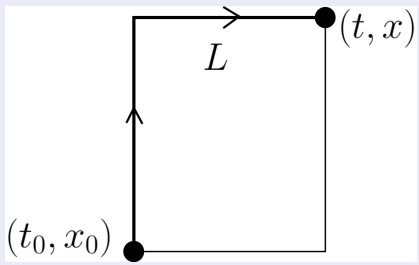
$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{v} = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

グリーンの定理

$P(t,x), Q(t,x)$ が C^1-級のとき，

$$\oint_C (P\,dt + Q\,dx) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dt\,dx.$$





$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}$ のとき，任意の閉曲線 C について $\oint_C (P\,dt + Q\,dx) = 0$.
よって，

$$\varphi(t,x) = \int_L \nabla\varphi \cdot d\overrightarrow{s} = \int_L (P,Q)\cdot d\overrightarrow{s} = \int_L (P\,dt + Q\,dx).$$

は L のとり方に依らない.

例：$2tx + (t^2 - 2x)\frac{dx}{dt} = 0$

ここで，$P(t,x) = 2tx,\ Q(t,x) = t^2 - 2x$ である．

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2t = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

より全微分型．

$$\begin{aligned}
\varphi(t,x) &= \int_{t_0}^{t} P(\tau,x)\,d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,\xi)\,d\xi \\
&= \int_{t_0}^{t} 2\tau x\,d\tau + \int_{x_0}^{x} (t_0^2 - 2\xi)\,d\xi \\
&= (t^2 - t_0^2)x + t_0^2(x - x_0) - (x^2 - x_0^2) \\
&= t^2x - x^2 - (t_0^2 x_0 - x_0^2)
\end{aligned}$$

例：$2tx + (t^2 - 2x)\frac{dx}{dt} = 0$

ここで，$P(t,x) = 2tx$, $Q(t,x) = t^2 - 2x$ である．

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2t = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

より全微分型．

$$\begin{aligned}
\varphi(t,x) &= \int_{t_0}^{t} P(\tau,x)\,d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,\xi)\,d\xi \\
&= \int_{t_0}^{t} 2\tau x\,d\tau + \int_{x_0}^{x} (t_0^2 - 2\xi)\,d\xi \\
&= (t^2 - t_0^2)x + t_0^2(x - x_0) - (x^2 - x_0^2) \\
&= t^2x - x^2 - (t_0^2 x_0 - x_0^2)
\end{aligned}$$

例：$2tx + (t^2 - 2x)\frac{dx}{dt} = 0$

ここで，$P(t,x) = 2tx$, $Q(t,x) = t^2 - 2x$ である．

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2t = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

より全微分型．

$$\begin{aligned}
\varphi(t,x) &= \int_{t_0}^{t} P(\tau,x)\,d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,\xi)\,d\xi \\
&= \int_{t_0}^{t} 2\tau x\,d\tau + \int_{x_0}^{x} (t_0^2 - 2\xi)\,d\xi \\
&= (t^2 - t_0^2)x + t_0^2(x - x_0) - (x^2 - x_0^2) \\
&= t^2x - x^2 - (t_0^2 x_0 - x_0^2)
\end{aligned}$$

例：$2tx + (t^2 - 2x)\frac{dx}{dt} = 0$

ここで，$P(t,x) = 2tx$, $Q(t,x) = t^2 - 2x$ である．

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2t = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

より全微分型．

$$\begin{aligned}
\varphi(t,x) &= \int_{t_0}^{t} P(\tau,x)\,d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,\xi)\,d\xi \\
&= \int_{t_0}^{t} 2\tau x\,d\tau + \int_{x_0}^{x} (t_0^2 - 2\xi)\,d\xi \\
&= (t^2 - t_0^2)x + t_0^2(x - x_0) - (x^2 - x_0^2) \\
&= t^2x - x^2 - (t_0^2 x_0 - x_0^2)
\end{aligned}$$

積分因子

定義：積分因子

積分因子とは，$P\,dt + Q\,dx = 0$ にかけることによって全微分型が得られるような関数 μ のこと.

$$(\mu P)dt + (\mu Q)dx = 0 \qquad \text{は全微分型}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial(\mu P)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \qquad P\frac{\partial \mu}{\partial x} - Q\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right) = 0 \tag{10}$$

$P_x = \frac{\partial P}{\partial x}, Q_t = \frac{\partial Q}{\partial t}$ とおくと, $\quad P\frac{\partial \mu}{\partial x} - Q\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu(P_x - Q_t) = 0.$

積分因子

定義：積分因子

積分因子とは，$P\,dt + Q\,dx = 0$ にかけることによって全微分型が得られるような関数 μ のこと.

$$(\mu P)dt + (\mu Q)dx = 0 \qquad \text{は全微分型}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial(\mu P)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \qquad P\frac{\partial \mu}{\partial x} - Q\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right) = 0 \tag{10}$$

$P_x = \frac{\partial P}{\partial x}, Q_t = \frac{\partial Q}{\partial t}$ とおくと, $\quad P\frac{\partial \mu}{\partial x} - Q\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu(P_x - Q_t) = 0.$

積分因子

定義：積分因子

積分因子とは，$P\,dt + Q\,dx = 0$ にかけることによって全微分型が得られるような関数 μ のこと.

$$(\mu P)dt + (\mu Q)dx = 0 \qquad \text{は全微分型}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial(\mu P)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \qquad P\frac{\partial \mu}{\partial x} - Q\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right) = 0 \tag{10}$$

$P_x = \frac{\partial P}{\partial x}, Q_t = \frac{\partial Q}{\partial t}$ とおくと，$\quad P\frac{\partial \mu}{\partial x} - Q\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu\,(P_x - Q_t) = 0.$

積分因子：μ が求まる場合

(1) μ が t のみの関数

$$(10) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{P_x - Q_t}{Q}$$

これを満たす $\mu(t)$ が存在するための必要十分条件は

$$\frac{P_x - Q_t}{Q} \quad \text{は } t \text{ のみの関数}$$

（証明）必要：明らか
十分：$\frac{P_x - Q_t}{Q}$ は t のみの関数ならば，積分して，

$$\log|\mu(t)| = \int \frac{P_x - Q_t}{Q}\, dt \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = e^{\int \frac{P_x - Q_t}{Q}\, dt}$$

(2) μ が x のみの関数：必要十分条件は「$\frac{P_x - Q_t}{P}$ は x のみの関数」
(3) 当てはめ法：ODE の形を見て，積分因子を当てる．

積分因子：μ が求まる場合

(1) μ が t のみの関数

$$(10) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{P_x - Q_t}{Q}$$

これを満たす $\mu(t)$ が存在するための必要十分条件は

$$\frac{P_x - Q_t}{Q} \quad \text{は } t \text{ のみの関数}$$

（証明）必要：明らか

十分：$\frac{P_x - Q_t}{Q}$ は t のみの関数ならば，積分して，

$$\log|\mu(t)| = \int \frac{P_x - Q_t}{Q}\,dt \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = e^{\int \frac{P_x - Q_t}{Q}\,dt}$$

(2) μ が x のみの関数：必要十分条件は「$\frac{P_x - Q_t}{P}$ は x のみの関数」

(3) 当てはめ法：ODE の形を見て，積分因子を当てる．

積分因子：μ が求まる場合

(1) μ が t のみの関数

$$(10) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{P_x - Q_t}{Q}$$

これを満たす $\mu(t)$ が存在するための必要十分条件は

$$\frac{P_x - Q_t}{Q} \quad \text{は } t \text{ のみの関数}$$

（証明）必要：明らか
十分：$\frac{P_x - Q_t}{Q}$ は t のみの関数ならば，積分して，

$$\log|\mu(t)| = \int \frac{P_x - Q_t}{Q}\,dt \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = e^{\int \frac{P_x - Q_t}{Q}\,dt}$$

(2) μ が x のみの関数：必要十分条件は「$\frac{P_x - Q_t}{P}$ は x のみの関数」
(3) 当てはめ法：ODE の形を見て，積分因子を当てる．

積分因子：μ が求まる場合

(1) μ が t のみの関数

$$(10) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{P_x - Q_t}{Q}$$

これを満たす $\mu(t)$ が存在するための必要十分条件は

$$\frac{P_x - Q_t}{Q} \quad \text{は } t \text{ のみの関数}$$

（証明）必要：明らか
十分：$\frac{P_x - Q_t}{Q}$ は t のみの関数ならば，積分して，

$$\log|\mu(t)| = \int \frac{P_x - Q_t}{Q}\,dt \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = e^{\int \frac{P_x - Q_t}{Q}\,dt}$$

(2) μ が x のみの関数：必要十分条件は「$\frac{P_x - Q_t}{P}$ は x のみの関数」

(3) 当てはめ法：ODE の形を見て，積分因子を当てる．

積分因子：μ が求まる場合

(1) μ が t のみの関数

$$(10) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{P_x - Q_t}{Q}$$

これを満たす $\mu(t)$ が存在するための必要十分条件は

$$\frac{P_x - Q_t}{Q} \quad \text{は } t \text{ のみの関数}$$

（証明）必要：明らか
十分：$\frac{P_x - Q_t}{Q}$ は t のみの関数ならば，積分して，

$$\log|\mu(t)| = \int \frac{P_x - Q_t}{Q}\, dt \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = e^{\int \frac{P_x - Q_t}{Q}\, dt}$$

(2) μ が x のみの関数：必要十分条件は「$\frac{P_x - Q_t}{P}$ は x のみの関数」
(3) 当てはめ法：ODE の形を見て，積分因子を当てる．

例：$(t + x^2 + 1)\,dt + 2x\,dx = 0$

$$\frac{P_x - Q_t}{Q} = \frac{2x - 0}{2x} = 1 \qquad t \text{ のみの関数}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = 1 \quad \text{を解いて} \quad \mu(t) = Ce^t$$

$\mu(t) = e^t$ を ODE の両辺にかけて

$$e^t(t + x^2 + 1)\,dt + 2xe^t\,dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^t(t + x^2 + 1)\right) = 2xe^t = \frac{\partial}{\partial t}(2xe^t)$$

より全微分型．解：$\varphi(t, x) = C$．ただし，

$$\begin{aligned}
\varphi(t, x) &= \int_{t_0}^{t} e^t(t + x^1 + 2)\,dt + \int_{x_0}^{x} 2xe^{t_0}\,dx \\
&= e^t(x^2 + t) - e^{t_0}(x^2 + t_0) + x^2 e^{t_0} - x_0^2 e^{t_0} \\
&= e^t(x^2 + t) - e^{t_0}(x_0^2 + t_0)
\end{aligned}$$

解：$e^t(x^2 + t) = C$

例：$(t + x^2 + 1)\,dt + 2x\,dx = 0$

$$\frac{P_x - Q_t}{Q} = \frac{2x - 0}{2x} = 1 \qquad t \text{ のみの関数}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = 1 \quad \text{を解いて} \quad \mu(t) = Ce^t$$

$\mu(t) = e^t$ を ODE の両辺にかけて

$$e^t(t + x^2 + 1)\,dt + 2xe^t\,dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^t(t + x^2 + 1)\right) = 2xe^t = \frac{\partial}{\partial t}(2xe^t)$$

より全微分型．解：$\varphi(t, x) = C$．ただし，

$$\begin{aligned}
\varphi(t, x) &= \int_{t_0}^{t} e^t(t + x^1 + 2)\,dt + \int_{x_0}^{x} 2xe^{t_0}\,dx \\
&= e^t(x^2 + t) - e^{t_0}(x^2 + t_0) + x^2e^{t_0} - x_0^2e^{t_0} \\
&= e^t(x^2 + t) - e^{t_0}(x_0^2 + t_0)
\end{aligned}$$

解：$e^t(x^2 + t) = C$

例：$(t + x^2 + 1)\,dt + 2x\,dx = 0$

$$\frac{P_x - Q_t}{Q} = \frac{2x - 0}{2x} = 1 \qquad t \text{ のみの関数}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = 1 \quad \text{を解いて} \quad \mu(t) = Ce^t$$

$\mu(t) = e^t$ を ODE の両辺にかけて

$$e^t(t + x^2 + 1)\,dt + 2xe^t\,dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^t(t + x^2 + 1)\right) = 2xe^t = \frac{\partial}{\partial t}(2xe^t)$$

より全微分型. 解：$\varphi(t, x) = C$. ただし,

$$\begin{aligned}
\varphi(t, x) &= \int_{t_0}^{t} e^t(t + x^1 + 2)\,dt + \int_{x_0}^{x} 2xe^{t_0}\,dx \\
&= e^t(x^2 + t) - e^{t_0}(x^2 + t_0) + x^2e^{t_0} - x_0^2e^{t_0} \\
&= e^t(x^2 + t) - e^{t_0}(x_0^2 + t_0)
\end{aligned}$$

解：$e^t(x^2 + t) = C$

例：$(t + x^2 + 1)\,dt + 2x\,dx = 0$

$$\frac{P_x - Q_t}{Q} = \frac{2x - 0}{2x} = 1 \qquad t \text{ のみの関数}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = 1 \quad \text{を解いて} \quad \mu(t) = Ce^t$$

$\mu(t) = e^t$ を ODE の両辺にかけて

$$e^t(t + x^2 + 1)\,dt + 2xe^t\,dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^t(t + x^2 + 1)\right) = 2xe^t = \frac{\partial}{\partial t}(2xe^t)$$

より全微分型．解：$\varphi(t, x) = C$．ただし，

$$\begin{aligned}
\varphi(t, x) &= \int_{t_0}^{t} e^t(t + x^1 + 2)\,dt + \int_{x_0}^{x} 2xe^{t_0}\,dx \\
&= e^t(x^2 + t) - e^{t_0}(x^2 + t_0) + x^2e^{t_0} - x_0^2e^{t_0} \\
&= e^t(x^2 + t) - e^{t_0}(x_0^2 + t_0)
\end{aligned}$$

解：$e^t(x^2 + t) = C$

例：$t^2x^5\,dt + 2t^3x^4\,dx = 0$

P, Q が多項式または有理関数のとき，
$\mu(t,x) = t^m x^n$ の形で求めるとよい．

ここで，

$$d(tx^2) = \frac{\partial}{\partial t}(tx^2)\,dt + \frac{\partial}{\partial x}(tx^2)\,dx = x^2\,dt + 2tx\,dx$$

$$\begin{aligned} t^2x^3\,d(tx^2) &= 0 \qquad \mu(t,x) = \frac{1}{t^2x^3} \text{ とする} \\ d(tx^2) &= 0 \\ tx^2 &= C \end{aligned}$$

例：$t^2x^5\,dt + 2t^3x^4\,dx = 0$

P, Q が多項式または有理関数のとき，
$\mu(t,x) = t^m x^n$ の形で求めるとよい．

ここで，

$$d(tx^2) = \frac{\partial}{\partial t}(tx^2)\,dt + \frac{\partial}{\partial x}(tx^2)\,dx = x^2\,dt + 2tx\,dx$$

$$\begin{aligned} t^2x^3\,d(tx^2) &= 0 \qquad \mu(t,x) = \frac{1}{t^2x^3} \text{ とする} \\ d(tx^2) &= 0 \\ tx^2 &= C \end{aligned}$$

例：$t^2x^5\,dt + 2t^3x^4\,dx = 0$

P, Q が多項式または有理関数のとき，
$\mu(t,x) = t^m x^n$ の形で求めるとよい．

ここで，

$$d(tx^2) = \frac{\partial}{\partial t}(tx^2)\,dt + \frac{\partial}{\partial x}(tx^2)\,dx = x^2\,dt + 2tx\,dx$$

$$\begin{aligned} t^2x^3\,d(tx^2) &= 0 \qquad \mu(t,x) = \frac{1}{t^2x^3} \text{ とする} \\ d(tx^2) &= 0 \\ tx^2 &= C \end{aligned}$$

例：$t^2x^5\,dt + 2t^3x^4\,dx = 0$

P, Q が多項式または有理関数のとき，
$\mu(t,x) = t^m x^n$ の形で求めるとよい．

ここで，

$$d(tx^2) = \frac{\partial}{\partial t}(tx^2)\,dt + \frac{\partial}{\partial x}(tx^2)\,dx = x^2\,dt + 2tx\,dx$$

$$\begin{aligned} t^2x^3\,d(tx^2) &= 0 \qquad \mu(t,x) = \frac{1}{t^2x^3} \text{ とする} \\ d(tx^2) &= 0 \\ tx^2 &= C \end{aligned}$$

積分因子：まとめ

これまでの全ての ODE のタイプは積分因子の方法に帰着できる：

- 変数分離型：$x' = g(t)h(x)$

$$\mu(t,x) = \frac{1}{h(x)} \text{ とすると，} \quad g(t)\,dt - \frac{1}{h(x)}\,dx = 0$$

- 同次型：$u = \frac{x}{t}$ として，変数分離に帰着
- 線型：$\mu(t,x) = e^{-\int p(t)\,dt}$

積分因子：まとめ

これまでの全ての ODE のタイプは積分因子の方法に帰着できる：

- 変数分離型：$x' = g(t)h(x)$

$$\mu(t,x) = \frac{1}{h(x)} \text{ とすると，} \quad g(t)\,dt - \frac{1}{h(x)}\,dx = 0$$

- 同次型：$u = \frac{x}{t}$ として，変数分離に帰着
- 線型：$\mu(t,x) = e^{-\int p(t)\,dt}$

積分因子：まとめ

これまでの全ての ODE のタイプは積分因子の方法に帰着できる：

- 変数分離型：$x' = g(t)h(x)$

$$\mu(t,x) = \frac{1}{h(x)} \text{ とすると，} \quad g(t)\,dt - \frac{1}{h(x)}\,dx = 0$$

- 同次型：$u = \frac{x}{t}$ として，変数分離に帰着
- 線型：$\mu(t,x) = e^{-\int p(t)\,dt}$

級数解法：　例　$x' = \alpha x$

中心 $t_0 = 0$ の級数 $x(t) = t^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $a_0 \neq 0$ の形で解を求める（そうなるように $k \in \mathbb{R}$ を決める）.

方程式に代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k) t^{n+k-1} = \alpha \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{m+k}$$

$$a_0 k t^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+1}(n+k+1) - \alpha a_n \right] t^{n+k} = 0$$

係数=0 の条件より $a_0 k = 0 \Rightarrow k = 0$.

$$a_{n+1} = \frac{\alpha}{n+k+1} a_n = \frac{\alpha}{n+1} a_n$$

$$a_1 = \frac{\alpha}{1} a_0, \ a_2 = \frac{\alpha}{2} a_1 = \frac{\alpha^2}{2!} a_0, \ \ldots, a_n = \frac{\alpha^n}{n!} a_0$$

$$\Rightarrow x(t) = a_0 t^0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} t^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = a_0 e^{\alpha t}$$

級数解法： 例 $x' = \alpha x$

中心 $t_0 = 0$ の級数 $x(t) = t^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $a_0 \neq 0$ の形で解を求める（そうなるように $k \in \mathbb{R}$ を決める）. 方程式に代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k) t^{n+k-1} = \alpha \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{m+k}$$

$$a_0 k t^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+1}(n+k+1) - \alpha a_n \right] t^{n+k} = 0$$

係数=0 の条件より $a_0 k = 0 \Rightarrow k = 0$.

$$a_{n+1} = \frac{\alpha}{n+k+1} a_n = \frac{\alpha}{n+1} a_n$$

$$a_1 = \frac{\alpha}{1} a_0, \; a_2 = \frac{\alpha}{2} a_1 = \frac{\alpha^2}{2!} a_0, \; \ldots, a_n = \frac{\alpha^n}{n!} a_0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = a_0 t^0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} t^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = a_0 e^{\alpha t}$$

級数解法： 例 $x' = \alpha x$

中心 $t_0 = 0$ の級数 $x(t) = t^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $a_0 \neq 0$ の形で解を求める（そうなるように $k \in \mathbb{R}$ を決める）. 方程式に代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k) t^{n+k-1} = \alpha \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{m+k}$$

$$a_0 k t^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+1}(n+k+1) - \alpha a_n \right] t^{n+k} = 0$$

係数=0 の条件より $a_0 k = 0 \Rightarrow k = 0$.

$$a_{n+1} = \frac{\alpha}{n+k+1} a_n = \frac{\alpha}{n+1} a_n$$

$$a_1 = \frac{\alpha}{1} a_0, \; a_2 = \frac{\alpha}{2} a_1 = \frac{\alpha^2}{2!} a_0, \; \ldots, a_n = \frac{\alpha^n}{n!} a_0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = a_0 t^0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} t^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = a_0 e^{\alpha t}$$

級数解法： 例 $x' = \alpha x$

中心 $t_0 = 0$ の級数 $x(t) = t^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $a_0 \neq 0$ の形で解を求める（そうなるように $k \in \mathbb{R}$ を決める）. 方程式に代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k) t^{n+k-1} = \alpha \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{m+k}$$

$$a_0 k t^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+1}(n+k+1) - \alpha a_n \right] t^{n+k} = 0$$

係数=0 の条件より $a_0 k = 0 \Rightarrow k = 0$.

$$a_{n+1} = \frac{\alpha}{n+k+1} a_n = \frac{\alpha}{n+1} a_n$$

$$a_1 = \frac{\alpha}{1} a_0, \; a_2 = \frac{\alpha}{2} a_1 = \frac{\alpha^2}{2!} a_0, \; \ldots, a_n = \frac{\alpha^n}{n!} a_0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = a_0 t^0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} t^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = a_0 e^{\alpha t}$$

級数解法： 例 $x' = \alpha x$

中心 $t_0 = 0$ の級数 $x(t) = t^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $a_0 \neq 0$ の形で解を求める（そうなるように $k \in \mathbb{R}$ を決める）. 方程式に代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k) t^{n+k-1} = \alpha \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{m+k}$$

$$a_0 k t^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+1}(n+k+1) - \alpha a_n \right] t^{n+k} = 0$$

係数=0 の条件より $a_0 k = 0 \Rightarrow k = 0$.

$$a_{n+1} = \frac{\alpha}{n+k+1} a_n = \frac{\alpha}{n+1} a_n$$

$$a_1 = \frac{\alpha}{1} a_0, \; a_2 = \frac{\alpha}{2} a_1 = \frac{\alpha^2}{2!} a_0, \; \ldots, a_n = \frac{\alpha^n}{n!} a_0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = a_0 t^0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} t^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = a_0 e^{\alpha t}$$

級数解法： 例 $x' = \alpha x$

中心 $t_0 = 0$ の級数 $x(t) = t^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $a_0 \neq 0$ の形で解を求める（そうなるように $k \in \mathbb{R}$ を決める）. 方程式に代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k) t^{n+k-1} = \alpha \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{m+k}$$

$$a_0 k t^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+1}(n+k+1) - \alpha a_n \right] t^{n+k} = 0$$

係数=0 の条件より $a_0 k = 0 \Rightarrow k = 0$.

$$a_{n+1} = \frac{\alpha}{n+k+1} a_n = \frac{\alpha}{n+1} a_n$$

$$a_1 = \frac{\alpha}{1} a_0, \; a_2 = \frac{\alpha}{2} a_1 = \frac{\alpha^2}{2!} a_0, \; \ldots, a_n = \frac{\alpha^n}{n!} a_0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = a_0 t^0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} t^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = a_0 e^{\alpha t}$$

例：$x' = \frac{\alpha}{t}x$

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+k}, \quad a_0 \neq 0$$

方程式に代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n t^{n+k-1}$$

係数の比較：

$$a_0 k = \alpha a_0, \quad a_n(n+k) = \alpha a_n$$

より $k = \alpha$, $a_n = 0$.

$$\Rightarrow \quad x(t) = a_0 t^{\alpha}$$

例：$x' = \frac{\alpha}{t}x$

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+k}, \quad a_0 \neq 0$$

方程式に代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k) t^{n+k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n t^{n+k-1}$$

係数の比較：

$$a_0 k = \alpha a_0, \quad a_n (n+k) = \alpha a_n$$

より $k = \alpha$, $a_n = 0$.

$$\Rightarrow \quad x(t) = a_0 t^{\alpha}$$

例：$x' = \frac{\alpha}{t}x$

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+k}, \quad a_0 \neq 0$$

方程式に代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n t^{n+k-1}$$

係数の比較：

$$a_0 k = \alpha a_0, \quad a_n(n+k) = \alpha a_n$$

より $k = \alpha$, $a_n = 0$.

$$\Rightarrow \quad x(t) = a_0 t^{\alpha}$$

例：$x' = \frac{\alpha}{t}x$

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+k}, \quad a_0 \neq 0$$

方程式に代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n t^{n+k-1}$$

係数の比較：

$$a_0 k = \alpha a_0, \quad a_n(n+k) = \alpha a_n$$

より $k = \alpha$, $a_n = 0$.

$$\Rightarrow \quad x(t) = a_0 t^{\alpha}$$

例：$x' = \frac{\alpha}{t^2}x$

解は $x(t) = Ce^{-\frac{\alpha}{t}}$ ：$t = 0$ で解析的ではない $\Rightarrow$ 級数解は存在しない.

方程式に $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+k}, \quad a_0 \neq 0$ を代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha a_m t^{m+k-2}$$

t^{k-2} の係数：$0 = \alpha a_0 \Rightarrow a_0 = 0$ 矛盾

$\Rightarrow$ x' が $\frac{1}{t}$ よりはやく発散する場合は使えない.

中心 $t_0 \neq 0$ ならば，級数解 $\sum a_n(t - t_0)^{n+k}$ が求まる.

例：$x' = \frac{\alpha}{t^2}x$

解は $x(t) = Ce^{-\frac{\alpha}{t}}$ ：$t = 0$ で解析的ではない $\Rightarrow$ 級数解は存在しない.

方程式に $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+k}, \quad a_0 \neq 0$ を代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha a_m t^{m+k-2}$$

t^{k-2} の係数：$0 = \alpha a_0 \Rightarrow a_0 = 0$ 矛盾

$\Rightarrow$ x' が $\frac{1}{t}$ よりはやく発散する場合は使えない.

中心 $t_0 \neq 0$ ならば，級数解 $\sum a_n(t - t_0)^{n+k}$ が求まる.

例：$x' = \frac{\alpha}{t^2}x$

解は $x(t) = Ce^{-\frac{\alpha}{t}}$ ：$t = 0$ で解析的ではない $\Rightarrow$ 級数解は存在しない.

方程式に $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+k}, \quad a_0 \neq 0$ を代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha a_m t^{m+k-2}$$

t^{k-2} の係数：$0 = \alpha a_0 \Rightarrow a_0 = 0$ 矛盾

$\Rightarrow$ x' が $\frac{1}{t}$ よりはやく発散する場合は使えない.

中心 $t_0 \neq 0$ ならば，級数解 $\sum a_n(t - t_0)^{n+k}$ が求まる.

例：$x' = \frac{\alpha}{t^2}x$

解は $x(t) = Ce^{-\frac{\alpha}{t}}$：$t = 0$ で解析的ではない $\Rightarrow$ 級数解は存在しない.

方程式に $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+k}$, $a_0 \neq 0$ を代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha a_m t^{m+k-2}$$

t^{k-2} の係数：$0 = \alpha a_0$ $\Rightarrow$ $a_0 = 0$ 矛盾

$\Rightarrow$ x' が $\frac{1}{t}$ よりはやく発散する場合は使えない.

中心 $t_0 \neq 0$ ならば，級数解 $\sum a_n(t - t_0)^{n+k}$ が求まる.

例：$x' = \frac{\alpha}{t^2}x$

解は $x(t) = Ce^{-\frac{\alpha}{t}}$：$t = 0$ で解析的ではない $\Rightarrow$ 級数解は存在しない.

方程式に $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+k}$, $a_0 \neq 0$ を代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha a_m t^{m+k-2}$$

t^{k-2} の係数：$0 = \alpha a_0$ $\Rightarrow$ $a_0 = 0$ 矛盾

$\Rightarrow$ x' が $\frac{1}{t}$ よりはやく発散する場合は使えない.

中心 $t_0 \neq 0$ ならば，級数解 $\sum a_n(t - t_0)^{n+k}$ が求まる.

例：$x' = \frac{x}{1-t}$

解は $x(t) = \frac{C}{1-t}$.

$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+k}$, $a_0 \neq 0$ を $(1-t)x' = x$ に代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-t)a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\alpha a_m t^{m+k}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\alpha a_m(m+k+1)t^{m+k}$$

$a_0 k = 0$, $a_{n+1} = \frac{n+k+1}{n+k+1}a_n = a_n$ より

$$x(t) = a_0\sum_{n=0}^{\infty}t^n = \frac{a_0}{1-t}$$

収束半径は 1 であるが，$|t| > 1$ でも解になっている．

例：$x' = \frac{x}{1-t}$

解は $x(t) = \frac{C}{1-t}$.
$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+k}$, $a_0 \neq 0$ を $(1-t)x' = x$ に代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-t)a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\alpha a_m t^{m+k}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\alpha a_m(m+k+1)t^{m+k}$$

$a_0 k = 0$, $a_{n+1} = \frac{n+k+1}{n+k+1}a_n = a_n$ より

$$x(t) = a_0\sum_{n=0}^{\infty}t^n = \frac{a_0}{1-t}$$

収束半径は 1 であるが，$|t| > 1$ でも解になっている．

例：$x' = \frac{x}{1-t}$

解は $x(t) = \frac{C}{1-t}$.
$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+k}$, $a_0 \neq 0$ を $(1-t)x' = x$ に代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-t)a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\alpha a_m t^{m+k}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\alpha a_m(m+k+1)t^{m+k}$$

$a_0 k = 0$, $a_{n+1} = \frac{n+k+1}{n+k+1}a_n = a_n$ より

$$x(t) = a_0\sum_{n=0}^{\infty}t^n = \frac{a_0}{1-t}$$

収束半径は 1 であるが，$|t| > 1$ でも解になっている．

例：$x' = \frac{x}{1-t}$

解は $x(t) = \frac{C}{1-t}$.
$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+k}$, $a_0 \neq 0$ を $(1-t)x' = x$ に代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-t)a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\alpha a_m t^{m+k}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\alpha a_m(m+k+1)t^{m+k}$$

$a_0 k = 0$, $a_{n+1} = \frac{n+k+1}{n+k+1}a_n = a_n$ より

$$x(t) = a_0\sum_{n=0}^{\infty}t^n = \frac{a_0}{1-t}$$

収束半径は 1 であるが，$|t| > 1$ でも解になっている.

例：$x' = \frac{x}{1-t}$

解は $x(t) = \frac{C}{1-t}$.
$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+k}$, $a_0 \neq 0$ を $(1-t)x' = x$ に代入：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-t)a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\alpha a_m t^{m+k}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+k)t^{n+k-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\alpha a_m(m+k+1)t^{m+k}$$

$a_0 k = 0$, $a_{n+1} = \frac{n+k+1}{n+k+1}a_n = a_n$ より

$$x(t) = a_0\sum_{n=0}^{\infty}t^n = \frac{a_0}{1-t}$$

収束半径は 1 であるが，$|t| > 1$ でも解になっている.

級数解法

定理

$p(t), q(t)$ が t_0 で解析的ならば,

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$$

は二つの独立な解があり，それを

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$$

の形で書くことができる.
ただし，収束半径は $R(x) \geq \min\{R(p), R(q)\}$.

レポート

今回の講義のレポート問題を解いて，提出して下さい.
（詳しいことは PandA の「手紙 04」を参照すること.）

「解答付き問題」のファイルで他の例題を紹介しています.

微分積分学続論 II： 第 5 回

Karel Svadlenka

2020 年 5 月 8 日

■定数係数高階線型 ODE

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \tag{1}$$

$$\approx \qquad\qquad = 0 \tag{2}$$

(2): 斉次方程式（homogeneous equation） (1): 非斉次方程式（$f \not\equiv 0$）

注：$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$，$a_0 \neq 0$ ならば $a_1 = 1$ としてよい（a_0 でわる）．以降ではそうする．

線型とは：(1) の左辺を $L(x)$ （作用素）とおくと，

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \ \ C^n\text{-級関数}$$

つまり，x と y が (2) の解ならば，その任意の線型結合 $\alpha x + \beta y$ も解．

■定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \tag{3}$$

(A) n 階のため，一般解は n 個の積分定数を含む $\Rightarrow$ 解を一つだけ決めるには n 個の追加条件が必要

- 初期条件：$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$ (IV)
- 境界条件：$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1,\ \ldots,\ \ x(t_{n-1}) = x_{n-1}$ (BV)

(B) 解の存在・一意性

存在定理
f が区間 I 上で連続で $t_0 \in I^\circ$ ならば，(3) & (IV) の解は I 上でただ一つ存在する．

注：$a_0, a_1, \ldots, a_n$ が t の関数で，I 上で連続，$a_0(t) \neq 0\, \forall t \in I$ のときも成り立つ．

一方，(3) & (BV) に対して，同じことが言えない．

■定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

例 境界条件のとき，存在・一意性が成り立たない

$$x'' + x = 0 \qquad\qquad \text{一般解は} \quad x(t) = C_1\cos t + C_2 \sin t$$

(BV1) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 0$ 条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 はすべての C_2 で成立 $\Rightarrow$ $\quad x(t) = C_2 \sin t,\ C_2 \in \mathbb{R}$
無限個の解

(BV2) $\underline{x(0)=0,\ x(\frac{\pi}{2})=0}$ 条件 1 より $C_1=0$，条件 2 より $C_2=0 \Rightarrow$ $x(t)=0$ が唯一の解

(BV3) $\underline{x(0)=0,\ x(\pi)=1}$ 条件 1 より $C_1=0$，条件 2 は $C_2\sin\pi=1 \Rightarrow$ 解は存在しない

■定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=f(t) \tag{4}$$

(C) 1 階化：$y_0(t)=x(t),\ y_1(t)=x'(t),\ \ldots,\ y_{n-1}(t)=x^{(n-1)}(t)$ とおく

$$\begin{cases} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ & \vdots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= f-a_ny_0-\ldots a_1y_{n-1} \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ \vdots \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{f}}$$

$$\boldsymbol{y}'=A\boldsymbol{y}+\boldsymbol{F}$$

$\Rightarrow$ 1 階線型連立 ODE の特別なケース (B),(D) の理論は一般の $A(t)$ でも成り立つが，この特別なケースの方が解きやすい．

■定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=f(t) \tag{5}$$

$$\approx \qquad\qquad =0 \tag{6}$$

(D) 解の構造

定理（(5) の一般解）
(5) の一般解 $x(t)$ は，(6) の一般解 $X(t)$ と (5) の一つの解 $x_p(t)$ の和で表される：

$$x(t)=X(t)+x_p(t).$$

定理（(6) の一般解）
1 次独立な n 個の C^n-級の解 $X_1(t),\ldots,X_n(t)$ があって，(6) のすべての解はそれらの 1 次結合で一意的に表される：

$$X(t)=C_1X_1(t)+\cdots+C_nX_n(t).$$

注：$a_0(t),\ldots,a_n(t)$ が連続で，$a_0(t)\neq 0$ のときも成立.

■定数係数高階線型 ODE

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=f(t) \tag{7}$$

解き方（(7) の一般解を求める）:(D) より従う

- まず，斉次 ODE の n 個の 1 次独立な解を見つける $\rightarrow$ $X_1, \ldots, X_n$
- 次に，非斉次 ODE の一つの解を見つける $\rightarrow$ x_p

$\Rightarrow$ 一般解は　$x(t) = C_1X_1(t) + \cdots + C_nX_n(t) + x_p(t),\ \ C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$

注：$X_1, \ldots, X_n$ が I 上で 1 次独立であるとは

$$C_1X_1(t) + \cdots + C_nX_n(t) \equiv 0 \quad \text{on } I \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = \cdots = C_n = 0$$

■まず，2 階 ODE を考える：$x'' + a_1x' + a_2x = f(t)$

$$\text{斉次 ODE：} \qquad x'' + a_1x' + a_2x = 0 \tag{8}$$

$x = e^{\lambda t}$ と置いてみる：　$(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)e^{\lambda t} = 0$

$$\Rightarrow \qquad \lambda \text{ が} \qquad \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \tag{9}$$

の根ならば，$x(t) = e^{\lambda t}$ は (11) の解.　　(9) ... 特性方程式

(a) 根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 実数のとき，(11) の一般解は

$$X(t) = C_1 \underbrace{e^{\lambda_1 t}}_{X_1(t)} + C_2 \underbrace{e^{\lambda_2 t}}_{X_2(t)}$$

(b) $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ 重根のとき

■まず，2 階 ODE を考える：$x'' + a_1x' + a_2x = f(t)$

$$\text{斉次 ODE：} \qquad x'' + a_1x' + a_2x = 0 \tag{10}$$

(b) $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ 重根のとき

$$\begin{aligned} x'' - 2\alpha x' + \alpha^2 x &= 0 \qquad e^{-\alpha t}\text{を両辺にかける} \\ x''e^{-\alpha t} - 2\alpha x'e^{-\alpha t} + \alpha^2 xe^{-\alpha t} &= 0 \\ (xe^{-\alpha t})'' &= 0 \\ xe^{-\alpha t} &= C_1 + C_2 t \\ x(t) &= C_1 \underbrace{e^{\alpha t}}_{X_1} + C_2 \underbrace{te^{\alpha t}}_{X_2} \end{aligned}$$

■まず，2 階 ODE を考える：$x'' + a_1x' + a_2x = f(t)$

$$\text{斉次 ODE：} \qquad x'' + a_1x' + a_2x = 0 \tag{11}$$

(c) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \ \beta \neq 0$ のとき $x(t) = C_1e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2e^{(\alpha-i\beta)t}$　は一般解

実数解がほしいとき，$X_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}$ と $X_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}$ の 1 次結合を考える：

$$X_1 = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$
$$X_2 = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$$
$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{ll} \frac{1}{2}(X_1+X_2) & = e^{\alpha t}\cos\beta t \\ \frac{1}{2i}(X_1-X_2) & = e^{\alpha t}\sin\beta t \end{array}\right\} \quad 1\text{ 次独立な実数解}$$

■まず，2 階 ODE を考える：$x'' + a_1x' + a_2x = f(t)$ (*)
あとは，非斉次方程式の一つの解を見つければよい．

3 つの方法

- 定数変化法：$C_1X_1(t) + C_2X_2(t)$ の C_1, C_2 を t の関数と見て，$x_p(t) = C_1(t)X_1(t) + C_2(t)X_2(t)$ が (*) を満たすよう，$C_1(t), C_2(t)$ を決める
- コーシーの補題に基づく方法
- 当てはめ法（undetermined coefficients）：例えば，

$$\begin{array}{lll} f(t) & = C \quad \text{のとき，} & x_p = \quad D \text{ の形で求めることができる} \\ & = Ce^{kt} & De^{kt} \\ & = C_1 + C_2t & D_1 + D_2t \\ & = C_1 + C_2t + C_3t^2 & D_1 + D_2t + D_3t^2 \end{array}$$

■例： $x'' + 3x' + 2x = e^{2t}$ の一般解を求める

- 斉次 ODE $x'' + 3x' + 2x = 0$ の一般解： $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ の根は $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ より

$$X(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

- 非斉次 ODE の一つの解：$x_p(t) = ae^{2t}$ の形で求める ODE に代入： $x_p'' + 3x_p' + 2x_p = (4a + 6a + 2a)e^{2t} = 12ae^{2t} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{12}$

答え：一般解は

$$x(t) = X(t) + x_p(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + \frac{1}{12}e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

■一般の階数の ODE を考える
演算子 $D = \frac{d}{dt}$ を用いて書き直すと便利：

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_nx = f(t)$$
$$D^nx + a_1D^{n-1}x + \cdots + a_nx = f(t)$$
$$P(D)x = \underbrace{(D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_n)}_{\text{微分多項式}}x = f(t)$$

普通の多項式のように，和・差・積の計算ができる．

いくつかの例：

(1) $(D - \alpha)x = 0$

■一般の階数の ODE を考える

いくつかの例：

(1) $\underline{(D-\alpha)x=0}$ $\frac{dx}{dt}-\alpha x=0$ だから $x=Ce^{\alpha t}$

別の見方：$e^{-\alpha t}$ をかける：

$$e^{-\alpha t}(D-\alpha)x=0$$
$$D\left(e^{-\alpha t}x\right)=0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha t}x=C$$

$D(e^{-\alpha t}x)=-\alpha e^{-\alpha t}x+e^{-\alpha t}Dx=e^{-\alpha t}(D-\alpha)x$

これは一般化できる：

$$P(D)\left(e^{-\alpha t}x\right)=e^{-\alpha t}P(D-\alpha)x$$

($D^n(e^{-\alpha t}x)$ に対して示せばよい)

■一般の階数の ODE を考える

いくつかの例：

(2) $\underline{(D-\alpha)^n x=0}$

$$e^{-\alpha t}(D-\alpha)^n x=0$$
$$D^n\left(e^{-\alpha t}x\right)=0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha t}x=C_1+C_2t+\cdots+C_nt^{n-1}$$
$$x(t)=\left(C_1+C_2t+\cdots+C_nt^{n-1}\right)e^{\alpha t}$$

2 階の (b) のケースに対応：$(D-\alpha)^2x=x''-2\alpha x'+\alpha^2x=0$

■一般の階数の ODE を考える

(3) $\underline{(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x=0,\ \lambda_1\neq\lambda_2}$ (2 階の (a) のケース)

任意の関数 x に対して，
$$x=\underbrace{\frac{D-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}x}_{x_2}+\underbrace{\frac{D-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}x}_{x_1}$$

x が ODE の解なら，

$$(D-\lambda_1)x_1=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x=0$$
$$(D-\lambda_2)x_2=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x=0$$

よって，$x(t)=x_1+x_2=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$

定理（一般化）

P,Q を互いに素な多項式とする．そのとき，ODE

$$P(D)Q(D)x=0$$

の解 $x(t)$ は次の形で一意的に分解される：

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t), \qquad P(D)x_1=0,\ \ Q(D)x_2=0.$$

注：互いに素な多項式：最大公約元が定数；証明はテキスト 61 頁を参照

■定数係数高階線型 ODE

(4) $(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)x = 0$　（一般の斉次 ODE）

■レポート

今回の講義のレポート問題を解いて，提出して下さい．（詳しいことは PandA の「手紙 05」を参照すること．）

「解答付き問題」のファイルで他の例題を紹介しています．

微分積分学続論 II： 第 5 回

Karel Svadlenka

京都大学大学院理学研究科 数学教室

2020 年 5 月 8 日

定数係数高階線型 ODE

$$
\begin{aligned}
a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x &= f(t) \qquad (1)\\
\approx \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 0 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

(2): 斉次方程式（homogeneous equation）
(1): 非斉次方程式（$f \not\equiv 0$）

注：$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$，$a_0 \neq 0$ ならば $a_1 = 1$ としてよい（a_0 でわる）．以降ではそうする．

線型とは：(1) の左辺を $L(x)$（作用素）とおくと，

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \ \ C^n\text{-級関数}$$

つまり，x と y が (2) の解ならば，その任意の線型結合 $\alpha x + \beta y$ も解．

定数係数高階線型 ODE

$$
\begin{aligned}
a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x &= f(t) \qquad (1)\\
\approx \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 0 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

(2): 斉次方程式（homogeneous equation）
(1): 非斉次方程式（$f \not\equiv 0$）

注：$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$，$a_0 \neq 0$ ならば $a_1 = 1$ としてよい（a_0 でわる）．以降ではそうする．

線型とは：(1) の左辺を $L(x)$（作用素）とおくと，

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \ C^n\text{-級関数}$$

つまり，x と y が (2) の解ならば，その任意の線型結合 $\alpha x + \beta y$ も解．

定数係数高階線型 ODE

$$
\begin{aligned}
a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x &= f(t) \qquad (1)\\
\approx \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 0 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

(2): 斉次方程式（homogeneous equation）
(1): 非斉次方程式（$f \not\equiv 0$）

注：$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$，$a_0 \neq 0$ ならば $a_1 = 1$ としてよい（a_0 でわる）．以降ではそうする．

線型とは：(1) の左辺を $L(x)$（作用素）とおくと，

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \ C^n\text{-級関数}$$

つまり，x と y が (2) の解ならば，その任意の線型結合 $\alpha x + \beta y$ も解．

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \tag{3}$$

(A) n 階のため，一般解は n 個の積分定数を含む

$\Rightarrow$ 解を一つだけ決めるには n 個の追加条件が必要

- 初期条件：$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$ (IV)
- 境界条件：$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1,\ \ldots,\ x(t_{n-1}) = x_{n-1}$ (BV)

(B) 解の存在・一意性

存在定理

f が区間 I 上で連続で $t_0 \in I^\circ$ ならば，(3) & (IV) の解は I 上でただ一つ存在する．

注：$a_0, a_1, \ldots, a_n$ が t の関数で，I 上で連続，$a_0(t) \neq 0\ \forall t \in I$ のときも成り立つ．

一方，(3) & (BV) に対して，同じことが言えない．

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \tag{3}$$

(A) n 階のため，一般解は n 個の積分定数を含む
$\Rightarrow$ 解を一つだけ決めるには n 個の追加条件が必要

- 初期条件：$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$ (IV)
- 境界条件：$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1,\ \ldots,\ x(t_{n-1}) = x_{n-1}$ (BV)

(B) 解の存在・一意性

存在定理

f が区間 I 上で連続で $t_0 \in I^\circ$ ならば，(3) & (IV) の解は I 上でただ一つ存在する．

注：$a_0, a_1, \ldots, a_n$ が t の関数で，I 上で連続，$a_0(t) \neq 0\ \forall t \in I$ のときも成り立つ．

一方，(3) & (BV) に対して，同じことが言えない．

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \tag{3}$$

(A) n 階のため，一般解は n 個の積分定数を含む
$\Rightarrow$ 解を一つだけ決めるには n 個の追加条件が必要

- 初期条件：$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$ (IV)
- 境界条件：$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1,\ \ldots,\ x(t_{n-1}) = x_{n-1}$ (BV)

(B) 解の存在・一意性

存在定理

f が区間 I 上で連続で $t_0 \in I^\circ$ ならば，(3) & (IV) の解は I 上でただ一つ存在する．

注：$a_0, a_1, \ldots, a_n$ が t の関数で，I 上で連続，$a_0(t) \neq 0\ \forall t \in I$ のときも成り立つ．

一方，(3) & (BV) に対して，同じことが言えない．

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \tag{3}$$

(A) n 階のため，一般解は n 個の積分定数を含む
$\Rightarrow$ 解を一つだけ決めるには n 個の追加条件が必要

- 初期条件：$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$ (IV)
- 境界条件：$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1,\ \ldots,\ x(t_{n-1}) = x_{n-1}$ (BV)

(B) 解の存在・一意性

存在定理

f が区間 I 上で連続で $t_0 \in I^\circ$ ならば，(3) & (IV) の解は I 上でただ一つ存在する．

注：$a_0, a_1, \ldots, a_n$ が t の関数で，I 上で連続，$a_0(t) \neq 0\ \forall t \in I$ のときも成り立つ．

一方，(3) & (BV) に対して，同じことが言えない．

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \tag{3}$$

(A) n 階のため，一般解は n 個の積分定数を含む
$\Rightarrow$ 解を一つだけ決めるには n 個の追加条件が必要

- 初期条件：$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$ (IV)
- 境界条件：$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1,\ \ldots,\ x(t_{n-1}) = x_{n-1}$ (BV)

(B) 解の存在・一意性

存在定理

f が区間 I 上で連続で $t_0 \in I^\circ$ ならば，(3) & (IV) の解は I 上でただ一つ存在する．

注：$a_0, a_1, \ldots, a_n$ が t の関数で，I 上で連続，$a_0(t) \neq 0\ \forall t \in I$ のときも成り立つ．

一方，(3) & (BV) に対して，同じことが言えない．

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \tag{3}$$

(A) n 階のため，一般解は n 個の積分定数を含む
$\Rightarrow$ 解を一つだけ決めるには n 個の追加条件が必要

- 初期条件：$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$ (IV)
- 境界条件：$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1,\ \ldots,\ x(t_{n-1}) = x_{n-1}$ (BV)

(B) 解の存在・一意性

存在定理

f が区間 I 上で連続で $t_0 \in I^\circ$ ならば，(3) & (IV) の解は I 上でただ一つ存在する．

注：$a_0, a_1, \ldots, a_n$ が t の関数で，I 上で連続，$a_0(t) \neq 0\ \forall t \in I$ のときも成り立つ．

一方，(3) & (BV) に対して，同じことが言えない．

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

例 境界条件のとき，存在・一意性が成り立たない

$$x'' + x = 0 \qquad \text{一般解は} \quad x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

(BV1) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 はすべての C_2 で成立

$\Rightarrow$ $x(t) = C_2 \sin t,\ C_2 \in \mathbb{R}$ 無限個の解

(BV2) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 より $C_2 = 0$

$\Rightarrow$ $x(t) = 0$ が唯一の解

(BV3) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 1$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 は $C_2 \sin \pi = 1$

$\Rightarrow$ 解は存在しない

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

例 境界条件のとき，存在・一意性が成り立たない

$$x'' + x = 0 \qquad \text{一般解は} \quad x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

(BV1) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 はすべての C_2 で成立

$\Rightarrow \quad x(t) = C_2 \sin t,\ C_2 \in \mathbb{R}$ 無限個の解

(BV2) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 より $C_2 = 0$

$\Rightarrow \quad x(t) = 0$ が唯一の解

(BV3) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 1$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 は $C_2 \sin \pi = 1$

$\Rightarrow \quad$ 解は存在しない

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

例 境界条件のとき，存在・一意性が成り立たない

$$x'' + x = 0 \qquad \text{一般解は} \quad x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

(BV1) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 はすべての C_2 で成立

$\Rightarrow \quad x(t) = C_2 \sin t,\ C_2 \in \mathbb{R}$ 無限個の解

(BV2) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 より $C_2 = 0$

$\Rightarrow \quad x(t) = 0$ が唯一の解

(BV3) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 1$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 は $C_2 \sin \pi = 1$

$\Rightarrow \quad$ 解は存在しない

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

例 境界条件のとき，存在・一意性が成り立たない

$$x'' + x = 0 \qquad \text{一般解は} \quad x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

(BV1) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 はすべての C_2 で成立

$\Rightarrow \quad x(t) = C_2 \sin t,\ C_2 \in \mathbb{R}$ 無限個の解

(BV2) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 より $C_2 = 0$

$\Rightarrow \quad x(t) = 0$ が唯一の解

(BV3) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 1$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 は $C_2 \sin \pi = 1$

$\Rightarrow \quad$ 解は存在しない

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

例 境界条件のとき，存在・一意性が成り立たない

$$x'' + x = 0 \qquad \text{一般解は} \quad x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

(BV1) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 はすべての C_2 で成立

$\Rightarrow \quad x(t) = C_2 \sin t,\ C_2 \in \mathbb{R}$ 無限個の解

(BV2) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 より $C_2 = 0$

$\Rightarrow \quad x(t) = 0$ が唯一の解

(BV3) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 1$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 は $C_2 \sin \pi = 1$

$\Rightarrow \quad$ 解は存在しない

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

例 境界条件のとき，存在・一意性が成り立たない

$$x'' + x = 0 \qquad \text{一般解は} \quad x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

(BV1) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 はすべての C_2 で成立

$\Rightarrow \quad x(t) = C_2 \sin t,\ C_2 \in \mathbb{R}$ 無限個の解

(BV2) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 より $C_2 = 0$

$\Rightarrow \quad x(t) = 0$ が唯一の解

(BV3) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 1$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 は $C_2 \sin \pi = 1$

$\Rightarrow \quad$ 解は存在しない

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

例 境界条件のとき，存在・一意性が成り立たない

$$x'' + x = 0 \qquad \text{一般解は} \quad x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

(BV1) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 はすべての C_2 で成立

$\Rightarrow \quad x(t) = C_2 \sin t,\ C_2 \in \mathbb{R}$ 無限個の解

(BV2) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 より $C_2 = 0$

$\Rightarrow \quad x(t) = 0$ が唯一の解

(BV3) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 1$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 は $C_2 \sin \pi = 1$

$\Rightarrow \quad$ 解は存在しない

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

例 境界条件のとき，存在・一意性が成り立たない

$x'' + x = 0$　　一般解は　$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

(BV1) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 はすべての C_2 で成立

$\Rightarrow$　$x(t) = C_2 \sin t,\ C_2 \in \mathbb{R}$ 無限個の解

(BV2) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 より $C_2 = 0$

$\Rightarrow$　$x(t) = 0$ が唯一の解

(BV3) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 1$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 は $C_2 \sin \pi = 1$

$\Rightarrow$　解は存在しない

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

例 境界条件のとき，存在・一意性が成り立たない

$x'' + x = 0$ 一般解は $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

(BV1) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 はすべての C_2 で成立

$\Rightarrow$ $x(t) = C_2 \sin t,\ C_2 \in \mathbb{R}$ 無限個の解

(BV2) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 より $C_2 = 0$

$\Rightarrow$ $x(t) = 0$ が唯一の解

(BV3) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 1$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 は $C_2 \sin \pi = 1$

$\Rightarrow$ 解は存在しない

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

例 境界条件のとき，存在・一意性が成り立たない

$$x'' + x = 0 \qquad \text{一般解は} \quad x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

(BV1) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 はすべての C_2 で成立

$\Rightarrow$ $x(t) = C_2 \sin t,\ C_2 \in \mathbb{R}$ 無限個の解

(BV2) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 より $C_2 = 0$

$\Rightarrow$ $x(t) = 0$ が唯一の解

(BV3) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 1$

条件 1 より $C_1 = 0$，条件 2 は $C_2 \sin \pi = 1$

$\Rightarrow$ 解は存在しない

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \tag{4}$$

(C) 1 階化：$y_0(t) = x(t),\ y_1(t) = x'(t),\ \ldots,\ y_{n-1}(t) = x^{(n-1)}(t)$ とおく

$$\begin{cases} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= f - a_n y_0 - \ldots a_1 y_{n-1} \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ \vdots \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \end{pmatrix}}_{y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}}_{y} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}}_{f}$$

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{F}$$

$\Rightarrow$ 1 階線型連立 ODE の特別なケース

(B),(D) の理論は一般の $A(t)$ でも成り立つが，この特別なケースの方が解きやすい．

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \tag{4}$$

(C) 1 階化：$y_0(t) = x(t),\ y_1(t) = x'(t),\ \ldots,\ y_{n-1}(t) = x^{(n-1)}(t)$ とおく

$$\begin{cases} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= f - a_n y_0 - \ldots a_1 y_{n-1} \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ \vdots \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \end{pmatrix}}_{y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}}_{y} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}}_{F}$$

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{F}$$

$\Rightarrow$ 1 階線型連立 ODE の特別なケース

(B),(D) の理論は一般の $A(t)$ でも成り立つが，この特別なケースの方が解きやすい．

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \tag{4}$$

(C) 1 階化：$y_0(t) = x(t),\ y_1(t) = x'(t),\ \ldots,\ y_{n-1}(t) = x^{(n-1)}(t)$ とおく

$$\begin{cases} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= f - a_n y_0 - \ldots a_1 y_{n-1} \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ \vdots \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{f}}$$

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{F}$$

$\Rightarrow$ 1 階線型連立 ODE の特別なケース
(B),(D) の理論は一般の $A(t)$ でも成り立つが，この特別なケースの方が解きやすい．

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \tag{4}$$

(C) 1 階化：$y_0(t) = x(t),\ y_1(t) = x'(t),\ \ldots,\ y_{n-1}(t) = x^{(n-1)}(t)$ とおく

$$\begin{cases} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= f - a_n y_0 - \ldots a_1 y_{n-1} \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ \vdots \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{f}}$$

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{F}$$

$\Rightarrow$ 1 階線型連立 ODE の特別なケース
(B),(D) の理論は一般の $A(t)$ でも成り立つが，この特別なケースの方が解きやすい．

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \tag{4}$$

(C) 1 階化：$y_0(t) = x(t),\ y_1(t) = x'(t),\ \ldots,\ y_{n-1}(t) = x^{(n-1)}(t)$ とおく

$$\begin{cases} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= f - a_n y_0 - \ldots a_1 y_{n-1} \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ \vdots \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{f}}$$

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{F}$$

$\Rightarrow$ 1 階線型連立 ODE の特別なケース

(B),(D) の理論は一般の $A(t)$ でも成り立つが，この特別なケースの方が解きやすい．

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \tag{4}$$

(C) 1 階化：$y_0(t) = x(t),\ y_1(t) = x'(t),\ \ldots,\ y_{n-1}(t) = x^{(n-1)}(t)$ とおく

$$\begin{cases} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= f - a_n y_0 - \ldots a_1 y_{n-1} \end{cases} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ \vdots \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{f}}$$

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{F}$$

$\Rightarrow$ 1 階線型連立 ODE の特別なケース
(B),(D) の理論は一般の $A(t)$ でも成り立つが，この特別なケースの方が解きやすい.

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \quad (5)$$

$$\approx \quad = \quad 0 \quad (6)$$

(D) 解の構造

定理（(5) の一般解）

(5) の一般解 $x(t)$ は，(6) の一般解 $X(t)$ と (5) の一つの解 $x_p(t)$ の和で表される：

$$x(t) = X(t) + x_p(t).$$

定理（(6) の一般解）

1 次独立な n 個の C^n-級の解 $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ があって，(6) のすべての解はそれらの 1 次結合で一意的に表される：

$$X(t) = C_1 X_1(t) + \cdots + C_n X_n(t).$$

注：$a_0(t), \ldots, a_n(t)$ が連続で，$a_0(t) \neq 0$ のときも成立.

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \quad (5)$$

$$\approx = 0 \quad (6)$$

(D) 解の構造

定理（(5) の一般解）

(5) の一般解 $x(t)$ は，(6) の一般解 $X(t)$ と (5) の一つの解 $x_p(t)$ の和で表される：

$$x(t) = X(t) + x_p(t).$$

定理（(6) の一般解）

1 次独立な n 個の C^n-級の解 $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ があって，(6) のすべての解はそれらの 1 次結合で一意的に表される：

$$X(t) = C_1 X_1(t) + \cdots + C_n X_n(t).$$

注：$a_0(t), \ldots, a_n(t)$ が連続で，$a_0(t) \neq 0$ のときも成立.

定数係数高階線型 ODE：コメント&観察

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \quad (5)$$

$$\approx = 0 \quad (6)$$

(D) 解の構造

定理（(5) の一般解）

(5) の一般解 $x(t)$ は，(6) の一般解 $X(t)$ と (5) の一つの解 $x_p(t)$ の和で表される：

$$x(t) = X(t) + x_p(t).$$

定理（(6) の一般解）

1 次独立な n 個の C^n-級の解 $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ があって，(6) のすべての解はそれらの 1 次結合で一意的に表される：

$$X(t) = C_1 X_1(t) + \cdots + C_n X_n(t).$$

注：$a_0(t), \ldots, a_n(t)$ が連続で，$a_0(t) \neq 0$ のときも成立.

定数係数高階線型 ODE

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \tag{7}$$

解き方 （(7) の一般解を求める）:(D) より従う

- まず，斉次 ODE の n 個の 1 次独立な解を見つける $\rightarrow$ $X_1, \ldots, X_n$
- 次に，非斉次 ODE の一つの解を見つける $\rightarrow$ x_p

$\Rightarrow$ 一般解は $x(t) = C_1 X_1(t) + \cdots + C_n X_n(t) + x_p(t), \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$

注：$X_1, \ldots, X_n$ が I 上で 1 次独立であるとは

$$C_1 X_1(t) + \cdots + C_n X_n(t) = 0 \quad \text{on } I \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = \cdots = C_n = 0$$

定数係数高階線型 ODE

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \tag{7}$$

解き方（(7) の一般解を求める）:(D) より従う

- まず，斉次 ODE の n 個の 1 次独立な解を見つける $\rightarrow$ $X_1, \ldots, X_n$
- 次に，非斉次 ODE の一つの解を見つける $\rightarrow$ x_p

$\Rightarrow$ 一般解は $x(t) = C_1 X_1(t) + \cdots + C_n X_n(t) + x_p(t), \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$

注：$X_1, \ldots, X_n$ が I 上で 1 次独立であるとは

$C_1 X_1(t) + \cdots + C_n X_n(t) \equiv 0 \quad \text{on } I \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = \cdots = C_n = 0$

定数係数高階線型 ODE

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \tag{7}$$

解き方（(7) の一般解を求める）:(D) より従う

- まず，斉次 ODE の n 個の 1 次独立な解を見つける $\rightarrow$ $X_1, \ldots, X_n$
- 次に，非斉次 ODE の一つの解を見つける $\rightarrow$ x_p

$\Rightarrow$ 一般解は $x(t) = C_1 X_1(t) + \cdots + C_n X_n(t) + x_p(t), \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$

注：$X_1, \ldots, X_n$ が I 上で 1 次独立であるとは

$$C_1 X_1(t) + \cdots + C_n X_n(t) \equiv 0 \quad \text{on } I \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = \cdots = C_n = 0$$

定数係数高階線型 ODE

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \qquad (7)$$

解き方（(7) の一般解を求める）:(D) より従う

- まず，斉次 ODE の n 個の 1 次独立な解を見つける $\rightarrow$ $X_1, \ldots, X_n$
- 次に，非斉次 ODE の一つの解を見つける $\rightarrow$ x_p

$\Rightarrow$ 一般解は $\quad x(t) = C_1X_1(t) + \cdots + C_nX_n(t) + x_p(t), \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$

注：$X_1, \ldots, X_n$ が I 上で 1 次独立であるとは

$$C_1X_1(t) + \cdots + C_nX_n(t) \equiv 0 \quad \text{on } I \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = \cdots = C_n = 0$$

定数係数高階線型 ODE

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \qquad (7)$$

解き方（(7) の一般解を求める）:(D) より従う

- まず，斉次 ODE の n 個の 1 次独立な解を見つける $\rightarrow$ $X_1, \ldots, X_n$
- 次に，非斉次 ODE の一つの解を見つける $\rightarrow$ x_p

$\Rightarrow$ 一般解は $\quad x(t) = C_1X_1(t) + \cdots + C_nX_n(t) + x_p(t), \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$

注：$X_1, \ldots, X_n$ が I 上で 1 次独立であるとは

$$C_1X_1(t) + \cdots + C_nX_n(t) \equiv 0 \quad \text{on } I \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = \cdots = C_n = 0$$

まず，2階 ODE を考える：$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$

斉次 ODE：
$$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0 \tag{8}$$

$x = e^{\lambda t}$ と置いてみる：
$$(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \text{ が } \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \tag{9}$$

の根ならば，$x(t) = e^{\lambda t}$ は (11) の解． (9) ... 特性方程式

(a) 根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 実数のとき，(11) の一般解は

$$X(t) = C_1 \underbrace{e^{\lambda_1 t}}_{X_1(t)} + C_2 \underbrace{e^{\lambda_2 t}}_{X_2(t)}$$

(b) $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ 重根のとき

まず，2階 ODE を考える：$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$

斉次 ODE：　　$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$　　(8)

$x = e^{\lambda t}$ と置いてみる：　　$(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)e^{\lambda t} = 0$

$\Rightarrow$　　λ が　　$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$　　(9)

の根ならば，$x(t) = e^{\lambda t}$ は (11) の解.　　(9) ... 特性方程式

(a) 根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 実数のとき，(11) の一般解は

$$X(t) = C_1 \underbrace{e^{\lambda_1 t}}_{X_1(t)} + C_2 \underbrace{e^{\lambda_2 t}}_{X_2(t)}$$

(b) $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ 重根のとき

まず，2階 ODE を考える：$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$

斉次 ODE：　$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$ (8)

$x = e^{\lambda t}$ と置いてみる：　$(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)e^{\lambda t} = 0$

$\Rightarrow$　λ が　$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ (9)

の根ならば，$x(t) = e^{\lambda t}$ は (11) の解.　(9) ... 特性方程式

(a) 根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 実数のとき，(11) の一般解は

$$X(t) = C_1 \underbrace{e^{\lambda_1 t}}_{X_1(t)} + C_2 \underbrace{e^{\lambda_2 t}}_{X_2(t)}$$

(b) $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ 重根のとき

まず，2階 ODE を考える：$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$

斉次 ODE：　　$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$　　(8)

$x = e^{\lambda t}$ と置いてみる：　　$(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) e^{\lambda t} = 0$

$\Rightarrow$　　λ が　　$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$　　(9)

の根ならば，$x(t) = e^{\lambda t}$ は (11) の解.　　(9) ... 特性方程式

(a) 根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 実数のとき，(11) の一般解は

$$X(t) = C_1 \underbrace{e^{\lambda_1 t}}_{X_1(t)} + C_2 \underbrace{e^{\lambda_2 t}}_{X_2(t)}$$

(b) $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ 重根のとき

まず，2階 ODE を考える：$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$

斉次 ODE：　$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$　(8)

$x = e^{\lambda t}$ と置いてみる：　$(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)e^{\lambda t} = 0$

$\Rightarrow$　λ が　$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$　(9)

の根ならば，$x(t) = e^{\lambda t}$ は (11) の解.　(9) ... 特性方程式

(a) 根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 実数のとき，(11) の一般解は

$$X(t) = C_1 \underbrace{e^{\lambda_1 t}}_{X_1(t)} + C_2 \underbrace{e^{\lambda_2 t}}_{X_2(t)}$$

(b) $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ 重根のとき

まず，2階 ODE を考える：$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$

斉次 ODE：　　$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$　　(8)

$x = e^{\lambda t}$ と置いてみる：　　$(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) e^{\lambda t} = 0$

$\Rightarrow$　　λ が　　$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$　　(9)

の根ならば，$x(t) = e^{\lambda t}$ は (11) の解.　　(9) ... 特性方程式

(a) 根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 実数のとき，(11) の一般解は

$$X(t) = C_1 \underbrace{e^{\lambda_1 t}}_{x_1(t)} + C_2 \underbrace{e^{\lambda_2 t}}_{x_2(t)}$$

(b) $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ 重根のとき

まず，2階 ODE を考える：$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$

斉次 ODE：　$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$　(8)

$x = e^{\lambda t}$ と置いてみる：　$(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)e^{\lambda t} = 0$

$\Rightarrow$　λ が　$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$　(9)

の根ならば，$x(t) = e^{\lambda t}$ は (11) の解.　(9) ... 特性方程式

(a) 根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 実数のとき，(11) の一般解は

$$X(t) = C_1 \underbrace{e^{\lambda_1 t}}_{x_1(t)} + C_2 \underbrace{e^{\lambda_2 t}}_{x_2(t)}$$

(b) $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ 重根のとき

まず，2階ODEを考える：$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$

斉次ODE：
$$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0 \tag{10}$$

(b) $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ 重根のとき

$$\begin{aligned}
x'' - 2\alpha x' + \alpha^2 x &= 0 \qquad e^{-\alpha t}\text{を両辺にかける} \\
x'' e^{-\alpha t} - 2\alpha x' e^{-\alpha t} + \alpha^2 x e^{-\alpha t} &= 0 \\
(x e^{-\alpha t})'' &= 0 \\
x e^{-\alpha t} &= C_1 + C_2 t \\
x(t) &= C_1 \underbrace{e^{\alpha t}}_{x_1} + C_2 \underbrace{t e^{\alpha t}}_{x_2}
\end{aligned}$$

まず，2階 ODE を考える：$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$

斉次 ODE：
$$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0 \tag{10}$$

(b) $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ 重根のとき

$$\begin{aligned}
x'' - 2\alpha x' + \alpha^2 x &= 0 \qquad e^{-\alpha t} \text{を両辺にかける} \\
x'' e^{-\alpha t} - 2\alpha x' e^{-\alpha t} + \alpha^2 x e^{-\alpha t} &= 0 \\
(x e^{-\alpha t})'' &= 0 \\
x e^{-\alpha t} &= C_1 + C_2 t \\
x(t) &= C_1 \underbrace{e^{\alpha t}}_{x_1} + C_2 \underbrace{t e^{\alpha t}}_{x_2}
\end{aligned}$$

まず，2階 ODE を考える：$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$

斉次 ODE：
$$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0 \tag{11}$$

(c) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \beta \neq 0$ のとき

$x(t) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t}$ は一般解

実数解がほしいとき，$X_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}$ と $X_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}$ の1次結合を考える：

$$\begin{aligned} X_1 &= e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) \\ X_2 &= e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(X_1 + X_2) &= e^{\alpha t}\cos\beta t \\ \tfrac{1}{2i}(X_1 - X_2) &= e^{\alpha t}\sin\beta t \end{aligned}\right\} \text{ 1次独立な実数解}$$

まず，2階 ODE を考える：$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$

斉次 ODE：　　$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$　　(11)

(c) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \beta \neq 0$ のとき

$x(t) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t}$　は一般解

実数解がほしいとき，$X_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}$ と $X_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}$ の1次結合を考える：

$$\begin{aligned} X_1 &= e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) \\ X_2 &= e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(X_1 + X_2) &= e^{\alpha t}\cos\beta t \\ \tfrac{1}{2i}(X_1 - X_2) &= e^{\alpha t}\sin\beta t \end{aligned}\right\} \quad 1\text{次独立な実数解}$$

まず，2階 ODE を考える：$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$

斉次 ODE：　　$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$　　(11)

(c) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \ \beta \neq 0$ のとき

$x(t) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t}$　は一般解

実数解がほしいとき，$X_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}$ と $X_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}$ の
1 次結合を考える：

$$\begin{aligned} X_1 &= e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) \\ X_2 &= e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(X_1 + X_2) &= e^{\alpha t}\cos\beta t \\ \tfrac{1}{2i}(X_1 - X_2) &= e^{\alpha t}\sin\beta t \end{aligned}\right\} \quad 1\text{ 次独立な実数解}$$

まず，2階 ODE を考える：$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$

斉次 ODE：
$$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0 \tag{11}$$

(c) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \ \beta \neq 0$ のとき

$x(t) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t}$ は一般解

実数解がほしいとき，$X_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}$ と $X_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}$ の
1 次結合を考える：

$$\begin{aligned} X_1 &= e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) \\ X_2 &= e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(X_1 + X_2) &= e^{\alpha t}\cos\beta t \\ \tfrac{1}{2i}(X_1 - X_2) &= e^{\alpha t}\sin\beta t \end{aligned}\right\} \quad \text{1 次独立な実数解}$$

まず，2階ODEを考える：$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$ (*)

あとは，非斉次方程式の一つの解を見つければよい.

3つの方法

- 定数変化法：$C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t)$ の C_1, C_2 を t の関数と見て，$x_p(t) = C_1(t)X_1(t) + C_2(t)X_2(t)$ が (*) を満たすよう，$C_1(t), C_2(t)$ を決める
- コーシーの補題に基づく方法
- 当てはめ法（undetermined coefficients）：例えば，

$f(t) = C$	のとき，	$x_p =$ D の形で求めることができる
$= Ce^{kt}$		De^{kt}
$= C_1 + C_2 t$		$D_1 + D_2 t$
$= C_1 + C_2 t + C_3 t^2$		$D_1 + D_2 t + D_3 t^2$

まず，2階 ODE を考える：$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$ (*)

あとは，非斉次方程式の一つの解を見つければよい．

3 つの方法

- 定数変化法：$C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t)$ の C_1, C_2 を t の関数と見て，$x_p(t) = C_1(t)X_1(t) + C_2(t)X_2(t)$ が (*) を満たすよう，$C_1(t), C_2(t)$ を決める
- コーシーの補題に基づく方法
- 当てはめ法（undetermined coefficients）：例えば，

$f(t) = C$	のとき，	$x_p =$ D の形で求めることができる
$= Ce^{kt}$		De^{kt}
$= C_1 + C_2 t$		$D_1 + D_2 t$
$= C_1 + C_2 t + C_3 t^2$		$D_1 + D_2 t + D_3 t^2$

まず，2階ODEを考える：$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$ (*)

あとは，非斉次方程式の一つの解を見つければよい．

3つの方法

- 定数変化法：$C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t)$ の C_1, C_2 を t の関数と見て，$x_p(t) = C_1(t)X_1(t) + C_2(t)X_2(t)$ が (*) を満たすよう，$C_1(t), C_2(t)$ を決める
- コーシーの補題に基づく方法
- 当てはめ法（undetermined coefficients）：例えば，

$f(t) = C$	のとき，	$x_p =$ D の形で求めることができる
$= Ce^{kt}$		De^{kt}
$= C_1 + C_2 t$		$D_1 + D_2 t$
$= C_1 + C_2 t + C_3 t^2$		$D_1 + D_2 t + D_3 t^2$

まず，2階ODEを考える：$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$ (*)

あとは，非斉次方程式の一つの解を見つければよい.

3つの方法

- 定数変化法：$C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t)$ の C_1, C_2 を t の関数と見て，$x_p(t) = C_1(t)X_1(t) + C_2(t)X_2(t)$ が (*) を満たすよう，$C_1(t), C_2(t)$ を決める
- コーシーの補題に基づく方法
- 当てはめ法（undetermined coefficients）：例えば，

$f(t)$	$= C$ のとき，	$x_p =$	D の形で求めることができる
	$= Ce^{kt}$		De^{kt}
	$= C_1 + C_2 t$		$D_1 + D_2 t$
	$= C_1 + C_2 t + C_3 t^2$		$D_1 + D_2 t + D_3 t^2$

例： $x'' + 3x' + 2x = e^{2t}$ の一般解を求める

- 斉次 ODE $x'' + 3x' + 2x = 0$ の一般解：
  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ の根は $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ より

$$X(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

- 非斉次 ODE の一つの解：$x_p(t) = ae^{2t}$ の形で求める
  ODE に代入：
  $x_p'' + 3x_p' + 2x_p = (4a + 6a + 2a)e^{2t} = 12ae^{2t} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{12}$

答え：一般解は

$$x(t) = X(t) + x_p(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{12} e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

例： $x'' + 3x' + 2x = e^{2t}$ の一般解を求める

- 斉次 ODE $x'' + 3x' + 2x = 0$ の一般解：
  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ の根は $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ より

$$X(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

- 非斉次 ODE の一つの解：$x_p(t) = ae^{2t}$ の形で求める
  ODE に代入：
  $x_p'' + 3x_p' + 2x_p = (4a + 6a + 2a)e^{2t} = 12ae^{2t} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{12}$

答え：一般解は

$$x(t) = X(t) + x_p(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{12} e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

例： $x'' + 3x' + 2x = e^{2t}$ の一般解を求める

- 斉次 ODE $x'' + 3x' + 2x = 0$ の一般解：
  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ の根は $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ より

$$X(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

- 非斉次 ODE の一つの解：$x_p(t) = ae^{2t}$ の形で求める
  ODE に代入：
  $x_p'' + 3x_p' + 2x_p = (4a + 6a + 2a)e^{2t} = 12ae^{2t} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{12}$

答え：一般解は

$$x(t) = X(t) + x_p(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{12} e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

例： $x'' + 3x' + 2x = e^{2t}$ の一般解を求める

- 斉次 ODE $x'' + 3x' + 2x = 0$ の一般解：
  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ の根は $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ より

$$X(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

- 非斉次 ODE の一つの解：$x_p(t) = ae^{2t}$ の形で求める
  ODE に代入：
  $x_p'' + 3x_p' + 2x_p = (4a + 6a + 2a)e^{2t} = 12ae^{2t} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{12}$

答え：一般解は

$$x(t) = X(t) + x_p(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{12} e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

例： $x'' + 3x' + 2x = e^{2t}$ の一般解を求める

- 斉次 ODE $x'' + 3x' + 2x = 0$ の一般解：
  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ の根は $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ より

$$X(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

- 非斉次 ODE の一つの解：$x_p(t) = ae^{2t}$ の形で求める
  ODE に代入：
  $x_p'' + 3x_p' + 2x_p = (4a + 6a + 2a)e^{2t} = 12ae^{2t} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{12}$

答え：一般解は

$$x(t) = X(t) + x_p(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{12} e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

一般の階数の ODE を考える

演算子 $D = \frac{d}{dt}$ を用いて書き直すと便利：

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t)$$

$$D^n x + a_1 D^{n-1} x + \cdots + a_n x = f(t)$$

$$P(D)x = (\underbrace{D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n}_{\text{微分多項式}})x = f(t)$$

普通の多項式のように，和・差・積の計算ができる．

いくつかの例：

(1) $(D - \alpha)x = 0$

一般の階数の ODE を考える

演算子 $D = \frac{d}{dt}$ を用いて書き直すと便利：

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t)$$
$$D^n x + a_1 D^{n-1} x + \cdots + a_n x = f(t)$$
$$P(D)x = (\underbrace{D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n}_{\text{微分多項式}})x = f(t)$$

普通の多項式のように，和・差・積の計算ができる．

いくつかの例：

(1) $(D - \alpha)x = 0$

一般の階数の ODE を考える

演算子 $D = \frac{d}{dt}$ を用いて書き直すと便利：

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t)$$
$$D^n x + a_1 D^{n-1} x + \cdots + a_n x = f(t)$$
$$P(D)x = (\underbrace{D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n}_{\text{微分多項式}})x = f(t)$$

普通の多項式のように，和・差・積の計算ができる.

いくつかの例：

(1) $(D - \alpha)x = 0$

一般の階数の ODE を考える

演算子 $D = \frac{d}{dt}$ を用いて書き直すと便利：

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t)$$
$$D^n x + a_1 D^{n-1} x + \cdots + a_n x = f(t)$$
$$P(D)x = (\underbrace{D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n}_{\text{微分多項式}})x = f(t)$$

普通の多項式のように，和・差・積の計算ができる.

いくつかの例：

(1) $(D - \alpha)x = 0$

一般の階数の ODE を考える

いくつかの例：

(1) $(D-\alpha)x = 0$

$\frac{dx}{dt} - \alpha x = 0$ だから $x = Ce^{\alpha t}$

別の見方：$e^{-\alpha t}$ をかける：

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t}(D-\alpha)x &= 0 \\ D\left(e^{-\alpha t}x\right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha t}x = C \end{aligned}$$

$$D(e^{-\alpha t}x) = -\alpha e^{-\alpha t}x + e^{-\alpha t}Dx = e^{-\alpha t}(D-\alpha)x$$

これは一般化できる：

$$P(D)\left(e^{-\alpha t}x\right) = e^{-\alpha t}P(D-\alpha)x$$

($D^n(e^{-\alpha t}x)$ に対して示せばよい)

一般の階数の ODE を考える

いくつかの例：

(1) $(D-\alpha)x = 0$

$\frac{dx}{dt} - \alpha x = 0$ だから $x = Ce^{\alpha t}$

別の見方：$e^{-\alpha t}$ をかける：

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t}(D-\alpha)x &= 0 \\ D\left(e^{-\alpha t}x\right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha t}x = C \end{aligned}$$

$$D(e^{-\alpha t}x) = -\alpha e^{-\alpha t}x + e^{-\alpha t}Dx = e^{-\alpha t}(D-\alpha)x$$

これは一般化できる：

$$P(D)\left(e^{-\alpha t}x\right) = e^{-\alpha t}P(D-\alpha)x$$

($D^n(e^{-\alpha t}x)$ に対して示せばよい)

一般の階数の ODE を考える

いくつかの例：

(1) $(D-\alpha)x = 0$

$\frac{dx}{dt} - \alpha x = 0$ だから $x = Ce^{\alpha t}$

別の見方：$e^{-\alpha t}$ をかける：

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t}(D-\alpha)x &= 0 \\ D\left(e^{-\alpha t}x\right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha t}x = C \end{aligned}$$

$$D(e^{-\alpha t}x) = -\alpha e^{-\alpha t}x + e^{-\alpha t}Dx = e^{-\alpha t}(D-\alpha)x$$

これは一般化できる：

$$P(D)\left(e^{-\alpha t}x\right) = e^{-\alpha t}P(D-\alpha)x$$

($D^n(e^{-\alpha t}x)$ に対して示せばよい)

一般の階数の ODE を考える

いくつかの例：

(1) $(D-\alpha)x = 0$

$\frac{dx}{dt} - \alpha x = 0$ だから $x = Ce^{\alpha t}$

別の見方：$e^{-\alpha t}$ をかける：

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t}(D-\alpha)x &= 0 \\ D\left(e^{-\alpha t}x\right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha t}x = C \end{aligned}$$

$$D(e^{-\alpha t}x) = -\alpha e^{-\alpha t}x + e^{-\alpha t}Dx = e^{-\alpha t}(D-\alpha)x$$

これは一般化できる：

$$P(D)\left(e^{-\alpha t}x\right) = e^{-\alpha t}P(D-\alpha)x$$

($D^n(e^{-\alpha t}x)$ に対して示せばよい)

一般の階数の ODE を考える

いくつかの例：

(1) $(D-\alpha)x = 0$

$\frac{dx}{dt} - \alpha x = 0$ だから $x = Ce^{\alpha t}$

別の見方：$e^{-\alpha t}$ をかける：

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t}(D-\alpha)x &= 0 \\ D\left(e^{-\alpha t}x\right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha t}x = C \end{aligned}$$

$$D(e^{-\alpha t}x) = -\alpha e^{-\alpha t}x + e^{-\alpha t}Dx = e^{-\alpha t}(D-\alpha)x$$

これは一般化できる：

$$P(D)\left(e^{-\alpha t}x\right) = e^{-\alpha t}P(D-\alpha)x$$

($D^n(e^{-\alpha t}x)$ に対して示せばよい)

一般の階数の ODE を考える

いくつかの例：

(1) $(D-\alpha)x = 0$

$\frac{dx}{dt} - \alpha x = 0$ だから $x = Ce^{\alpha t}$

別の見方：$e^{-\alpha t}$ をかける：

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t}(D-\alpha)x &= 0 \\ D\left(e^{-\alpha t}x\right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha t}x = C \end{aligned}$$

$$D(e^{-\alpha t}x) = -\alpha e^{-\alpha t}x + e^{-\alpha t}Dx = e^{-\alpha t}(D-\alpha)x$$

これは一般化できる：

$$P(D)\left(e^{-\alpha t}x\right) = e^{-\alpha t}P(D-\alpha)x$$

($D^n(e^{-\alpha t}x)$ に対して示せばよい)

一般の階数の ODE を考える

いくつかの例：

(2) $\underline{(D-\alpha)^n x = 0}$

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t}(D-\alpha)^n x &= 0 \\ D^n\left(e^{-\alpha t}x\right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha t}x = C_1 + C_2 t + \cdots + C_n t^{n-1} \end{aligned}$$

$$x(t) = \left(C_1 + C_2 t + \cdots + C_n t^{n-1}\right) e^{\alpha t}$$

2 階の (b) のケースに対応：$(D-\alpha)^2 x = x'' - 2\alpha x' + \alpha^2 x = 0$

一般の階数の ODE を考える

いくつかの例：

(2) $\underline{(D-\alpha)^n x = 0}$

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t}(D-\alpha)^n x &= 0 \\ D^n\left(e^{-\alpha t}x\right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha t}x = C_1 + C_2 t + \cdots + C_n t^{n-1} \end{aligned}$$

$$x(t) = \left(C_1 + C_2 t + \cdots + C_n t^{n-1}\right) e^{\alpha t}$$

2 階の (b) のケースに対応：$(D-\alpha)^2 x = x'' - 2\alpha x' + \alpha^2 x = 0$

一般の階数の ODE を考える

いくつかの例：

(2) $\underline{(D-\alpha)^n x = 0}$

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t}(D-\alpha)^n x &= 0 \\ D^n\left(e^{-\alpha t}x\right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha t}x = C_1 + C_2 t + \cdots + C_n t^{n-1} \end{aligned}$$

$$x(t) = \left(C_1 + C_2 t + \cdots + C_n t^{n-1}\right) e^{\alpha t}$$

2 階の (b) のケースに対応：$(D-\alpha)^2 x = x'' - 2\alpha x' + \alpha^2 x = 0$

一般の階数の ODE を考える

(3) $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$ （2 階の (a) のケース）

任意の関数 x に対して，
$$x = \underbrace{\frac{D-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}x}_{x_2} + \underbrace{\frac{D-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}x}_{x_1}$$

x が ODE の解なら，

$$(D-\lambda_1)x_1 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = 0$$

$$(D-\lambda_2)x_2 = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = 0$$

よって，
$$x(t) = x_1 + x_2 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

定理（一般化）

P, Q を互いに素な多項式とする．そのとき，ODE

$$P(D)Q(D)x = 0$$

の解 $x(t)$ は次の形で一意的に分解される：

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \qquad P(D)x_1 = 0,\ \ Q(D)x_2 = 0.$$

一般の階数の ODE を考える

(3) $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$ （2 階の (a) のケース）

任意の関数 x に対して，

$$x = \underbrace{\frac{D-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}x}_{x_2} + \underbrace{\frac{D-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}x}_{x_1}$$

x が ODE の解なら，

$$(D-\lambda_1)x_1 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = 0$$

$$(D-\lambda_2)x_2 = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = 0$$

よって，$x(t) = x_1 + x_2 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

定理（一般化）

P, Q を互いに素な多項式とする．そのとき，ODE

$$P(D)Q(D)x = 0$$

の解 $x(t)$ は次の形で一意的に分解される：

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \qquad P(D)x_1 = 0,\ \ Q(D)x_2 = 0.$$

一般の階数の ODE を考える

(3) $\underline{(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2}$ （2 階の (a) のケース）

任意の関数 x に対して，
$$x = \underbrace{\frac{D-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}x}_{x_2} + \underbrace{\frac{D-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}x}_{x_1}$$

x が ODE の解なら，

$$(D-\lambda_1)x_1 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = 0$$
$$(D-\lambda_2)x_2 = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = 0$$

よって，
$$x(t) = x_1 + x_2 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

定理（一般化）

P, Q を互いに素な多項式とする．そのとき，ODE

$$P(D)Q(D)x = 0$$

の解 $x(t)$ は次の形で一意的に分解される：

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \qquad P(D)x_1 = 0,\ \ Q(D)x_2 = 0.$$

一般の階数の ODE を考える

(3) $\underline{(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2}$ （2 階の (a) のケース）

任意の関数 x に対して，
$$x = \underbrace{\frac{D-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}x}_{x_2} + \underbrace{\frac{D-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}x}_{x_1}$$

x が ODE の解なら，

$$(D-\lambda_1)x_1 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = 0$$
$$(D-\lambda_2)x_2 = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = 0$$

よって，
$$x(t) = x_1 + x_2 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

定理（一般化）

P, Q を互いに素な多項式とする．そのとき，ODE

$$P(D)Q(D)x = 0$$

の解 $x(t)$ は次の形で一意的に分解される：

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \qquad P(D)x_1 = 0,\ \ Q(D)x_2 = 0.$$

一般の階数の ODE を考える

(3) $\underline{(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2}$　（2 階の (a) のケース）

任意の関数 x に対して，

$$x = \underbrace{\frac{D-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}x}_{x_2} + \underbrace{\frac{D-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}x}_{x_1}$$

x が ODE の解なら，

$$(D-\lambda_1)x_1 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = 0$$

$$(D-\lambda_2)x_2 = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = 0$$

よって，　$x(t) = x_1 + x_2 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

定理（一般化）

P, Q を互いに素な多項式とする．そのとき，ODE

$$P(D)Q(D)x = 0$$

の解 $x(t)$ は次の形で一意的に分解される：

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \qquad P(D)x_1 = 0,\ \ Q(D)x_2 = 0.$$

定数係数高階線型 ODE

(4) $(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)x = 0$　　（一般の斉次 ODE）

レポート

今回の講義のレポート問題を解いて，提出して下さい.
（詳しいことは PandA の「手紙 05」を参照すること.）

「解答付き問題」のファイルで他の例題を紹介しています.

微分積分学続論 II： 第 6 回

Karel Svadlenka

2020 年 5 月 14 日

■定数係数高階線型 ODE：いくつかの例

(1) $\underline{(D-\alpha)x=0}$： $e^{-\alpha t}$ をかける　　演算子 $D=\frac{d}{dt}$

$$P(D)\left(e^{-\alpha t}x\right)=e^{-\alpha t}P(D-\alpha)x$$

(2) $\underline{(D-\alpha)^n x=0}$： $e^{-\alpha t}(D-\alpha)^n x=D^n\left(e^{-\alpha t}x\right)=0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha t}x=C_1+C_2t+\cdots+C_nt^{n-1}$

(3) $\underline{(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x=0,\ \lambda_1\neq\lambda_2}$

P,Q を互いに素な多項式とする．そのとき，ODE

$$P(D)Q(D)x=0$$

の解 $x(t)$ は次の形で一意的に分解される：

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t), \qquad P(D)x_1=0,\ \ Q(D)x_2=0.$$

(4) $\underline{(D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_n)x=0}$

■定数係数高階線型 ODE

(4) $\underline{(D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_n)x=0}$

$P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$ の因数分解：

$$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r} \qquad (\lambda_1,\ldots,\lambda_r\text{互いに素な複素数})$$

定理を $P_1(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_{r-1})^{m_{r-1}}, Q_1(\lambda)=(\lambda-\lambda_r)^{m_r}$ に適用 $\Rightarrow$ 解は $P_1(D)x_1=0$ と $Q_1(D)x_2=0$ の解の和で一意的に決まる．

これを繰り返すことで，方程式の解は

$$x=x_1+\cdots+x_r, \qquad \text{ただし} \quad (D-\lambda_1)^{m_1}x_1=0,\ldots,(D-\lambda_r)^{m_r}x_r=0$$

$$x=(C_1^1+C_2^1t+\cdots+C_m^1t^{m_1-1})e^{\lambda_1 t}+\cdots+(C_1^r+C_2^rt+\cdots+C_{m_r}^rt^{m_r-1})e^{\lambda_r t}$$

複素根が現れる場合，2 階 ODE のように，$e^{(\alpha+i\beta)t}, e^{(\alpha-i\beta)t}$ を $e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$ で書きかえればよい．（重複度も等しいから OK）

■例：$x'''-3x''+x'+5x=0$

$D^3-3D^2+D+5=(D+1)(D-2-i)(D-2+i)$

$\lambda_1=-1, \lambda_2=2+i, \lambda_3=2-i$

3 つの独立な解： $e^{-t}, e^{(2+i)t}, e^{(2-i)t}$

3 つの独立な実数解： $e^{-t}, e^{2t}\cos t, e^{2t}\sin t$

一般解： $x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}\cos t + C_3e^{2t}\sin t, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

■非斉次 ODE

一つの解を見つければよい

(1) 定数変化法
(2) "$\frac{1}{P(D)}$"の部分分数展開
(3) 解の形を当てる

■(1) 定数変化法

$$(D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_n)x = f(t)$$

- 斉次 ODE の一般解を求める：$X(t) = C_1X_1(t) + \cdots + C_nX_n(t)$
- $C_1, \ldots, C_n$ を t の関数と見て，$C_1(t)X_1(t)+\cdots+C_n(t)X_n(t)$ が非斉次 ODE の解になるように $C_1, \ldots, C_n$ を決める．

注：自由度が n 個あるから，$C_1, \ldots, C_n$ が求まりやすいように，$(n-1)$ 個の条件を追加できる．

注：a_k が t の関数でも有効

■(1) 定数変化法

例　2 階 ODE　$x'' + a_1x' + a_2x = f(t)$ 一つの解を $x_p(t) = C_1(t)X_1(t) + C_2(t)X_2(t)$ の形で求める （ただし，X_1, X_2 は $x'' + a_1x' + a_2x = 0$ の解）

$$x_p' = \underbrace{C_1'X_1 + C_2'X_2}_{=0 \text{ となる条件をつける } (*)} + C_1X_1' + C_2X_2'$$
$$x_p'' = C_1'X_1' + C_2'X_2' + C_1X_1'' + C_2X_2''$$

2 つの条件：

- x_p が ODE を満たす：$x_p'' + a_1x_p' + a_2x_p = f$

$$C_1'X_1' + C_2'X_2' + \underbrace{C_1X_1'' + C_2X_2'' + a_1(C_1X_1' + C_2X_2') + a_2(C_1X_1 + C_2X_2)}_{=0} = f$$

- $(*)$ の条件：$C_1'X_1 + C_2'X_2 = 0$

注：一般の場合はテキスト 57 頁

■例： $x'' + 3x' + 2x = e^{2t}$

- 斉次 ODE の解：$X_1(t) = e^{-t}, X_2(t) = e^{-2t}$
- 一つの解を $x_p(t) = C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{-2t}$ の形で求める

$$C_1'X_1' + C_2'X_2' = -C_1'e^{-t} - 2C_2'e^{-2t} = e^{2t}$$
$$C_1'X_1 + C_2'X_2 = C_1'e^{-t} - +C_2'e^{-2t} = 0$$

より

$$C_1' = e^{3t} \quad C_1(t) = \frac{1}{3}e^{3t}$$
$$C_2' = -e^{4t} C_2(t) = -\frac{1}{4}e^{-4t}$$

$$x_p(t) = \frac{1}{3}e^{3t}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{4t}e^{-2t} = \frac{1}{12}e^{2t}$$

■(2) "$\frac{1}{P(D)}$"の部分分数展開

$P(D)x = f$ の ODE で $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ と因数分解する.

$$\frac{1}{P(\lambda)} = \frac{h_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{m_1}} + \frac{h_2(\lambda)}{(\lambda - \lambda_2)^{m_2}} + \cdots + \frac{h_r(\lambda)}{(\lambda - \lambda_r)^{m_r}}$$

となる $h_1, \ldots, h_r$ が存在する（一意），h_k ... 高々 $(m_k - 1)$ 次多項式.

$$x(t) = "\frac{1}{P(D)}" f(t) = h_1(D)\frac{1}{(D-\lambda_1)^{m_1}}f(t) + \cdots + h_r(D)\frac{1}{(D-\lambda_r)^{m_r}}f(t)$$

が $P(D)x = f$ を満たすことが示せる（テキスト 65 頁）.

ただし，$\frac{1}{(D-\lambda_i)^{m_i}}f(t)$ は $(D-\lambda_i)^{m_i}y = f(t)$ の解 y である： 両辺に $e^{-\lambda_i t}$ をかけて，

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_i t}(D-\lambda_i)^{m_i}y &= e^{-\lambda_i t}f(t) \\ D^{m_i}(e^{-\lambda_i t}y) &= e^{-\lambda_i t}f(t) \\ y(t) &= e^{\lambda_i t}\underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\cdots\int_{t_0}^{t_{m_i-1}}}_{m_i\text{回積分}} e^{-\lambda_i t_{m_i}} f(t_{m_i})\, dt_{m_i}\, dt_{m_i-1}\ldots dt_1 \end{aligned}$$

■(2) "$\frac{1}{P(D)}$"の部分分数展開

この m 回積分を 1 回の積分で書く：

コーシーの補題

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\cdots\int_{t_0}^{t_{m-1}} g(t_m)\, dt_m\, dt_{m-1}\ldots dt_1 = \int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}g(s)\, ds$$

証明：帰納法

例 $x'' + 3x' + 2x = e^{2t}$ $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda+1)$

$$\frac{1}{P(\lambda)} = \frac{-1}{\lambda+2} + \frac{1}{\lambda+1}, \qquad h_1(D) = -1, \;\; h_2(D) = 1$$

$$x_p(t) = (-1)\underbrace{\frac{1}{D+2}e^{2t}}_{e^{-2t}\int_{t_0}^{t} e^{2t_1}e^{2t_1}\,dt_1} + \underbrace{\frac{1}{D+1}e^{2t}}_{e^{-t}\int_{t_0}^{t} e^{t_1}e^{2t_1}\,dt_1} = \frac{1}{12}e^{2t} + C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$$

■解の形を当てる（係数の値を除いて）

前の 2 つの方法では計算が大変だから，右辺 f が多項式，指数関数，$\sin, \cos$ の組み合わせのときは当てはめ法を用いる．

例　$D^n x + a_1 D^{n-1} x + \cdots + a_{n-1} Dx + a_n x = C$ （定数）

- $a_n \neq 0$ ならば $x(t) = \frac{C}{a_n}$（定数関数）は解
- $a_n = 0, a_{n-1} \neq 0$ ならば $x(t) = \frac{C}{a_{n-1}} t$ は解

$$\vdots$$

■解の形を当てる

例　$P(D)x = t^m$ 具体例でアイデアを見る：$-x'' + x = t^5$

$$(1 - D^2)x = t^5$$
$$(1 - D^2)(1 + D^2 + D^4 + \cdots + D^{2k}) = 1 - D^{2k+2}$$
$$(1 - D^2)(1 + D^2 + D^4 + \cdots + D^{2k})t^5 = (1 - D^{2k+2})t^5$$

$k = 2$ とすると，

$$(1 - D^2) \underbrace{(1 + D^2 + D^4)t^5}_{\text{ODE の解}} = (1 - D^6)t^5 = t^5$$

より，$x_p(t) = (1 + D^2 + D^4)t^5 = t^5 + 20t^3 + 120t$ は一つの解．

■解の形を当てる

例　$P(D)x = t^m$

- $\underline{P(0) \neq 0 \text{ のとき}}$：$P(0) = 1$ としてよい

$$\Rightarrow \quad P(\lambda) = 1 - \lambda Q(\lambda) \quad \text{と書ける（}Q \text{ は多項式）}$$
$$(1 - \lambda Q(\lambda))(1 + \lambda Q(\lambda) + \lambda^2 Q^2(\lambda) + \cdots + \lambda^m Q^m(\lambda)) = 1 - \lambda^{m+1} Q^{m+1}(\lambda)$$

より（λ を D で置き換えて）

$$\underbrace{(1 - DQ(D))}_{P(D)}(1 + DQ(D) + \cdots + D^m Q^m(D))t^m = t^m$$

（$D^{m+1} Q^{m+1}(D)t^m = 0$ より）．よって，

$$x_p(t) = (1 + DQ(D) + \cdots + D^m Q^m(D))t^m \qquad \text{は一つの解}$$

- $\underline{P(0) = 0 \text{ のとき}}$ ： $P(D)x = \widetilde{P}(D)(D^q x)$, $\widetilde{P}(0) \neq 0$ となる $\widetilde{P}$, $q \in \mathbb{N}$ がある．

$$\Rightarrow \qquad \widetilde{P}(D)y = t^m \qquad \text{を解いて，} y(t) \text{ を } q \text{ 回積分すればよい}$$

■解の形を当てる

例　$x''' + x' = t^2$

$$(D^2+1)(\underbrace{Dx}_{=y}) = t^2$$

$$1 + D^2 = 1 - D(\underbrace{-D}_{=Q(D)})$$

$$(1+D^2)(1-D^2+D^4)t^2 = (1+D^6)t^2 = t^2$$

$$\Rightarrow \quad y = (1-D^2+D^4)t^2 = t^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}t^3 - 2t$$

微分積分学続論 II： 第 6 回

Karel Svadlenka

京都大学大学院理学研究科 数学教室

2020 年 5 月 14 日

定数係数高階線型 ODE：いくつかの例

(1) $(D-\alpha)x=0$：　$e^{-\alpha t}$ をかける

演算子 $D=\frac{d}{dt}$

$$P(D)\left(e^{-\alpha t}x\right)=e^{-\alpha t}P(D-\alpha)x$$

(2) $(D-\alpha)^n x=0$：　$e^{-\alpha t}(D-\alpha)^n x=D^n\left(e^{-\alpha t}x\right)=0$

$\Rightarrow$　$e^{-\alpha t}x=C_1+C_2t+\cdots+C_nt^{n-1}$

(3) $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x=0,\ \lambda_1\neq\lambda_2$

P,Q を互いに素な多項式とする．そのとき，ODE

$$P(D)Q(D)x=0$$

の解 $x(t)$ は次の形で一意的に分解される：

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t),\qquad P(D)x_1=0,\ \ Q(D)x_2=0.$$

(4) $(D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_n)x=0$

定数係数高階線型 ODE：いくつかの例

(1) $(D-\alpha)x=0$：　$e^{-\alpha t}$ をかける

演算子 $D=\frac{d}{dt}$

$$P(D)\left(e^{-\alpha t}x\right)=e^{-\alpha t}P(D-\alpha)x$$

(2) $(D-\alpha)^n x=0$：　$e^{-\alpha t}(D-\alpha)^n x=D^n\left(e^{-\alpha t}x\right)=0$

$\Rightarrow$　$e^{-\alpha t}x=C_1+C_2t+\cdots+C_nt^{n-1}$

(3) $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x=0,\ \lambda_1\neq\lambda_2$

P,Q を互いに素な多項式とする．そのとき，ODE

$$P(D)Q(D)x=0$$

の解 $x(t)$ は次の形で一意的に分解される：

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t),\qquad P(D)x_1=0,\ \ Q(D)x_2=0.$$

(4) $(D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_n)x=0$

定数係数高階線型 ODE：いくつかの例

(1) $(D-\alpha)x=0$：　$e^{-\alpha t}$ をかける

演算子 $D=\frac{d}{dt}$

$$P(D)\left(e^{-\alpha t}x\right)=e^{-\alpha t}P(D-\alpha)x$$

(2) $(D-\alpha)^n x=0$：　$e^{-\alpha t}(D-\alpha)^n x=D^n\left(e^{-\alpha t}x\right)=0$

$\Rightarrow$　$e^{-\alpha t}x=C_1+C_2t+\cdots+C_nt^{n-1}$

(3) $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x=0,\ \lambda_1\neq\lambda_2$

P,Q を互いに素な多項式とする．そのとき，ODE

$$P(D)Q(D)x=0$$

の解 $x(t)$ は次の形で一意的に分解される：

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t),\qquad P(D)x_1=0,\ \ Q(D)x_2=0.$$

(4) $(D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_n)x=0$

定数係数高階線型 ODE：いくつかの例

(1) $(D-\alpha)x=0$：　$e^{-\alpha t}$ をかける

演算子 $D=\frac{d}{dt}$

$$P(D)\left(e^{-\alpha t}x\right)=e^{-\alpha t}P(D-\alpha)x$$

(2) $(D-\alpha)^n x=0$：　$e^{-\alpha t}(D-\alpha)^n x=D^n\left(e^{-\alpha t}x\right)=0$

$\Rightarrow$　$e^{-\alpha t}x=C_1+C_2t+\cdots+C_nt^{n-1}$

(3) $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x=0,\ \lambda_1\neq\lambda_2$

P,Q を互いに素な多項式とする．そのとき，ODE

$$P(D)Q(D)x=0$$

の解 $x(t)$ は次の形で一意的に分解される：

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t),\qquad P(D)x_1=0,\ \ Q(D)x_2=0.$$

(4) $(D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_n)x=0$

定数係数高階線型 ODE

(4) $\underline{(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)x = 0}$

$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ の因数分解：

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_r \text{互いに素な複素数})$$

定理を $P_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_{r-1})^{m_{r-1}}$, $Q_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ に適用
$\Rightarrow$ 解は $P_1(D)x_1 = 0$ と $Q_1(D)x_2 = 0$ の解の和で一意的に決まる.

これを繰り返すことで，方程式の解は

$$x = x_1 + \cdots + x_r, \qquad \text{ただし} \quad (D - \lambda_1)^{m_1} x_1 = 0, \ldots, (D - \lambda_r)^{m_r} x_r = 0$$

$$x = (C_1^1 + C_2^1 t + \cdots + C_m^1 t^{m_1 - 1})e^{\lambda_1 t} + \cdots + (C_1^r + C_2^r t + \cdots + C_{m_r}^r t^{m_r - 1})e^{\lambda_r t}$$

複素根が現れる場合，2 階 ODE のように，$e^{(\alpha+i\beta)t}, e^{(\alpha-i\beta)t}$ を
$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$ で書きかえればよい. (重複度も等しいから OK)

定数係数高階線型 ODE

(4) $\underline{(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)x = 0}$

$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ の因数分解：

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_r \text{互いに素な複素数})$$

定理を $P_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_{r-1})^{m_{r-1}}$, $Q_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ に適用
$\Rightarrow$ 解は $P_1(D)x_1 = 0$ と $Q_1(D)x_2 = 0$ の解の和で一意的に決まる.

これを繰り返すことで，方程式の解は

$$x = x_1 + \cdots + x_r, \qquad \text{ただし} \quad (D - \lambda_1)^{m_1} x_1 = 0, \ldots, (D - \lambda_r)^{m_r} x_r = 0$$

$$x = (C_1^1 + C_2^1 t + \cdots + C_m^1 t^{m_1 - 1})e^{\lambda_1 t} + \cdots + (C_1^r + C_2^r t + \cdots + C_{m_r}^r t^{m_r - 1})e^{\lambda_r t}$$

複素根が現れる場合，2 階 ODE のように，$e^{(\alpha+i\beta)t}, e^{(\alpha-i\beta)t}$ を
$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$ で書きかえればよい．(重複度も等しいから OK)

定数係数高階線型 ODE

(4) $\underline{(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)x = 0}$

$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ の因数分解：

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_r \text{互いに素な複素数})$$

定理を $P_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_{r-1})^{m_{r-1}}$, $Q_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ に適用
$\Rightarrow$ 解は $P_1(D)x_1 = 0$ と $Q_1(D)x_2 = 0$ の解の和で一意的に決まる.

これを繰り返すことで，方程式の解は

$$x = x_1 + \cdots + x_r, \qquad \text{ただし} \quad (D - \lambda_1)^{m_1} x_1 = 0, \ldots, (D - \lambda_r)^{m_r} x_r = 0$$

$$x = (C_1^1 + C_2^1 t + \cdots + C_m^1 t^{m_1 - 1})e^{\lambda_1 t} + \cdots + (C_1^r + C_2^r t + \cdots + C_{m_r}^r t^{m_r - 1})e^{\lambda_r t}$$

複素根が現れる場合，2 階 ODE のように，$e^{(\alpha+i\beta)t}, e^{(\alpha-i\beta)t}$ を
$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$ で書きかえればよい．（重複度も等しいから OK）

定数係数高階線型 ODE

(4) $\underline{(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)x = 0}$

$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ の因数分解：

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_r \text{互いに素な複素数})$$

定理を $P_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_{r-1})^{m_{r-1}}$, $Q_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ に適用
$\Rightarrow$ 解は $P_1(D)x_1 = 0$ と $Q_1(D)x_2 = 0$ の解の和で一意的に決まる.

これを繰り返すことで，方程式の解は

$$x = x_1 + \cdots + x_r, \qquad \text{ただし} \quad (D - \lambda_1)^{m_1} x_1 = 0, \ldots, (D - \lambda_r)^{m_r} x_r = 0$$

$$x = (C_1^1 + C_2^1 t + \cdots + C_m^1 t^{m_1 - 1})e^{\lambda_1 t} + \cdots + (C_1^r + C_2^r t + \cdots + C_{m_r}^r t^{m_r - 1})e^{\lambda_r t}$$

複素根が現れる場合，2 階 ODE のように，$e^{(\alpha+i\beta)t}, e^{(\alpha-i\beta)t}$ を
$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$ で書きかえればよい. （重複度も等しいから OK）

定数係数高階線型 ODE

(4) $\underline{(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)x = 0}$

$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ の因数分解：

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_r \text{互いに素な複素数})$$

定理を $P_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_{r-1})^{m_{r-1}}$, $Q_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ に適用
$\Rightarrow$ 解は $P_1(D)x_1 = 0$ と $Q_1(D)x_2 = 0$ の解の和で一意的に決まる.

これを繰り返すことで，方程式の解は

$$x = x_1 + \cdots + x_r, \qquad \text{ただし} \quad (D - \lambda_1)^{m_1} x_1 = 0, \ldots, (D - \lambda_r)^{m_r} x_r = 0$$

$$x = (C_1^1 + C_2^1 t + \cdots + C_m^1 t^{m_1 - 1})e^{\lambda_1 t} + \cdots + (C_1^r + C_2^r t + \cdots + C_{m_r}^r t^{m_r - 1})e^{\lambda_r t}$$

複素根が現れる場合，2 階 ODE のように，$e^{(\alpha+i\beta)t}, e^{(\alpha-i\beta)t}$ を
$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$ で書きかえればよい. （重複度も等しいから OK）

定数係数高階線型 ODE

(4) $\underline{(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)x = 0}$

$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ の因数分解：

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_r \text{互いに素な複素数})$$

定理を $P_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_{r-1})^{m_{r-1}}$, $Q_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ に適用
$\Rightarrow$ 解は $P_1(D)x_1 = 0$ と $Q_1(D)x_2 = 0$ の解の和で一意的に決まる.

これを繰り返すことで，方程式の解は

$$x = x_1 + \cdots + x_r, \qquad \text{ただし} \quad (D - \lambda_1)^{m_1} x_1 = 0, \ldots, (D - \lambda_r)^{m_r} x_r = 0$$

$$x = (C_1^1 + C_2^1 t + \cdots + C_m^1 t^{m_1 - 1})e^{\lambda_1 t} + \cdots + (C_1^r + C_2^r t + \cdots + C_{m_r}^r t^{m_r - 1})e^{\lambda_r t}$$

複素根が現れる場合，2 階 ODE のように，$e^{(\alpha+i\beta)t}, e^{(\alpha-i\beta)t}$ を
$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$ で書きかえればよい. （重複度も等しいから OK）

例：$x''' - 3x'' + x' + 5x = 0$

$$D^3 - 3D^2 + D + 5 = (D+1)(D-2-i)(D-2+i)$$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2+i, \lambda_3 = 2-i$

3 つの独立な解： $e^{-t}, e^{(2+i)t}, e^{(2-i)t}$

3 つの独立な実数解： $e^{-t}, e^{2t}\cos t, e^{2t}\sin t$

一般解： $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}\cos t + C_3 e^{2t}\sin t, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

例：$x''' - 3x'' + x' + 5x = 0$

$$D^3 - 3D^2 + D + 5 = (D+1)(D-2-i)(D-2+i)$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2+i, \lambda_3 = 2-i$$

3 つの独立な解： $e^{-t}, e^{(2+i)t}, e^{(2-i)t}$

3 つの独立な実数解： $e^{-t}, e^{2t}\cos t, e^{2t}\sin t$

一般解： $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}\cos t + C_3 e^{2t}\sin t, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

例：$x''' - 3x'' + x' + 5x = 0$

$D^3 - 3D^2 + D + 5 = (D+1)(D-2-i)(D-2+i)$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2+i, \lambda_3 = 2-i$

3 つの独立な解： $e^{-t}, e^{(2+i)t}, e^{(2-i)t}$

3 つの独立な実数解： $e^{-t}, e^{2t}\cos t, e^{2t}\sin t$

一般解： $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}\cos t + C_3 e^{2t}\sin t, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

例：$x''' - 3x'' + x' + 5x = 0$

$D^3 - 3D^2 + D + 5 = (D+1)(D-2-i)(D-2+i)$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2+i, \lambda_3 = 2-i$

3 つの独立な解： $e^{-t}, e^{(2+i)t}, e^{(2-i)t}$

3 つの独立な実数解： $e^{-t}, e^{2t}\cos t, e^{2t}\sin t$

一般解： $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}\cos t + C_3 e^{2t}\sin t, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

例：$x''' - 3x'' + x' + 5x = 0$

$D^3 - 3D^2 + D + 5 = (D+1)(D-2-i)(D-2+i)$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2+i, \lambda_3 = 2-i$

3 つの独立な解： $e^{-t}, e^{(2+i)t}, e^{(2-i)t}$

3 つの独立な実数解： $e^{-t}, e^{2t}\cos t, e^{2t}\sin t$

一般解： $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}\cos t + C_3 e^{2t}\sin t, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

非斉次 ODE

一つの解を見つければよい

(1) 定数変化法
(2) "$\frac{1}{P(D)}$" の部分分数展開
(3) 解の形を当てる

(1) 定数変化法

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)x = f(t)$$

- 斉次 ODE の一般解を求める：$X(t) = C_1 X_1(t) + \cdots + C_n X_n(t)$
- $C_1, \ldots, C_n$ を t の関数と見て，$C_1(t)X_1(t) + \cdots + C_n(t)X_n(t)$ が非斉次 ODE の解になるように $C_1, \ldots, C_n$ を決める．

注：自由度が n 個あるから，$C_1, \ldots, C_n$ が求まりやすいように，$(n-1)$ 個の条件を追加できる．

注：a_k が t の関数でも有効

(1) 定数変化法

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)x = f(t)$$

- 斉次 ODE の一般解を求める：$X(t) = C_1 X_1(t) + \cdots + C_n X_n(t)$
- $C_1, \ldots, C_n$ を t の関数と見て，$C_1(t)X_1(t) + \cdots + C_n(t)X_n(t)$ が非斉次 ODE の解になるように $C_1, \ldots, C_n$ を決める．

注：自由度が n 個あるから，$C_1, \ldots, C_n$ が求まりやすいように，$(n-1)$ 個の条件を追加できる．

注：a_k が t の関数でも有効

(1) 定数変化法

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)x = f(t)$$

- 斉次 ODE の一般解を求める：$X(t) = C_1 X_1(t) + \cdots + C_n X_n(t)$
- $C_1, \ldots, C_n$ を t の関数と見て，$C_1(t)X_1(t) + \cdots + C_n(t)X_n(t)$ が非斉次 ODE の解になるように $C_1, \ldots, C_n$ を決める.

注：自由度が n 個あるから，$C_1, \ldots, C_n$ が求まりやすいように，$(n-1)$ 個の条件を追加できる.

注：a_k が t の関数でも有効

(1) 定数変化法

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)x = f(t)$$

- 斉次 ODE の一般解を求める：$X(t) = C_1 X_1(t) + \cdots + C_n X_n(t)$
- $C_1, \ldots, C_n$ を t の関数と見て，$C_1(t)X_1(t) + \cdots + C_n(t)X_n(t)$ が非斉次 ODE の解になるように $C_1, \ldots, C_n$ を決める.

注：自由度が n 個あるから，$C_1, \ldots, C_n$ が求まりやすいように，$(n-1)$ 個の条件を追加できる.

注：a_k が t の関数でも有効

(1) 定数変化法

例　2 階 ODE　$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$

一つの解を $x_p(t) = C_1(t)X_1(t) + C_2(t)X_2(t)$ の形で求める
（ただし，X_1, X_2 は $x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$ の解）

$$x_p' = \underbrace{C_1' X_1 + C_2' X_2}_{=0 \text{ となる条件をつける (*)}} + C_1 X_1' + C_2 X_2'$$

$$x_p'' = C_1' X_1' + C_2' X_2' + C_1 X_1'' + C_2 X_2''$$

2 つの条件：

- x_p が ODE を満たす：$x_p'' + a_1 x_p' + a_2 x_p = f$

$$C_1' X_1' + C_2' X_2' + \underbrace{C_1 X_1'' + C_2 X_2'' + a_1(C_1 X_1' + C_2 X_2') + a_2(C_1 X_1 + C_2 X_2)}_{=0} = f$$

- (*) の条件：$C_1' X_1 + C_2' X_2 = 0$

注：一般の場合はテキスト 57 頁

(1) 定数変化法

例　2 階 ODE　$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$

一つの解を $x_p(t) = C_1(t)X_1(t) + C_2(t)X_2(t)$ の形で求める

（ただし，X_1, X_2 は $x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$ の解）

$$x_p' = \underbrace{C_1' X_1 + C_2' X_2}_{=0 \text{ となる条件をつける (*)}} + C_1 X_1' + C_2 X_2'$$

$$x_p'' = C_1' X_1' + C_2' X_2' + C_1 X_1'' + C_2 X_2''$$

2 つの条件：

- x_p が ODE を満たす：$x_p'' + a_1 x_p' + a_2 x_p = f$

$$C_1' X_1' + C_2' X_2' + \underbrace{C_1 X_1'' + C_2 X_2'' + a_1(C_1 X_1' + C_2 X_2') + a_2(C_1 X_1 + C_2 X_2)}_{=0} = f$$

- (*) の条件：$C_1' X_1 + C_2' X_2 = 0$

注：一般の場合はテキスト 57 頁

(1) 定数変化法

例　2 階 ODE　$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$

一つの解を $x_p(t) = C_1(t)X_1(t) + C_2(t)X_2(t)$ の形で求める

（ただし，X_1, X_2 は $x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$ の解）

$$
\begin{aligned}
x_p' &= \underbrace{C_1' X_1 + C_2' X_2}_{=0 \text{ となる条件をつける (*)}} + C_1 X_1' + C_2 X_2' \\
x_p'' &= C_1' X_1' + C_2' X_2' + C_1 X_1'' + C_2 X_2''
\end{aligned}
$$

2 つの条件：

- x_p が ODE を満たす：$x_p'' + a_1 x_p' + a_2 x_p = f$

$$
C_1' X_1' + C_2' X_2' + \underbrace{C_1 X_1'' + C_2 X_2'' + a_1(C_1 X_1' + C_2 X_2') + a_2(C_1 X_1 + C_2 X_2)}_{=0} = f
$$

- (*) の条件：$C_1' X_1 + C_2' X_2 = 0$

注：一般の場合はテキスト 57 頁

(1) 定数変化法

例　2 階 ODE　$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$

一つの解を $x_p(t) = C_1(t)X_1(t) + C_2(t)X_2(t)$ の形で求める

（ただし，X_1, X_2 は $x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$ の解）

$$\begin{aligned} x_p' &= \underbrace{C_1' X_1 + C_2' X_2}_{=0 \text{ となる条件をつける (*)}} + C_1 X_1' + C_2 X_2' \\ x_p'' &= C_1' X_1' + C_2' X_2' + C_1 X_1'' + C_2 X_2'' \end{aligned}$$

2 つの条件：

- x_p が ODE を満たす：$x_p'' + a_1 x_p' + a_2 x_p = f$

$$C_1' X_1' + C_2' X_2' + \underbrace{C_1 X_1'' + C_2 X_2'' + a_1(C_1 X_1' + C_2 X_2') + a_2(C_1 X_1 + C_2 X_2)}_{=0} = f$$

- (*) の条件：$C_1' X_1 + C_2' X_2 = 0$

注：一般の場合はテキスト 57 頁

(1) 定数変化法

例　2 階 ODE　$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$

一つの解を $x_p(t) = C_1(t)X_1(t) + C_2(t)X_2(t)$ の形で求める

（ただし，X_1, X_2 は $x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$ の解）

$$\begin{aligned} x_p' &= \underbrace{C_1' X_1 + C_2' X_2}_{=0 \text{ となる条件をつける (*)}} + C_1 X_1' + C_2 X_2' \\ x_p'' &= C_1' X_1' + C_2' X_2' + C_1 X_1'' + C_2 X_2'' \end{aligned}$$

2 つの条件：

- x_p が ODE を満たす：$x_p'' + a_1 x_p' + a_2 x_p = f$

$$C_1' X_1' + C_2' X_2' + \underbrace{C_1 X_1'' + C_2 X_2'' + a_1(C_1 X_1' + C_2 X_2') + a_2(C_1 X_1 + C_2 X_2)}_{=0} = f$$

- (*) の条件：$C_1' X_1 + C_2' X_2 = 0$

注：一般の場合はテキスト 57 頁

(1) 定数変化法

例　2 階 ODE　$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$

一つの解を $x_p(t) = C_1(t)X_1(t) + C_2(t)X_2(t)$ の形で求める

（ただし，X_1, X_2 は $x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$ の解）

$$\begin{aligned} x_p' &= \underbrace{C_1' X_1 + C_2' X_2}_{=0 \text{ となる条件をつける (*)}} + C_1 X_1' + C_2 X_2' \\ x_p'' &= C_1' X_1' + C_2' X_2' + C_1 X_1'' + C_2 X_2'' \end{aligned}$$

2 つの条件：

- x_p が ODE を満たす：$x_p'' + a_1 x_p' + a_2 x_p = f$

$$C_1' X_1' + C_2' X_2' + \underbrace{C_1 X_1'' + C_2 X_2'' + a_1(C_1 X_1' + C_2 X_2') + a_2(C_1 X_1 + C_2 X_2)}_{=0} = f$$

- (*) の条件：$C_1' X_1 + C_2' X_2 = 0$

注：一般の場合はテキスト 57 頁

例： $x'' + 3x' + 2x = e^{2t}$

- 斉次 ODE の解：$X_1(t) = e^{-t}, X_2(t) = e^{-2t}$
- 一つの解を $x_p(t) = C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{-2t}$ の形で求める

$$\begin{aligned} C_1'X_1' + C_2'X_2' = -C_1'e^{-t} - 2C_2'e^{-2t} &= e^{2t} \\ C_1'X_1 + C_2'X_2 = C_1'e^{-t} - + C_2'e^{-2t} &= 0 \end{aligned}$$

より

$$C_1' = e^{3t} \qquad C_1(t) = \frac{1}{3}e^{3t}$$

$$C_2' = -e^{4t} \qquad C_2(t) = -\frac{1}{4}e^{-4t}$$

$$x_p(t) = \frac{1}{3}e^{3t}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{4t}e^{-2t} = \frac{1}{12}e^{2t}$$

例： $x'' + 3x' + 2x = e^{2t}$

- 斉次 ODE の解：$X_1(t) = e^{-t}, X_2(t) = e^{-2t}$
- 一つの解を $x_p(t) = C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{-2t}$ の形で求める

$$\begin{aligned} C_1'X_1' + C_2'X_2' = -C_1'e^{-t} - 2C_2'e^{-2t} &= e^{2t} \\ C_1'X_1 + C_2'X_2 = C_1'e^{-t} - + C_2'e^{-2t} &= 0 \end{aligned}$$

より

$$C_1' = e^{3t} \qquad C_1(t) = \frac{1}{3}e^{3t}$$

$$C_2' = -e^{4t} \qquad C_2(t) = -\frac{1}{4}e^{-4t}$$

$$x_p(t) = \frac{1}{3}e^{3t}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{4t}e^{-2t} = \frac{1}{12}e^{2t}$$

例： $x'' + 3x' + 2x = e^{2t}$

- 斉次 ODE の解：$X_1(t) = e^{-t}, X_2(t) = e^{-2t}$
- 一つの解を $x_p(t) = C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{-2t}$ の形で求める

$$\begin{aligned} C_1'X_1' + C_2'X_2' = -C_1'e^{-t} - 2C_2'e^{-2t} &= e^{2t} \\ C_1'X_1 + C_2'X_2 = C_1'e^{-t} - +C_2'e^{-2t} &= 0 \end{aligned}$$

より

$$C_1' = e^{3t} \qquad C_1(t) = \frac{1}{3}e^{3t}$$

$$C_2' = -e^{4t} \qquad C_2(t) = -\frac{1}{4}e^{-4t}$$

$$x_p(t) = \frac{1}{3}e^{3t}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{4t}e^{-2t} = \frac{1}{12}e^{2t}$$

例： $x'' + 3x' + 2x = e^{2t}$

- 斉次 ODE の解：$X_1(t) = e^{-t}, X_2(t) = e^{-2t}$
- 一つの解を $x_p(t) = C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{-2t}$ の形で求める

$$\begin{aligned} C_1'X_1' + C_2'X_2' = -C_1'e^{-t} - 2C_2'e^{-2t} &= e^{2t} \\ C_1'X_1 + C_2'X_2 = C_1'e^{-t} - +C_2'e^{-2t} &= 0 \end{aligned}$$

より

$$C_1' = e^{3t} \qquad C_1(t) = \frac{1}{3}e^{3t}$$

$$C_2' = -e^{4t} \qquad C_2(t) = -\frac{1}{4}e^{-4t}$$

$$x_p(t) = \frac{1}{3}e^{3t}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{4t}e^{-2t} = \frac{1}{12}e^{2t}$$

例： $x'' + 3x' + 2x = e^{2t}$

- 斉次 ODE の解：$X_1(t) = e^{-t}, X_2(t) = e^{-2t}$
- 一つの解を $x_p(t) = C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{-2t}$ の形で求める

$$\begin{aligned} C_1'X_1' + C_2'X_2' = -C_1'e^{-t} - 2C_2'e^{-2t} &= e^{2t} \\ C_1'X_1 + C_2'X_2 = C_1'e^{-t} - +C_2'e^{-2t} &= 0 \end{aligned}$$

より

$$C_1' = e^{3t} \qquad C_1(t) = \frac{1}{3}e^{3t}$$

$$C_2' = -e^{4t} \qquad C_2(t) = -\frac{1}{4}e^{-4t}$$

$$x_p(t) = \frac{1}{3}e^{3t}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{4t}e^{-2t} = \frac{1}{12}e^{2t}$$

例： $x'' + 3x' + 2x = e^{2t}$

- 斉次 ODE の解：$X_1(t) = e^{-t}, X_2(t) = e^{-2t}$
- 一つの解を $x_p(t) = C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{-2t}$ の形で求める

$$\begin{aligned} C_1'X_1' + C_2'X_2' = -C_1'e^{-t} - 2C_2'e^{-2t} &= e^{2t} \\ C_1'X_1 + C_2'X_2 = C_1'e^{-t} - +C_2'e^{-2t} &= 0 \end{aligned}$$

より

$$C_1' = e^{3t} \qquad C_1(t) = \frac{1}{3}e^{3t}$$

$$C_2' = -e^{4t} \qquad C_2(t) = -\frac{1}{4}e^{-4t}$$

$$x_p(t) = \frac{1}{3}e^{3t}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{4t}e^{-2t} = \frac{1}{12}e^{2t}$$

(2) "$\frac{1}{P(D)}$" の部分分数展開

$P(D)x = f$ の ODE で $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ と因数分解する.

$$\frac{1}{P(\lambda)} = \frac{h_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{m_1}} + \frac{h_2(\lambda)}{(\lambda - \lambda_2)^{m_2}} + \cdots + \frac{h_r(\lambda)}{(\lambda - \lambda_r)^{m_r}}$$

となる $h_1, \ldots, h_r$ が存在する（一意），h_k ... 高々 $(m_k - 1)$ 次多項式.

$$x(t) = "\frac{1}{P(D)}" f(t) = h_1(D)\frac{1}{(D - \lambda_1)^{m_1}} f(t) + \cdots + h_r(D)\frac{1}{(D - \lambda_r)^{m_r}} f(t)$$

が $P(D)x = f$ を満たすことが示せる（テキスト 65 頁）.

ただし, $\frac{1}{(D - \lambda_i)^{m_i}} f(t)$ は $(D - \lambda_i)^{m_i} y = f(t)$ の解 y である：

両辺に $e^{-\lambda_i t}$ をかけて,

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_i t}(D - \lambda_i)^{m_i} y &= e^{-\lambda_i t} f(t) \\ D^{m_i}(e^{-\lambda_i t} y) &= e^{-\lambda_i t} f(t) \\ y(t) &= e^{\lambda_i t} \underbrace{\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t_1} \cdots \int_{t_0}^{t_{m_i - 1}}}_{m_i \text{回積分}} e^{-\lambda_i t_{m_i}} f(t_{m_i})\, dt_{m_i} dt_{m_i - 1} \cdots dt_1 \end{aligned}$$

(2) "$\frac{1}{P(D)}$" の部分分数展開

$P(D)x = f$ の ODE で $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ と因数分解する.

$$\frac{1}{P(\lambda)} = \frac{h_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{m_1}} + \frac{h_2(\lambda)}{(\lambda - \lambda_2)^{m_2}} + \cdots + \frac{h_r(\lambda)}{(\lambda - \lambda_r)^{m_r}}$$

となる $h_1, \ldots, h_r$ が存在する（一意），h_k ... 高々$(m_k - 1)$ 次多項式.

$$x(t) = "\frac{1}{P(D)}" f(t) = h_1(D)\frac{1}{(D-\lambda_1)^{m_1}} f(t) + \cdots + h_r(D)\frac{1}{(D-\lambda_r)^{m_r}} f(t)$$

が $P(D)x = f$ を満たすことが示せる（テキスト 65 頁）.

ただし，$\frac{1}{(D-\lambda_i)^{m_i}} f(t)$ は $(D-\lambda_i)^{m_i} y = f(t)$ の解 y である：

両辺に $e^{-\lambda_i t}$ をかけて，

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_i t}(D-\lambda_i)^{m_i} y &= e^{-\lambda_i t} f(t) \\ D^{m_i}(e^{-\lambda_i t} y) &= e^{-\lambda_i t} f(t) \\ y(t) &= e^{\lambda_i t} \underbrace{\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t_1} \cdots \int_{t_0}^{t_{m_i-1}}}_{m_i \text{回積分}} e^{-\lambda_i t_{m_i}} f(t_{m_i})\, dt_{m_i}\, dt_{m_i-1} \ldots dt_1 \end{aligned}$$

(2) "$\frac{1}{P(D)}$" の部分分数展開

$P(D)x = f$ の ODE で $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ と因数分解する.

$$\frac{1}{P(\lambda)} = \frac{h_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{m_1}} + \frac{h_2(\lambda)}{(\lambda - \lambda_2)^{m_2}} + \cdots + \frac{h_r(\lambda)}{(\lambda - \lambda_r)^{m_r}}$$

となる $h_1, \ldots, h_r$ が存在する（一意），h_k ... 高々$(m_k - 1)$ 次多項式.

$$x(t) = "\frac{1}{P(D)}" f(t) = h_1(D)\frac{1}{(D - \lambda_1)^{m_1}} f(t) + \cdots + h_r(D)\frac{1}{(D - \lambda_r)^{m_r}} f(t)$$

が $P(D)x = f$ を満たすことが示せる（テキスト 65 頁）.

ただし，$\frac{1}{(D - \lambda_i)^{m_i}} f(t)$ は $(D - \lambda_i)^{m_i} y = f(t)$ の解 y である：

両辺に $e^{-\lambda_i t}$ をかけて，

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_i t}(D - \lambda_i)^{m_i} y &= e^{-\lambda_i t} f(t) \\ D^{m_i}(e^{-\lambda_i t} y) &= e^{-\lambda_i t} f(t) \\ y(t) &= e^{\lambda_i t} \underbrace{\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t_1} \cdots \int_{t_0}^{t_{m_i - 1}}}_{m_i \text{回積分}} e^{-\lambda_i t_{m_i}} f(t_{m_i})\, dt_{m_i}\, dt_{m_i - 1} \ldots dt_1 \end{aligned}$$

(2) "$\frac{1}{P(D)}$" の部分分数展開

$P(D)x = f$ の ODE で $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ と因数分解する.

$$\frac{1}{P(\lambda)} = \frac{h_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{m_1}} + \frac{h_2(\lambda)}{(\lambda - \lambda_2)^{m_2}} + \cdots + \frac{h_r(\lambda)}{(\lambda - \lambda_r)^{m_r}}$$

となる $h_1, \ldots, h_r$ が存在する（一意），h_k ... 高々$(m_k - 1)$ 次多項式.

$$x(t) = "\frac{1}{P(D)}" f(t) = h_1(D)\frac{1}{(D - \lambda_1)^{m_1}} f(t) + \cdots + h_r(D)\frac{1}{(D - \lambda_r)^{m_r}} f(t)$$

が $P(D)x = f$ を満たすことが示せる（テキスト 65 頁）.

ただし，$\frac{1}{(D - \lambda_i)^{m_i}} f(t)$ は $(D - \lambda_i)^{m_i} y = f(t)$ の解 y である：

両辺に $e^{-\lambda_i t}$ をかけて，

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_i t}(D - \lambda_i)^{m_i} y &= e^{-\lambda_i t} f(t) \\ D^{m_i}(e^{-\lambda_i t} y) &= e^{-\lambda_i t} f(t) \\ y(t) &= e^{\lambda_i t} \underbrace{\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t_1} \cdots \int_{t_0}^{t_{m_i - 1}}}_{m_i \text{回積分}} e^{-\lambda_i t_{m_i}} f(t_{m_i})\, dt_{m_i}\, dt_{m_i - 1} \ldots dt_1 \end{aligned}$$

(2) "$\frac{1}{P(D)}$" の部分分数展開

$P(D)x = f$ の ODE で $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ と因数分解する.

$$\frac{1}{P(\lambda)} = \frac{h_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{m_1}} + \frac{h_2(\lambda)}{(\lambda - \lambda_2)^{m_2}} + \cdots + \frac{h_r(\lambda)}{(\lambda - \lambda_r)^{m_r}}$$

となる $h_1, \ldots, h_r$ が存在する（一意），h_k ... 高々$(m_k - 1)$ 次多項式.

$$x(t) = "\frac{1}{P(D)}" f(t) = h_1(D)\frac{1}{(D - \lambda_1)^{m_1}} f(t) + \cdots + h_r(D)\frac{1}{(D - \lambda_r)^{m_r}} f(t)$$

が $P(D)x = f$ を満たすことが示せる（テキスト 65 頁）.

ただし，$\frac{1}{(D - \lambda_i)^{m_i}} f(t)$ は $(D - \lambda_i)^{m_i} y = f(t)$ の解 y である：

両辺に $e^{-\lambda_i t}$ をかけて，

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_i t}(D - \lambda_i)^{m_i} y &= e^{-\lambda_i t} f(t) \\ D^{m_i}(e^{-\lambda_i t} y) &= e^{-\lambda_i t} f(t) \\ y(t) &= e^{\lambda_i t} \underbrace{\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t_1} \cdots \int_{t_0}^{t_{m_i - 1}}}_{m_i \text{回積分}} e^{-\lambda_i t_{m_i}} f(t_{m_i})\, dt_{m_i}\, dt_{m_i - 1} \ldots dt_1 \end{aligned}$$

(2) "$\frac{1}{P(D)}$" の部分分数展開

この m 回積分を 1 回の積分で書く：

コーシーの補題

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\cdots\int_{t_0}^{t_{m-1}} g(t_m)\,dt_m\,dt_{m-1}\ldots dt_1 = \int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}g(s)\,ds$$

証明：帰納法

例 $x'' + 3x' + 2x = e^{2t}$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda+1)$

$$\frac{1}{P(\lambda)} = \frac{-1}{\lambda+2} + \frac{1}{\lambda+1}, \qquad h_1(D) = -1,\ \ h_2(D) = 1$$

$$x_p(t) = (-1)\underbrace{\frac{1}{D+2}e^{2t}}_{e^{-2t}\int_{t_0}^{t} e^{2t_1}e^{2t_1}\,dt_1} + \underbrace{\frac{1}{D+1}e^{2t}}_{e^{-t}\int_{t_0}^{t} e^{t_1}e^{2t_1}\,dt_1} = \frac{1}{12}e^{2t} + C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$$

(2) "$\frac{1}{P(D)}$" の部分分数展開

この m 回積分を 1 回の積分で書く：

コーシーの補題

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\cdots\int_{t_0}^{t_{m-1}} g(t_m)\,dt_m\,dt_{m-1}\ldots dt_1 = \int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}g(s)\,ds$$

証明：帰納法

例 $x'' + 3x' + 2x = e^{2t}$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda+1)$$

$$\frac{1}{P(\lambda)} = \frac{-1}{\lambda+2} + \frac{1}{\lambda+1}, \qquad h_1(D) = -1,\ \ h_2(D) = 1$$

$$x_p(t) = (-1)\underbrace{\frac{1}{D+2}e^{2t}}_{e^{-2t}\int_{t_0}^{t} e^{2t_1}e^{2t_1}\,dt_1} + \underbrace{\frac{1}{D+1}e^{2t}}_{e^{-t}\int_{t_0}^{t} e^{t_1}e^{2t_1}\,dt_1} = \frac{1}{12}e^{2t} + C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$$

(2) "$\frac{1}{P(D)}$" の部分分数展開

この m 回積分を 1 回の積分で書く：

コーシーの補題

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\cdots\int_{t_0}^{t_{m-1}} g(t_m)\,dt_m\,dt_{m-1}\ldots dt_1 = \int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}g(s)\,ds$$

証明：帰納法

例 $x'' + 3x' + 2x = e^{2t}$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda+1)$$

$$\frac{1}{P(\lambda)} = \frac{-1}{\lambda+2} + \frac{1}{\lambda+1}, \qquad h_1(D) = -1,\ \ h_2(D) = 1$$

$$x_p(t) = (-1)\underbrace{\frac{1}{D+2}e^{2t}}_{e^{-2t}\int_{t_0}^{t} e^{2t_1}e^{2t_1}\,dt_1} + \underbrace{\frac{1}{D+1}e^{2t}}_{e^{-t}\int_{t_0}^{t} e^{t_1}e^{2t_1}\,dt_1} = \frac{1}{12}e^{2t} + C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$$

(2) "$\frac{1}{P(D)}$" の部分分数展開

この m 回積分を 1 回の積分で書く：

コーシーの補題

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\cdots\int_{t_0}^{t_{m-1}} g(t_m)\,dt_m\,dt_{m-1}\ldots dt_1 = \int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}g(s)\,ds$$

証明：帰納法

例 $x'' + 3x' + 2x = e^{2t}$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda+1)$$

$$\frac{1}{P(\lambda)} = \frac{-1}{\lambda+2} + \frac{1}{\lambda+1}, \qquad h_1(D) = -1,\ \ h_2(D) = 1$$

$$x_p(t) = (-1)\underbrace{\frac{1}{D+2}e^{2t}}_{e^{-2t}\int_{t_0}^{t} e^{2t_1}e^{2t_1}\,dt_1} + \underbrace{\frac{1}{D+1}e^{2t}}_{e^{-t}\int_{t_0}^{t} e^{t_1}e^{2t_1}\,dt_1} = \frac{1}{12}e^{2t} + C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$$

(2) "$\frac{1}{P(D)}$" の部分分数展開

この m 回積分を 1 回の積分で書く：

コーシーの補題

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\cdots\int_{t_0}^{t_{m-1}} g(t_m)\,dt_m\,dt_{m-1}\ldots dt_1 = \int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}g(s)\,ds$$

証明：帰納法

例 $x'' + 3x' + 2x = e^{2t}$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda+1)$$

$$\frac{1}{P(\lambda)} = \frac{-1}{\lambda+2} + \frac{1}{\lambda+1}, \qquad h_1(D) = -1,\ \ h_2(D) = 1$$

$$x_p(t) = (-1)\underbrace{\frac{1}{D+2}e^{2t}}_{e^{-2t}\int_{t_0}^{t} e^{2t_1}e^{2t_1}\,dt_1} + \underbrace{\frac{1}{D+1}e^{2t}}_{e^{-t}\int_{t_0}^{t} e^{t_1}e^{2t_1}\,dt_1} = \frac{1}{12}e^{2t} + C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$$

解の形を当てる（係数の値を除いて）

前の 2 つの方法では計算が大変だから，右辺 f が多項式，指数関数，$\sin, \cos$ の組み合わせのときは当てはめ法を用いる．

例　$D^n x + a_1 D^{n-1} x + \cdots + a_{n-1} Dx + a_n x = C$ （定数）

- $a_n \neq 0$ ならば $x(t) = \frac{C}{a_n}$（定数関数）は解
- $a_n = 0, a_{n-1} \neq 0$ ならば $x(t) = \frac{C}{a_{n-1}} t$ は解

$\vdots$

解の形を当てる（係数の値を除いて）

前の 2 つの方法では計算が大変だから，右辺 f が多項式，指数関数，$\sin, \cos$ の組み合わせのときは当てはめ法を用いる．

例 $D^n x + a_1 D^{n-1} x + \cdots + a_{n-1} Dx + a_n x = C$ （定数）

- $a_n \neq 0$ ならば $x(t) = \frac{C}{a_n}$（定数関数）は解
- $a_n = 0, a_{n-1} \neq 0$ ならば $x(t) = \frac{C}{a_{n-1}} t$ は解

$\vdots$

解の形を当てる（係数の値を除いて）

前の 2 つの方法では計算が大変だから，右辺 f が多項式，指数関数，$\sin, \cos$ の組み合わせのときは当てはめ法を用いる．

例 $D^n x + a_1 D^{n-1} x + \cdots + a_{n-1} Dx + a_n x = C$ （定数）

- $a_n \neq 0$ ならば $x(t) = \dfrac{C}{a_n}$（定数関数）は解
- $a_n = 0, a_{n-1} \neq 0$ ならば $x(t) = \dfrac{C}{a_{n-1}} t$ は解

$\vdots$

解の形を当てる（係数の値を除いて）

前の 2 つの方法では計算が大変だから，右辺 f が多項式，指数関数，$\sin, \cos$ の組み合わせのときは当てはめ法を用いる．

例 $D^n x + a_1 D^{n-1} x + \cdots + a_{n-1} Dx + a_n x = C$ （定数）

- $a_n \neq 0$ ならば $x(t) = \dfrac{C}{a_n}$（定数関数）は解
- $a_n = 0, a_{n-1} \neq 0$ ならば $x(t) = \dfrac{C}{a_{n-1}} t$ は解

$\vdots$

解の形を当てる

例 $P(D)x = t^m$

具体例でアイデアを見る：$-x'' + x = t^5$

$$(1 - D^2)x = t^5$$

$$(1 - D^2)(1 + D^2 + D^4 + \cdots + D^{2k}) = 1 - D^{2k+2}$$

$$(1 - D^2)(1 + D^2 + D^4 + \cdots + D^{2k})t^5 = (1 - D^{2k+2})t^5$$

$k = 2$ とすると，

$$(1 - D^2)\underbrace{(1 + D^2 + D^4)t^5}_{\text{ODE の解}} = (1 - D^6)t^5 = t^5$$

より，$x_p(t) = (1 + D^2 + D^4)t^5 = t^5 + 20t^3 + 120t$ は一つの解．

解の形を当てる

例 $P(D)x = t^m$

具体例でアイデアを見る：$-x'' + x = t^5$

$$(1 - D^2)x = t^5$$

$$(1 - D^2)(1 + D^2 + D^4 + \cdots + D^{2k}) = 1 - D^{2k+2}$$

$$(1 - D^2)(1 + D^2 + D^4 + \cdots + D^{2k})t^5 = (1 - D^{2k+2})t^5$$

$k = 2$ とすると，

$$(1 - D^2)\underbrace{(1 + D^2 + D^4)t^5}_{\text{ODE の解}} = (1 - D^6)t^5 = t^5$$

より，$x_p(t) = (1 + D^2 + D^4)t^5 = t^5 + 20t^3 + 120t$ は一つの解．

解の形を当てる

例 $P(D)x = t^m$

具体例でアイデアを見る：$-x'' + x = t^5$

$$(1 - D^2)x = t^5$$

$$(1 - D^2)(1 + D^2 + D^4 + \cdots + D^{2k}) = 1 - D^{2k+2}$$

$$(1 - D^2)(1 + D^2 + D^4 + \cdots + D^{2k})t^5 = (1 - D^{2k+2})t^5$$

$k = 2$ とすると，

$$(1 - D^2)\underbrace{(1 + D^2 + D^4)t^5}_{\text{ODE の解}} = (1 - D^6)t^5 = t^5$$

より，$x_p(t) = (1 + D^2 + D^4)t^5 = t^5 + 20t^3 + 120t$ は一つの解．

解の形を当てる

例 $P(D)x = t^m$

具体例でアイデアを見る：$-x'' + x = t^5$

$$(1 - D^2)x = t^5$$

$$(1 - D^2)(1 + D^2 + D^4 + \cdots + D^{2k}) = 1 - D^{2k+2}$$

$$(1 - D^2)(1 + D^2 + D^4 + \cdots + D^{2k})t^5 = (1 - D^{2k+2})t^5$$

$k = 2$ とすると，

$$(1 - D^2)\underbrace{(1 + D^2 + D^4)t^5}_{\text{ODE の解}} = (1 - D^6)t^5 = t^5$$

より，$x_p(t) = (1 + D^2 + D^4)t^5 = t^5 + 20t^3 + 120t$ は一つの解．

解の形を当てる

例 $P(D)x = t^m$

具体例でアイデアを見る：$-x'' + x = t^5$

$$(1 - D^2)x = t^5$$

$$(1 - D^2)(1 + D^2 + D^4 + \cdots + D^{2k}) = 1 - D^{2k+2}$$

$$(1 - D^2)(1 + D^2 + D^4 + \cdots + D^{2k})t^5 = (1 - D^{2k+2})t^5$$

$k = 2$ とすると，

$$(1 - D^2)\underbrace{(1 + D^2 + D^4)t^5}_{\text{ODE の解}} = (1 - D^6)t^5 = t^5$$

より，$x_p(t) = (1 + D^2 + D^4)t^5 = t^5 + 20t^3 + 120t$ は一つの解.

解の形を当てる

例 $P(D)x = t^m$

具体例でアイデアを見る：$-x'' + x = t^5$

$$(1 - D^2)x = t^5$$

$$(1 - D^2)(1 + D^2 + D^4 + \cdots + D^{2k}) = 1 - D^{2k+2}$$

$$(1 - D^2)(1 + D^2 + D^4 + \cdots + D^{2k})t^5 = (1 - D^{2k+2})t^5$$

$k = 2$ とすると，

$$(1 - D^2)\underbrace{(1 + D^2 + D^4)t^5}_{\text{ODE の解}} = (1 - D^6)t^5 = t^5$$

より，$x_p(t) = (1 + D^2 + D^4)t^5 = t^5 + 20t^3 + 120t$ は一つの解.

解の形を当てる

例 $P(D)x = t^m$

具体例でアイデアを見る：$-x'' + x = t^5$

$$(1 - D^2)x = t^5$$

$$(1 - D^2)(1 + D^2 + D^4 + \cdots + D^{2k}) = 1 - D^{2k+2}$$

$$(1 - D^2)(1 + D^2 + D^4 + \cdots + D^{2k})t^5 = (1 - D^{2k+2})t^5$$

$k = 2$ とすると，

$$(1 - D^2)\underbrace{(1 + D^2 + D^4)t^5}_{\text{ODE の解}} = (1 - D^6)t^5 = t^5$$

より，$x_p(t) = (1 + D^2 + D^4)t^5 = t^5 + 20t^3 + 120t$ は一つの解.

解の形を当てる

例 $P(D)x = t^m$

- $P(0) \neq 0$ のとき：$P(0) = 1$ としてよい

$$\Rightarrow \quad P(\lambda) = 1 - \lambda Q(\lambda) \quad \text{と書ける（}Q\text{ は多項式）}$$

$$(1-\lambda Q(\lambda))(1+\lambda Q(\lambda)+\lambda^2 Q^2(\lambda)+\cdots+\lambda^m Q^m(\lambda)) = 1-\lambda^{m+1}Q^{m+1}(\lambda)$$

より（λ を D で置き換えて）

$$\underbrace{(1 - DQ(D))}_{P(D)}(1 + DQ(D) + \cdots + D^m Q^m(D))t^m = t^m$$

（$D^{m+1}Q^{m+1}(D)t^m = 0$ より）．よって，

$$x_p(t) = (1 + DQ(D) + \cdots + D^m Q^m(D))t^m \quad \text{は一つの解}$$

- $P(0) = 0$ のとき：

$P(D)x = \widetilde{P}(D)(D^q x)$，$\widetilde{P}(0) \neq 0$ となる $\widetilde{P}$，$q \in \mathbb{N}$ がある．

$$\Rightarrow \quad \widetilde{P}(D)y = t^m \quad \text{を解いて，} y(t) \text{ を } q \text{ 回積分すればよい}$$

解の形を当てる

例 $P(D)x = t^m$

- $P(0) \neq 0$ のとき：$P(0) = 1$ としてよい

$$\Rightarrow \quad P(\lambda) = 1 - \lambda Q(\lambda) \quad \text{と書ける（}Q\text{ は多項式）}$$

$$(1-\lambda Q(\lambda))(1+\lambda Q(\lambda)+\lambda^2 Q^2(\lambda)+\cdots+\lambda^m Q^m(\lambda)) = 1-\lambda^{m+1}Q^{m+1}(\lambda)$$

より（λ を D で置き換えて）

$$\underbrace{(1 - DQ(D))}_{P(D)}(1 + DQ(D) + \cdots + D^m Q^m(D))t^m = t^m$$

$(D^{m+1}Q^{m+1}(D)t^m = 0$ より$)$．よって，

$$x_p(t) = (1 + DQ(D) + \cdots + D^m Q^m(D))t^m \quad \text{は一つの解}$$

- $P(0) = 0$ のとき：

$P(D)x = \widetilde{P}(D)(D^q x)$，$\widetilde{P}(0) \neq 0$ となる $\widetilde{P}$，$q \in \mathbb{N}$ がある．

$$\Rightarrow \quad \widetilde{P}(D)y = t^m \quad \text{を解いて，} y(t) \text{ を } q \text{ 回積分すればよい}$$

解の形を当てる

例 $P(D)x = t^m$

- $P(0) \neq 0$ のとき：$P(0) = 1$ としてよい

$$\Rightarrow \qquad P(\lambda) = 1 - \lambda Q(\lambda) \qquad \text{と書ける（}Q\text{ は多項式）}$$

$$(1-\lambda Q(\lambda))(1+\lambda Q(\lambda)+\lambda^2 Q^2(\lambda)+\cdots+\lambda^m Q^m(\lambda)) = 1-\lambda^{m+1}Q^{m+1}(\lambda)$$

より（λ を D で置き換えて）

$$\underbrace{(1 - DQ(D))}_{P(D)}(1 + DQ(D) + \cdots + D^m Q^m(D))t^m = t^m$$

（$D^{m+1}Q^{m+1}(D)t^m = 0$ より）．よって，

$$x_p(t) = (1 + DQ(D) + \cdots + D^m Q^m(D))t^m \qquad \text{は一つの解}$$

- $P(0) = 0$ のとき：

$P(D)x = \widetilde{P}(D)(D^q x)$，$\widetilde{P}(0) \neq 0$ となる $\widetilde{P}$，$q \in \mathbb{N}$ がある．

$$\Rightarrow \qquad \widetilde{P}(D)y = t^m \qquad \text{を解いて，} y(t) \text{ を } q \text{ 回積分すればよい}$$

解の形を当てる

例 $P(D)x = t^m$

- $P(0) \neq 0$ のとき：$P(0) = 1$ としてよい

  $\Rightarrow$ $P(\lambda) = 1 - \lambda Q(\lambda)$ と書ける（Q は多項式）

  $(1-\lambda Q(\lambda))(1+\lambda Q(\lambda)+\lambda^2 Q^2(\lambda)+\cdots+\lambda^m Q^m(\lambda)) = 1-\lambda^{m+1}Q^{m+1}(\lambda)$

  より（λ を D で置き換えて）

  $$\underbrace{(1 - DQ(D))}_{P(D)}(1 + DQ(D) + \cdots + D^m Q^m(D))t^m = t^m$$

  $(D^{m+1}Q^{m+1}(D)t^m = 0$ より$)$．よって，

  $x_p(t) = (1 + DQ(D) + \cdots + D^m Q^m(D))t^m$ は一つの解

- $P(0) = 0$ のとき：

  $P(D)x = \widetilde{P}(D)(D^q x)$, $\widetilde{P}(0) \neq 0$ となる $\widetilde{P}$, $q \in \mathbb{N}$ がある．

  $\Rightarrow$ $\widetilde{P}(D)y = t^m$ を解いて，$y(t)$ を q 回積分すればよい

解の形を当てる

例 $P(D)x = t^m$

- $P(0) \neq 0$ のとき：$P(0) = 1$ としてよい

  $\Rightarrow$ $P(\lambda) = 1 - \lambda Q(\lambda)$ と書ける（Q は多項式）

$$(1-\lambda Q(\lambda))(1+\lambda Q(\lambda)+\lambda^2 Q^2(\lambda)+\cdots+\lambda^m Q^m(\lambda)) = 1-\lambda^{m+1}Q^{m+1}(\lambda)$$

より（λ を D で置き換えて）

$$\underbrace{(1 - DQ(D))}_{P(D)}(1 + DQ(D) + \cdots + D^m Q^m(D))t^m = t^m$$

（$D^{m+1}Q^{m+1}(D)t^m = 0$ より）. よって,

$x_p(t) = (1 + DQ(D) + \cdots + D^m Q^m(D))t^m$ は一つの解

- $P(0) = 0$ のとき：

  $P(D)x = \widetilde{P}(D)(D^q x)$, $\widetilde{P}(0) \neq 0$ となる $\widetilde{P}$, $q \in \mathbb{N}$ がある.

  $\Rightarrow$ $\widetilde{P}(D)y = t^m$ を解いて, $y(t)$ を q 回積分すればよい

解の形を当てる

例 $P(D)x = t^m$

- $P(0) \neq 0$ のとき：$P(0) = 1$ としてよい

$$\Rightarrow \qquad P(\lambda) = 1 - \lambda Q(\lambda) \qquad \text{と書ける（}Q\text{ は多項式）}$$

$$(1-\lambda Q(\lambda))(1+\lambda Q(\lambda)+\lambda^2 Q^2(\lambda)+\cdots+\lambda^m Q^m(\lambda)) = 1-\lambda^{m+1}Q^{m+1}(\lambda)$$

より（λ を D で置き換えて）

$$\underbrace{(1 - DQ(D))}_{P(D)}(1 + DQ(D) + \cdots + D^m Q^m(D))t^m = t^m$$

（$D^{m+1}Q^{m+1}(D)t^m = 0$ より）．よって，

$$x_p(t) = (1 + DQ(D) + \cdots + D^m Q^m(D))t^m \qquad \text{は一つの解}$$

- $P(0) = 0$ のとき ：

$P(D)x = \widetilde{P}(D)(D^q x)$, $\widetilde{P}(0) \neq 0$ となる $\widetilde{P}$, $q \in \mathbb{N}$ がある．

$$\Rightarrow \qquad \widetilde{P}(D)y = t^m \qquad \text{を解いて，} y(t) \text{ を } q \text{ 回積分すればよい}$$

解の形を当てる

例 $P(D)x = t^m$

- $P(0) \neq 0$ のとき：$P(0) = 1$ としてよい

  $\Rightarrow$ $P(\lambda) = 1 - \lambda Q(\lambda)$ と書ける（Q は多項式）

  $(1-\lambda Q(\lambda))(1+\lambda Q(\lambda)+\lambda^2 Q^2(\lambda)+\cdots+\lambda^m Q^m(\lambda)) = 1-\lambda^{m+1}Q^{m+1}(\lambda)$

  より（λ を D で置き換えて）

  $$\underbrace{(1 - DQ(D))}_{P(D)}(1 + DQ(D) + \cdots + D^m Q^m(D))t^m = t^m$$

  （$D^{m+1}Q^{m+1}(D)t^m = 0$ より）．よって，

  $x_p(t) = (1 + DQ(D) + \cdots + D^m Q^m(D))t^m$ は一つの解

- $P(0) = 0$ のとき ：

  $P(D)x = \widetilde{P}(D)(D^q x)$, $\widetilde{P}(0) \neq 0$ となる $\widetilde{P}$, $q \in \mathbb{N}$ がある．

  $\Rightarrow$ $\widetilde{P}(D)y = t^m$ を解いて，$y(t)$ を q 回積分すればよい

解の形を当てる

例 $P(D)x = t^m$

- $P(0) \neq 0$ のとき：$P(0) = 1$ としてよい

  $\Rightarrow$ $P(\lambda) = 1 - \lambda Q(\lambda)$ と書ける（Q は多項式）

  $(1-\lambda Q(\lambda))(1+\lambda Q(\lambda)+\lambda^2 Q^2(\lambda)+\cdots+\lambda^m Q^m(\lambda)) = 1-\lambda^{m+1}Q^{m+1}(\lambda)$

  より（λ を D で置き換えて）

  $$\underbrace{(1 - DQ(D))}_{P(D)}(1 + DQ(D) + \cdots + D^m Q^m(D))t^m = t^m$$

  （$D^{m+1}Q^{m+1}(D)t^m = 0$ より）．よって，

  $x_p(t) = (1 + DQ(D) + \cdots + D^m Q^m(D))t^m$ は一つの解

- $P(0) = 0$ のとき ：

  $P(D)x = \widetilde{P}(D)(D^q x)$, $\widetilde{P}(0) \neq 0$ となる $\widetilde{P}$, $q \in \mathbb{N}$ がある．

  $\Rightarrow$ $\widetilde{P}(D)y = t^m$ を解いて，$y(t)$ を q 回積分すればよい

解の形を当てる

例 $x''' + x' = t^2$

$$(D^2+1)(\underbrace{Dx}_{=y}) = t^2$$

$$1 + D^2 = 1 - D(\underbrace{-D}_{=Q(D)})$$

$$(1+D^2)(1-D^2+D^4)t^2 = (1+D^6)t^2 = t^2$$

$$\Rightarrow \quad y = (1-D^2+D^4)t^2 = t^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}t^3 - 2t$$

解の形を当てる

例 $x''' + x' = t^2$

$$(D^2 + 1)(\underbrace{Dx}_{=y}) = t^2$$

$$1 + D^2 = 1 - D(\underbrace{-D}_{=Q(D)})$$

$$(1 + D^2)(1 - D^2 + D^4)t^2 = (1 + D^6)t^2 = t^2$$

$$\Rightarrow \quad y = (1 - D^2 + D^4)t^2 = t^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}t^3 - 2t$$

解の形を当てる

例 $x''' + x' = t^2$

$$(D^2 + 1)(\underbrace{Dx}_{=y}) = t^2$$

$$1 + D^2 = 1 - D(\underbrace{-D}_{=Q(D)})$$

$$(1 + D^2)(1 - D^2 + D^4)t^2 = (1 + D^6)t^2 = t^2$$

$$\Rightarrow \quad y = (1 - D^2 + D^4)t^2 = t^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}t^3 - 2t$$

解の形を当てる

例 $x''' + x' = t^2$

$$(D^2 + 1)(\underbrace{Dx}_{=y}) = t^2$$

$$1 + D^2 = 1 - D(\underbrace{-D}_{=Q(D)})$$

$$(1 + D^2)(1 - D^2 + D^4)t^2 = (1 + D^6)t^2 = t^2$$

$$\Rightarrow \quad y = (1 - D^2 + D^4)t^2 = t^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}t^3 - 2t$$

解の形を当てる

例 $x''' + x' = t^2$

$$(D^2 + 1)(\underbrace{Dx}_{=y}) = t^2$$

$$1 + D^2 = 1 - D(\underbrace{-D}_{=Q(D)})$$

$$(1 + D^2)(1 - D^2 + D^4)t^2 = (1 + D^6)t^2 = t^2$$

$$\Rightarrow \quad y = (1 - D^2 + D^4)t^2 = t^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}t^3 - 2t$$

微分積分学続論 II： 第 7 回

Karel Svadlenka

2020 年 5 月 27 日

■定数係数連立 1 階線型 ODE

$$(*)\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ & \vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

(IV) 初期条件： $x_1(t_0) = x_1^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0$

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$$

と書ける． ただし，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

定数係数高階線型 ODE はこの特別な場合．

前から知っていること：(*) & (IV) は $\mathbb{R}$ 上でただ一つの解が存在する． 注：$A(t)$ が I 上で連続 $\Rightarrow$ I での存在・一意性が成立

■定数係数連立 1 階 ODE

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$$

単独 ODE との類似：

$$\begin{cases} x' &= ax \\ x(t_0) &= x^0 \end{cases} \quad \text{の解は} \quad e^{(t-t_0)a}x^0$$

$\Rightarrow$ (*) & (IV) の解は $e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0$ ？

行列の指数関数をちゃんと定義すれば，これは正しい．

■行列の指数関数

定義：行列の指数関数

n 次正方行列 A と $t \in \mathbb{R}$ に対し，

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{t^k}{k!}}_{\text{スカラー} \in \mathbb{R}} \underbrace{A^k}_{\text{行列}} \tag{1}$$

を 行列 A の指数関数 という．

注：$\frac{t^k}{k!}$ というスカラーを $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ 回}}$ の各成分にかける．　　ただし，$A^0 = I$（単位行列）．

■行列の指数関数

定理（e^{tA} の収束）
(1) は任意の A と t について収束する． よって，e^{tA} の各成分は t の解析関数である． 即ち，各成分の任意の t_0 でのテーラー展開は $\mathbb{R}$ 上でその成分と一致する．

証明 ：$\mu = \max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}|$ とおく．成分ごとに見る：

$$A^k \text{ の成分を } a_{ij}^{(k)} \text{ とすると，} \qquad |a_{ij}^{(k)}| \le (n\mu)^k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

帰納法で示す：$k = 1$ で正しい

$$\left|a_{ij}^{(k+1)}\right| = \left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}^{(k)} a_{\ell j}\right| \le \sum_{\ell=1}^{n} (n\mu)^k \max_{\ell,j} |a_{\ell j}| = (n\mu)^{k+1}$$

これをもちいて，e^{tA} の成分：　$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k (n\mu)^k}{k!} = e^{|t| n\mu}$

$\Rightarrow$ e^{tA} は絶対収束．

■定数係数連立 1 階 ODE と行列の指数関数

定理（$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ の解）
$\boldsymbol{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0$　は (*) & (IV) の唯一の解である．

証明 ：解析関数の性質より，(1) の級数が項ごと微分できて，

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k t^{k-1}}{k!} A^k = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} = A e^{tA}.$$

(IV) は明らか：　$\boldsymbol{x}(t_0) = e^{0A}\boldsymbol{x}_0 = I\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0$

■定数係数連立 1 階 ODE と行列の指数関数
別証明 ：$t \in [-T, T]$ に限定すれば，$\sum_{k=0}^{\infty} |\frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)}| \le e^{n\mu T}$ $\Rightarrow$ Weierstrass の M 判定法より，級数は $[-T, T]$ で一様収束．

$$s_M(t) = \sum_{k=0}^{M} \frac{t^k}{k!} A^k = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^M}{M!}A^M \quad \text{とおく}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} s_M(t) &= A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \cdots + \frac{t^{M-1}}{(M-1)!}A^M \\ &= A\left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^{M-1}}{(M-1)!}A^{M-1}\right) = A s_{M-1}(t)\end{aligned}$$

積分して，　$s_M(t) - s_M(t_0) = \int_{t_0}^{t} A s_{M-1}(\tau)\, d\tau \quad M \to \infty$（一様収束！）より　　$e^{tA} - e^{t_0 A} = \int_{t_0}^{t} A e^{\tau A}\, d\tau$

微分して，　$\dfrac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}.$

■例：$\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 \end{cases}$　の一般解を求める

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \qquad \begin{aligned} A^{2k+1} &= (-1)^{k+1} A \\ A^{2k} &= (-1)^k I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots\right) I + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right) A \\ &= \cos t\, I + \sin t\, A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

一般解は

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ x_2(t) &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{aligned}$$

■行列の指数関数：注意

(1) e^A はすべての A に対して正則行列である．e^{tA} の列が $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ の独立な解だから（$t = 1$ とする）．

より詳しく：$e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^{tA}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e^{tA}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は e^{tA} の列で，異なる初期値に対する $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ の解である．

e^A の列 $R_1, \ldots, R_n$ が 1 次従属ならば，$R_n = C_1 R_1 + \cdots + C_{n-1} R_{n-1}$（例えば）とできる．このとき，

$e^{tA}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}, e^{tA}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の二つの異なる解は $t = 1$ で交わってしまう（一意性に矛盾）．

■行列の指数関数：注意

(2) $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$ は一般には成り立たないが，A と B が可換のとき（$AB = BA$）は成り立つ．

証明：$F_1(t) = e^{tA} e^{tB}, F_2(t) = e^{t(A+B)}$ とおくと，

$$F_1'(t) = A e^{tA} e^{tB} + e^{tA} B e^{tB} = (A+B) e^{tA} e^{tB} = (A+B) F_1(t), \quad F_1(0) = I$$

（$A^k B = A^{k-1} BA = \cdots = BA^k$, $Be^{tA} = B \sum \frac{t^k}{k!} A^k = e^{tA} B$ より）

同様に　　$F_2'(t) = (A+B) F_2(t), \quad F_2(0) = I$

$\boldsymbol{x}'(t) = (A+B)\boldsymbol{x}(t)$ の解の一意性より $F_1(t) = F_2(t)$．$t = 1$ とする．

■e^{tA} を実際に計算する

(1) $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 対角行列のとき $A^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k\end{pmatrix}$ より

$$e^{tA}=\begin{pmatrix}\sum\frac{t^k}{k!}\lambda_1^k & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sum\frac{t^k}{k!}\lambda_n^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}$$

■e^{tA} を実際に計算する

(2) A が対角化可能なとき，正則行列 T があって，

$$A=TDT^{-1},\qquad D\ldots\text{対角行列}$$

$$A^k=(TDT^{-1})(TDT^{-1})\cdots(TDT^{-1})=TD^kT^{-1}\qquad\text{より}$$

$$e^{tA}=\sum\frac{t^k}{k!}TD^kT^{-1}=T\left(\sum\frac{t^k}{k!}D^k\right)T^{-1}=T\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}T^{-1}$$

$\Rightarrow$ A の固有値と固有ベクトルを求めれば，計算できる.

■e^{tA} を実際に計算する

(3) 一般の A：$A=TJT^{-1}$, $J\ldots$ ジョルダンの標準形

$$J=\begin{pmatrix}J_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_r\end{pmatrix},\qquad J_j=\begin{pmatrix}\lambda_j & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_j\end{pmatrix},\quad j=1,\ldots,r$$

$$e^{tA}=T\left(\sum\frac{t^k}{k!}J^k\right)T^{-1}=T\begin{pmatrix}\sum\frac{t^k}{k!}J_1^k & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sum\frac{t^k}{k!}J_r^k\end{pmatrix}T^{-1}$$

$$=T\begin{pmatrix}e^{tJ_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_r}\end{pmatrix}T^{-1}$$

■e^{tA} を実際に計算する

補題

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_r\end{pmatrix},\qquad\text{ならば}\qquad e^A=\begin{pmatrix}e^{A_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{A_r}\end{pmatrix}$$

証明：

$$A^2=\begin{pmatrix}A_1^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_r^2\end{pmatrix},\qquad e^A=I+tA+\frac{t^2}{2!}A^2+\cdots$$

■e^{tA} を実際に計算する
あとは，e^{tJ_j} を求めればよい．次の ODE の解に関係する：

$$\boldsymbol{x}' = J_j\boldsymbol{x} \begin{cases} x_1' &= \lambda_j x_1 + x_2 \\ x_2' &= \lambda_j x_2 + x_3 \\ &\vdots \\ x_{i-1}' &= \lambda_j x_{i-1} + x_i \\ x_i' &= \lambda_j x_i \end{cases} \qquad \text{解は} \begin{cases} x_i &= C_i e^{\lambda_j t} \\ x_{i-1} &= (C_{i-1} + C_i t)e^{\lambda_j t} \\ &\vdots \\ x_1 &= \left(C_1 + C_2 t + \cdots + C_i \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}\right) e^{\lambda_j t} \end{cases}$$

$$\text{よって，} \qquad e^{tJ_j} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{i-2}}{(i-2)!} \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_j t}$$

■例：$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = 2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank} = 1 \quad \Rightarrow \quad$ 固有ベクトルは一本だけ： $\boldsymbol{v}_1 = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 一般化固有ベクトル：$(A-2I)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1$ より

$\boldsymbol{v}_2 = c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ジョルダン標準形：$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}e^{2t}\begin{pmatrix} -t+3 & t \\ t & t+3 \end{pmatrix}$$

微分積分学続論 II： 第 7 回

Karel Svadlenka

京都大学大学院理学研究科 数学教室

2020 年 5 月 27 日

定数係数連立 1 階線型 ODE

$$(*)\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= A\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}^0 \end{aligned}$$

と書ける．

ただし，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$．

(IV) 初期条件： $x_1(t_0) = x_1^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0$

定数係数高階線型 ODE はこの特別な場合．

前から知っていること：(*) & (IV) は $\mathbb{R}$ 上でただ一つの解が存在する．

注：$A(t)$ が I 上で連続 $\Rightarrow$ I での存在・一意性が成立

定数係数連立 1 階線型 ODE

$$(*)\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$$

と書ける．

ただし，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$．

(IV) 初期条件： $x_1(t_0) = x_1^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0$

定数係数高階線型 ODE はこの特別な場合．

前から知っていること：(*) & (IV) は $\mathbb{R}$ 上でただ一つの解が存在する．

注：$A(t)$ が I 上で連続 $\Rightarrow$ I での存在・一意性が成立

定数係数連立 1 階線型 ODE

$$(*)\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= A\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}^0 \end{aligned}$$

と書ける.

ただし，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

(IV) 初期条件： $x_1(t_0) = x_1^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0$

定数係数高階線型 ODE はこの特別な場合.

前から知っていること：(*) & (IV) は $\mathbb{R}$ 上でただ一つの解が存在する.
注：$A(t)$ が I 上で連続 $\Rightarrow$ I での存在・一意性が成立

定数係数連立 1 階線型 ODE

$$(*)\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= A\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}^0 \end{aligned}$$

と書ける.

ただし，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

(IV) 初期条件： $x_1(t_0) = x_1^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0$

定数係数高階線型 ODE はこの特別な場合.

前から知っていること：(*) & (IV) は $\mathbb{R}$ 上でただ一つの解が存在する.
注：$A(t)$ が I 上で連続 $\Rightarrow$ I での存在・一意性が成立

定数係数連立 1 階線型 ODE

$$(*)\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= A\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}^0 \end{aligned}$$

と書ける.

ただし，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

(IV) 初期条件： $x_1(t_0) = x_1^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0$

定数係数高階線型 ODE はこの特別な場合.

前から知っていること：(*) & (IV) は $\mathbb{R}$ 上でただ一つの解が存在する.
注：$A(t)$ が I 上で連続 $\Rightarrow$ I での存在・一意性が成立

定数係数連立 1 階 ODE

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= A\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}^0 \end{aligned}$$

単独 ODE との類似：

$$\begin{cases} x' &= ax \\ x(t_0) &= x^0 \end{cases} \quad \text{の解は} \quad e^{(t-t_0)a}x^0$$

$\Rightarrow$ (*) & (IV) の解は $e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0$?

行列の指数関数をちゃんと定義すれば，これは正しい．

定数係数連立 1 階 ODE

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= A\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}^0 \end{aligned}$$

単独 ODE との類似：

$$\begin{cases} x' &= ax \\ x(t_0) &= x^0 \end{cases} \quad \text{の解は} \quad e^{(t-t_0)a}x^0$$

$\Rightarrow$ (*) & (IV) の解は $e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0$?

行列の指数関数をちゃんと定義すれば，これは正しい．

定数係数連立 1 階 ODE

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= A\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}^0 \end{aligned}$$

単独 ODE との類似：

$$\begin{cases} x' &= ax \\ x(t_0) &= x^0 \end{cases} \quad \text{の解は} \quad e^{(t-t_0)a}x^0$$

$\Rightarrow$ (*) & (IV) の解は $e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0$ ？

行列の指数関数をちゃんと定義すれば，これは正しい．

定数係数連立 1 階 ODE

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= A\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}^0 \end{aligned}$$

単独 ODE との類似：

$$\begin{cases} x' &= ax \\ x(t_0) &= x^0 \end{cases} \quad \text{の解は} \quad e^{(t-t_0)a}x^0$$

$\Rightarrow$ (*) & (IV) の解は $e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0$?

行列の指数関数をちゃんと定義すれば，これは正しい．

行列の指数関数

定義：行列の指数関数

n 次正方行列 A と $t \in \mathbb{R}$ に対し，

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{t^k}{k!}}_{\text{スカラー} \in \mathbb{R}} \underbrace{A^k}_{\text{行列}} \tag{1}$$

を 行列 A の指数関数 という．

注：$\frac{t^k}{k!}$ というスカラーを $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ 回}}$ の各成分にかける．

ただし， $A^0 = I$（単位行列）．

行列の指数関数

定義：行列の指数関数

n 次正方行列 A と $t \in \mathbb{R}$ に対し，

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{t^k}{k!}}_{\text{スカラー} \in \mathbb{R}} \underbrace{A^k}_{\text{行列}} \tag{1}$$

を 行列 A の指数関数 という．

注：$\frac{t^k}{k!}$ というスカラーを $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ 回}}$ の各成分にかける．

ただし， $A^0 = I$（単位行列）．

行列の指数関数

定理（e^{tA} の収束）

(1) は任意の A と t について収束する.
よって，e^{tA} の各成分は t の解析関数である.
即ち，各成分の任意の t_0 でのテーラー展開は $\mathbb{R}$ 上でその成分と一致する.

証明 : $\mu = \max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}|$ とおく．成分ごとに見る：

A^k の成分を $a_{ij}^{(k)}$ とすると，　$|a_{ij}^{(k)}| \le (n\mu)^k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$

帰納法で示す：$k = 1$ で正しい

$$\left|a_{ij}^{(k+1)}\right| = \left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}^{(k)} a_{\ell j}\right| \le \sum_{\ell=1}^{n} (n\mu)^k \max_{\ell j} |a_{\ell j}| = (n\mu)^{k+1}$$

これをもちいて，e^{tA} の成分：　$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k (n\mu)^k}{k!} = e^{|t|n\mu}$

$\Rightarrow$ e^{tA} は絶対収束.

行列の指数関数

定理（e^{tA} の収束）

(1) は任意の A と t について収束する.
よって，e^{tA} の各成分は t の解析関数である.
即ち，各成分の任意の t_0 でのテーラー展開は $\mathbb{R}$ 上でその成分と一致する.

証明：$\mu = \max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}|$ とおく．成分ごとに見る：

A^k の成分を $a_{ij}^{(k)}$ とすると，　$|a_{ij}^{(k)}| \le (n\mu)^k$,　$k = 0, 1, 2, \dots$

帰納法で示す：$k = 1$ で正しい

$$\left|a_{ij}^{(k+1)}\right| = \left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}^{(k)} a_{\ell j}\right| \le \sum_{\ell=1}^{n} (n\mu)^k \max_{\ell,j} |a_{\ell j}| = (n\mu)^{k+1}$$

これをもちいて，e^{tA} の成分：　$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k (n\mu)^k}{k!} = e^{|t|n\mu}$

$\Rightarrow$ e^{tA} は絶対収束.

行列の指数関数

定理（e^{tA} の収束）

(1) は任意の A と t について収束する.
よって，e^{tA} の各成分は t の解析関数である.
即ち，各成分の任意の t_0 でのテーラー展開は $\mathbb{R}$ 上でその成分と一致する.

証明：$\mu = \max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}|$ とおく．成分ごとに見る：

A^k の成分を $a_{ij}^{(k)}$ とすると，　　$|a_{ij}^{(k)}| \le (n\mu)^k$,　　$k = 0, 1, 2, \dots$

帰納法で示す：$k = 1$ で正しい

$$\left|a_{ij}^{(k+1)}\right| = \left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}^{(k)} a_{\ell j}\right| \le \sum_{\ell=1}^{n} (n\mu)^k \max_{\ell,j} |a_{\ell j}| = (n\mu)^{k+1}$$

これをもちいて，e^{tA} の成分：　$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k (n\mu)^k}{k!} = e^{|t|n\mu}$

$\Rightarrow$ e^{tA} は絶対収束.

行列の指数関数

定理（e^{tA} の収束）

(1) は任意の A と t について収束する.
よって，e^{tA} の各成分は t の解析関数である.
即ち，各成分の任意の t_0 でのテーラー展開は $\mathbb{R}$ 上でその成分と一致する.

証明：$\mu = \max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}|$ とおく．成分ごとに見る：

A^k の成分を $a_{ij}^{(k)}$ とすると，　　$|a_{ij}^{(k)}| \le (n\mu)^k$,　　$k = 0, 1, 2, \dots$

帰納法で示す：$k = 1$ で正しい

$$\left|a_{ij}^{(k+1)}\right| = \left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}^{(k)} a_{\ell j}\right| \le \sum_{\ell=1}^{n} (n\mu)^k \max_{\ell,j} |a_{\ell j}| = (n\mu)^{k+1}$$

これをもちいて，e^{tA} の成分：　$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k (n\mu)^k}{k!} = e^{|t|n\mu}$

$\Rightarrow$ e^{tA} は絶対収束.

行列の指数関数

定理（e^{tA} の収束）

(1) は任意の A と t について収束する.
よって，e^{tA} の各成分は t の解析関数である.
即ち，各成分の任意の t_0 でのテーラー展開は $\mathbb{R}$ 上でその成分と一致する.

証明：$\mu = \max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}|$ とおく．成分ごとに見る：

A^k の成分を $a_{ij}^{(k)}$ とすると，　$|a_{ij}^{(k)}| \le (n\mu)^k$,　$k = 0, 1, 2, \dots$

帰納法で示す：$k = 1$ で正しい

$$\left|a_{ij}^{(k+1)}\right| = \left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}^{(k)} a_{\ell j}\right| \le \sum_{\ell=1}^{n} (n\mu)^k \max_{\ell,j} |a_{\ell j}| = (n\mu)^{k+1}$$

これをもちいて，e^{tA} の成分：　$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k (n\mu)^k}{k!} = e^{|t|n\mu}$

$\Rightarrow$ e^{tA} は絶対収束.

行列の指数関数

定理（e^{tA} の収束）

(1) は任意の A と t について収束する.
よって，e^{tA} の各成分は t の解析関数である.
即ち，各成分の任意の t_0 でのテーラー展開は $\mathbb{R}$ 上でその成分と一致する.

証明：$\mu = \max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}|$ とおく．成分ごとに見る：

A^k の成分を $a_{ij}^{(k)}$ とすると，　$|a_{ij}^{(k)}| \le (n\mu)^k$,　$k = 0, 1, 2, \dots$

帰納法で示す：$k = 1$ で正しい

$$\left|a_{ij}^{(k+1)}\right| = \left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}^{(k)} a_{\ell j}\right| \le \sum_{\ell=1}^{n} (n\mu)^k \max_{\ell,j} |a_{\ell j}| = (n\mu)^{k+1}$$

これをもちいて，e^{tA} の成分：　$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k (n\mu)^k}{k!} = e^{|t|n\mu}$

$\Rightarrow$ e^{tA} は絶対収束.

定数係数連立 1 階 ODE と行列の指数関数

定理（$x' = Ax$ の解）

$\boldsymbol{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0$ は (*) & (IV) の唯一の解である.

証明：解析関数の性質より，(1) の級数が項ごと微分できて，

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kt^{k-1}}{k!}A^k = A\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1} = Ae^{tA}.$$

(IV) は明らか： $\boldsymbol{x}(t_0) = e^{0A}\boldsymbol{x}_0 = I\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0$

定数係数連立 1 階 ODE と行列の指数関数

定理（$x' = Ax$ の解）

$\boldsymbol{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0$　は (*) & (IV) の唯一の解である.

証明：解析関数の性質より，(1) の級数が項ごと微分できて，

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kt^{k-1}}{k!}A^k = A\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1} = Ae^{tA}.$$

(IV) は明らか：　$\boldsymbol{x}(t_0) = e^{0A}\boldsymbol{x}_0 = I\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0$

定数係数連立 1 階 ODE と行列の指数関数

定理（$x' = Ax$ の解）

$\boldsymbol{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0$　は (*) & (IV) の唯一の解である.

証明：解析関数の性質より，(1) の級数が項ごと微分できて，

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kt^{k-1}}{k!}A^k = A\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1} = Ae^{tA}.$$

(IV) は明らか：　$\boldsymbol{x}(t_0) = e^{0A}\boldsymbol{x}_0 = I\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0$

定数係数連立 1 階 ODE と行列の指数関数

別証明：$t \in [-T, T]$ に限定すれば，$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)}\right| \leq e^{n\mu T} \Rightarrow$
Weierstrass の M 判定法より，級数は $[-T, T]$ で一様収束.

$$s_M(t) = \sum_{k=0}^{M} \frac{t^k}{k!} A^k = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^M}{M!}A^M \quad \text{とおく}$$

$$\frac{d}{dt}s_M(t) = A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \cdots + \frac{t^{M-1}}{(M-1)!}A^M$$

$$= A\left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^{M-1}}{(M-1)!}A^{M-1}\right) = As_{M-1}(t)$$

積分して，$s_M(t) - s_M(t_0) = \int_{t_0}^{t} As_{M-1}(\tau)\, d\tau$

$M \to \infty$ (一様収束！) より $e^{tA} - e^{t_0 A} = \int_{t_0}^{t} Ae^{\tau A}\, d\tau$

微分して，$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.

定数係数連立１階 ODE と行列の指数関数

別証明：$t \in [-T, T]$ に限定すれば，$\sum_{k=0}^{\infty} |\frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)}| \leq e^{n\mu T} \Rightarrow$ Weierstrass の M 判定法より，級数は $[-T, T]$ で一様収束.

$$s_M(t) = \sum_{k=0}^{M} \frac{t^k}{k!} A^k = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^M}{M!}A^M \quad \text{とおく}$$

$$\frac{d}{dt}s_M(t) = A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \cdots + \frac{t^{M-1}}{(M-1)!}A^M$$

$$= A\left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^{M-1}}{(M-1)!}A^{M-1}\right) = As_{M-1}(t)$$

積分して，$s_M(t) - s_M(t_0) = \int_{t_0}^{t} As_{M-1}(\tau)\, d\tau$

$M \to \infty$（一様収束！）より $e^{tA} - e^{t_0 A} = \int_{t_0}^{t} Ae^{\tau A}\, d\tau$

微分して，$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.

定数係数連立１階 ODE と行列の指数関数

別証明：$t \in [-T, T]$ に限定すれば，$\sum_{k=0}^{\infty} |\frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)}| \leq e^{n\mu T} \Rightarrow$ Weierstrass の M 判定法より，級数は $[-T, T]$ で一様収束.

$$
\begin{aligned}
s_M(t) &= \sum_{k=0}^{M} \frac{t^k}{k!} A^k = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^M}{M!}A^M \quad \text{とおく} \\
\frac{d}{dt}s_M(t) &= A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \cdots + \frac{t^{M-1}}{(M-1)!}A^M \\
&= A\left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^{M-1}}{(M-1)!}A^{M-1}\right) = As_{M-1}(t)
\end{aligned}
$$

積分して，$s_M(t) - s_M(t_0) = \int_{t_0}^{t} As_{M-1}(\tau)\, d\tau$

$M \to \infty$（一様収束！）より $e^{tA} - e^{t_0 A} = \int_{t_0}^{t} Ae^{\tau A}\, d\tau$

微分して，$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.

定数係数連立１階 ODE と行列の指数関数

別証明：$t \in [-T, T]$ に限定すれば，$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)}\right| \leq e^{n\mu T} \Rightarrow$ Weierstrass の M 判定法より，級数は $[-T, T]$ で一様収束.

$$
\begin{aligned}
s_M(t) &= \sum_{k=0}^{M} \frac{t^k}{k!} A^k = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^M}{M!}A^M \quad \text{とおく} \\
\frac{d}{dt}s_M(t) &= A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \cdots + \frac{t^{M-1}}{(M-1)!}A^M \\
&= A\left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^{M-1}}{(M-1)!}A^{M-1}\right) = As_{M-1}(t)
\end{aligned}
$$

積分して，$s_M(t) - s_M(t_0) = \int_{t_0}^{t} As_{M-1}(\tau)\, d\tau$

$M \to \infty$（一様収束！）より $e^{tA} - e^{t_0 A} = \int_{t_0}^{t} Ae^{\tau A}\, d\tau$

微分して，$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.

定数係数連立１階 ODE と行列の指数関数

別証明：$t \in [-T, T]$ に限定すれば，$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)}\right| \leq e^{n\mu T} \Rightarrow$ Weierstrass の M 判定法より，級数は $[-T, T]$ で一様収束.

$$
\begin{aligned}
s_M(t) &= \sum_{k=0}^{M} \frac{t^k}{k!} A^k = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^M}{M!}A^M \quad \text{とおく} \\
\frac{d}{dt}s_M(t) &= A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \cdots + \frac{t^{M-1}}{(M-1)!}A^M \\
&= A\left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^{M-1}}{(M-1)!}A^{M-1}\right) = As_{M-1}(t)
\end{aligned}
$$

積分して，$s_M(t) - s_M(t_0) = \int_{t_0}^{t} As_{M-1}(\tau)\, d\tau$

$M \to \infty$（一様収束！）より　$e^{tA} - e^{t_0 A} = \int_{t_0}^{t} Ae^{\tau A}\, d\tau$

微分して，$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.

定数係数連立１階 ODE と行列の指数関数

別証明：$t \in [-T, T]$ に限定すれば，$\sum_{k=0}^{\infty} |\frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)}| \leq e^{n\mu T} \Rightarrow$ Weierstrass の M 判定法より，級数は $[-T, T]$ で一様収束.

$$
\begin{aligned}
s_M(t) &= \sum_{k=0}^{M} \frac{t^k}{k!} A^k = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^M}{M!}A^M \quad \text{とおく} \\
\frac{d}{dt}s_M(t) &= A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \cdots + \frac{t^{M-1}}{(M-1)!}A^M \\
&= A\left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^{M-1}}{(M-1)!}A^{M-1}\right) = As_{M-1}(t)
\end{aligned}
$$

積分して，$s_M(t) - s_M(t_0) = \int_{t_0}^{t} As_{M-1}(\tau)\, d\tau$

$M \to \infty$（一様収束！）より　$e^{tA} - e^{t_0 A} = \int_{t_0}^{t} Ae^{\tau A}\, d\tau$

微分して，　$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.

例：$\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 \end{cases}$ の一般解を求める

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \qquad \begin{aligned} A^{2k+1} &= (-1)^{k+1} A \\ A^{2k} &= (-1)^k I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots\right) I + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right) A \\ &= \cos t\, I + \sin t\, A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

一般解は

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ x_2(t) &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{aligned}$$

例：$\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 \end{cases}$ の一般解を求める

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \qquad \begin{aligned} A^{2k+1} &= (-1)^{k+1} A \\ A^{2k} &= (-1)^k I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots\right) I + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right) A \\ &= \cos t\, I + \sin t\, A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

一般解は

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ x_2(t) &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{aligned}$$

例：$\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 \end{cases}$ の一般解を求める

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \qquad \begin{aligned} A^{2k+1} &= (-1)^{k+1} A \\ A^{2k} &= (-1)^k I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots\right) I + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right) A \\ &= \cos t\, I + \sin t\, A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

一般解は

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ x_2(t) &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{aligned}$$

例：$\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 \end{cases}$ の一般解を求める

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \qquad \begin{aligned} A^{2k+1} &= (-1)^{k+1} A \\ A^{2k} &= (-1)^k I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots\right) I + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right) A \\ &= \cos t\, I + \sin t\, A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

一般解は

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ x_2(t) &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{aligned}$$

例：$\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 \end{cases}$ の一般解を求める

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \qquad \begin{aligned} A^{2k+1} &= (-1)^{k+1} A \\ A^{2k} &= (-1)^k I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots\right) I + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right) A \\ &= \cos t\, I + \sin t\, A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

一般解は

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ x_2(t) &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{aligned}$$

行列の指数関数：注意

(1) e^A はすべての A に対して正則行列である.

e^{tA} の列が $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ の独立な解だから（$t = 1$ とする）.

より詳しく：

$e^{tA}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e^{tA}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, e^{tA}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ は e^{tA} の列で，異なる初期値に対する

$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ の解である.

e^A の列 $R_1, \ldots, R_n$ が 1 次従属ならば，$R_n = C_1R_1 + \cdots + C_{n-1}R_{n-1}$

（例えば）とできる. このとき，$e^{tA}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\\vdots\\C_{n-1}\\0\end{pmatrix}, e^{tA}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ の二つの異なる解

は $t = 1$ で交わってしまう（一意性に矛盾）.

行列の指数関数：注意

(1) e^A はすべての A に対して正則行列である.
e^{tA} の列が $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ の独立な解だから（$t = 1$ とする）.

より詳しく：

$e^{tA}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e^{tA}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, e^{tA}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ は e^{tA} の列で，異なる初期値に対する
$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ の解である.
e^A の列 $R_1, \ldots, R_n$ が 1 次従属ならば，$R_n = C_1R_1 + \cdots + C_{n-1}R_{n-1}$
（例えば）とできる. このとき，$e^{tA}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\\vdots\\C_{n-1}\\0\end{pmatrix}, e^{tA}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ の二つの異なる解
は $t = 1$ で交わってしまう（一意性に矛盾）.

行列の指数関数：注意

(1) e^A はすべての A に対して正則行列である.
e^{tA} の列が $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ の独立な解だから（$t = 1$ とする）.

より詳しく：

$e^{tA}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e^{tA}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, e^{tA}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ は e^{tA} の列で，異なる初期値に対する
$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ の解である.

e^A の列 $R_1, \ldots, R_n$ が 1 次従属ならば，$R_n = C_1R_1 + \cdots + C_{n-1}R_{n-1}$
（例えば）とできる．このとき，$e^{tA}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\\vdots\\C_{n-1}\\0\end{pmatrix}, e^{tA}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ の二つの異なる解
は $t = 1$ で交わってしまう（一意性に矛盾）.

行列の指数関数：注意

(1) e^A はすべての A に対して正則行列である.
e^{tA} の列が $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ の独立な解だから（$t = 1$ とする）.

より詳しく：
$e^{tA}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e^{tA}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, e^{tA}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ は e^{tA} の列で，異なる初期値に対する
$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ の解である.
e^A の列 $R_1, \ldots, R_n$ が 1 次従属ならば，$R_n = C_1R_1 + \cdots + C_{n-1}R_{n-1}$
（例えば）とできる. このとき，$e^{tA}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\\vdots\\C_{n-1}\\0\end{pmatrix}, e^{tA}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ の二つの異なる解
は $t = 1$ で交わってしまう（一意性に矛盾）.

行列の指数関数：注意

(1) e^A はすべての A に対して正則行列である.
e^{tA} の列が $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ の独立な解だから（$t = 1$ とする）.

より詳しく：
$e^{tA}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e^{tA}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, e^{tA}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ は e^{tA} の列で，異なる初期値に対する
$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ の解である.
e^A の列 $R_1, \ldots, R_n$ が 1 次従属ならば，$R_n = C_1R_1 + \cdots + C_{n-1}R_{n-1}$
（例えば）とできる．このとき，$e^{tA}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\\vdots\\C_{n-1}\\0\end{pmatrix}, e^{tA}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ の二つの異なる解
は $t = 1$ で交わってしまう（一意性に矛盾）.

行列の指数関数：注意

(2) $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$ は一般には成り立たないが，A と B が可換のとき（$AB = BA$）は成り立つ.

証明：$F_1(t) = e^{tA}e^{tB}, F_2(t) = e^{t(A+B)}$ とおくと，

$F_1'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A+B)e^{tA}e^{tB} = (A+B)F_1(t), \quad F_1(0) = I$

$(A^k B = A^{k-1}BA = \cdots = BA^k,\ Be^{tA} = B\sum \frac{t^k}{k!}A^k = e^{tA}B$ より$)$

同様に　　$F_2'(t) = (A+B)F_2(t), \quad F_2(0) = I$

$x'(t) = (A+B)x(t)$ の解の一意性より $F_1(t) = F_2(t)$．$t = 1$ とする．

行列の指数関数：注意

(2) $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$ は一般には成り立たないが，A と B が可換のとき（$AB = BA$）は成り立つ.

証明：$F_1(t) = e^{tA}e^{tB}, F_2(t) = e^{t(A+B)}$ とおくと，

$$F_1'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A+B)e^{tA}e^{tB} = (A+B)F_1(t), \quad F_1(0) = I$$

$$(A^k B = A^{k-1}BA = \cdots = BA^k,\ Be^{tA} = B\sum \tfrac{t^k}{k!}A^k = e^{tA}B \text{ より})$$

$$\text{同様に} \qquad F_2'(t) = (A+B)F_2(t), \quad F_2(0) = I$$

$$x'(t) = (A+B)x(t) \text{ の解の一意性より } F_1(t) = F_2(t). \quad t = 1 \text{ とする.}$$

行列の指数関数：注意

(2) $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$ は一般には成り立たないが，A と B が可換のとき（$AB = BA$）は成り立つ.

証明：$F_1(t) = e^{tA}e^{tB}, F_2(t) = e^{t(A+B)}$ とおくと，

$$F_1'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A+B)e^{tA}e^{tB} = (A+B)F_1(t), \quad F_1(0) = I$$

$(A^k B = A^{k-1}BA = \cdots = BA^k,\ Be^{tA} = B\sum \frac{t^k}{k!}A^k = e^{tA}B$ より$)$

同様に　　$F_2'(t) = (A+B)F_2(t), \quad F_2(0) = I$

$x'(t) = (A+B)x(t)$ の解の一意性より $F_1(t) = F_2(t)$. $t = 1$ とする.

行列の指数関数：注意

(2) $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$ は一般には成り立たないが，A と B が可換のとき（$AB = BA$）は成り立つ.

証明：$F_1(t) = e^{tA}e^{tB}, F_2(t) = e^{t(A+B)}$ とおくと，

$$F_1'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A+B)e^{tA}e^{tB} = (A+B)F_1(t), \quad F_1(0) = I$$

$(A^k B = A^{k-1}BA = \cdots = BA^k,\ Be^{tA} = B\sum \frac{t^k}{k!}A^k = e^{tA}B$ より）

同様に　　$F_2'(t) = (A+B)F_2(t), \quad F_2(0) = I$

$x'(t) = (A+B)x(t)$ の解の一意性より $F_1(t) = F_2(t)$. $t = 1$ とする.

行列の指数関数：注意

(2) $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$ は一般には成り立たないが，A と B が可換のとき（$AB = BA$）は成り立つ.

証明：$F_1(t) = e^{tA}e^{tB}, F_2(t) = e^{t(A+B)}$ とおくと，

$$F_1'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A+B)e^{tA}e^{tB} = (A+B)F_1(t), \quad F_1(0) = I$$

$(A^k B = A^{k-1}BA = \cdots = BA^k,\ Be^{tA} = B\sum \frac{t^k}{k!}A^k = e^{tA}B$ より$)$

同様に　　$F_2'(t) = (A+B)F_2(t), \quad F_2(0) = I$

$\boldsymbol{x}'(t) = (A+B)\boldsymbol{x}(t)$ の解の一意性より $F_1(t) = F_2(t)$. $t = 1$ とする.

行列の指数関数：注意

(2) $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$ は一般には成り立たないが，A と B が可換のとき（$AB = BA$）は成り立つ.

証明：$F_1(t) = e^{tA}e^{tB}, F_2(t) = e^{t(A+B)}$ とおくと，

$$F_1'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A+B)e^{tA}e^{tB} = (A+B)F_1(t), \quad F_1(0) = I$$

$(A^k B = A^{k-1}BA = \cdots = BA^k,\ Be^{tA} = B\sum \frac{t^k}{k!}A^k = e^{tA}B$ より$)$

同様に　　$F_2'(t) = (A+B)F_2(t), \quad F_2(0) = I$

$\boldsymbol{x}'(t) = (A+B)\boldsymbol{x}(t)$ の解の一意性より $F_1(t) = F_2(t)$. $t = 1$ とする.

e^{tA} を実際に計算する

(1) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 対角行列のとき $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ より

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \sum \frac{t^k}{k!}\lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum \frac{t^k}{k!}\lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

e^{tA} を実際に計算する

(1) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 対角行列のとき $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ より

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \sum \frac{t^k}{k!}\lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum \frac{t^k}{k!}\lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

e^{tA} を実際に計算する

(1) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 対角行列のとき $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ より

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \sum \frac{t^k}{k!}\lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum \frac{t^k}{k!}\lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

e^{tA} を実際に計算する

(2) A が対角化可能なとき，正則行列 T があって，

$$A = TDT^{-1}, \qquad D \ldots \text{対角行列}$$

$$A^k = (TDT^{-1})(TDT^{-1}) \cdots (TDT^{-1}) = TD^kT^{-1} \qquad \text{より}$$

$$e^{tA} = \sum \frac{t^k}{k!} TD^kT^{-1} = T\left(\sum \frac{t^k}{k!} D^k\right) T^{-1} = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$\Rightarrow$ A の固有値と固有ベクトルを求めれば，計算できる．

e^{tA} を実際に計算する

(2) A が対角化可能なとき，正則行列 T があって，

$$A = TDT^{-1}, \qquad D \ldots \text{対角行列}$$

$$A^k = (TDT^{-1})(TDT^{-1}) \cdots (TDT^{-1}) = TD^kT^{-1} \qquad \text{より}$$

$$e^{tA} = \sum \frac{t^k}{k!} TD^kT^{-1} = T\left(\sum \frac{t^k}{k!} D^k\right) T^{-1} = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$\Rightarrow$ A の固有値と固有ベクトルを求めれば，計算できる．

e^{tA} を実際に計算する

(2) A が対角化可能なとき，正則行列 T があって，

$$A = TDT^{-1}, \qquad D \ldots \text{対角行列}$$

$$A^k = (TDT^{-1})(TDT^{-1}) \cdots (TDT^{-1}) = TD^kT^{-1} \qquad \text{より}$$

$$e^{tA} = \sum \frac{t^k}{k!} TD^kT^{-1} = T\left(\sum \frac{t^k}{k!} D^k\right) T^{-1} = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$\Rightarrow$ A の固有値と固有ベクトルを求めれば，計算できる．

e^{tA} を実際に計算する

(2) A が対角化可能なとき，正則行列 T があって，

$$A = TDT^{-1}, \qquad D \ldots \text{対角行列}$$

$$A^k = (TDT^{-1})(TDT^{-1}) \cdots (TDT^{-1}) = TD^kT^{-1} \qquad \text{より}$$

$$e^{tA} = \sum \frac{t^k}{k!} TD^kT^{-1} = T\left(\sum \frac{t^k}{k!} D^k\right) T^{-1} = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$\Rightarrow$ A の固有値と固有ベクトルを求めれば，計算できる．

e^{tA} を実際に計算する

(2) A が対角化可能なとき，正則行列 T があって，

$$A = TDT^{-1}, \qquad D \ldots \text{対角行列}$$

$$A^k = (TDT^{-1})(TDT^{-1}) \cdots (TDT^{-1}) = TD^kT^{-1} \qquad \text{より}$$

$$e^{tA} = \sum \frac{t^k}{k!} TD^kT^{-1} = T\left(\sum \frac{t^k}{k!} D^k\right) T^{-1} = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$\Rightarrow$ A の固有値と固有ベクトルを求めれば，計算できる．

e^{tA} を実際に計算する

(3) 一般の A : $A = TJT^{-1}$, $J \ldots$ ジョルダンの標準形

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}, \qquad J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, r$$

$$e^{tA} = T\left(\sum \frac{t^k}{k!} J^k\right) T^{-1} = T \begin{pmatrix} \sum \frac{t^k}{k!} J_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum \frac{t^k}{k!} J_r^k \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$= T \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_r} \end{pmatrix} T^{-1}$$

e^{tA} を実際に計算する

(3) 一般の A : $A = TJT^{-1}$, $J \ldots$ ジョルダンの標準形

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}, \qquad J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, r$$

$$e^{tA} = T\left(\sum \frac{t^k}{k!} J^k\right) T^{-1} = T \begin{pmatrix} \sum \frac{t^k}{k!} J_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum \frac{t^k}{k!} J_r^k \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$= T \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_r} \end{pmatrix} T^{-1}$$

e^{tA} を実際に計算する

(3) 一般の A : $A = TJT^{-1}$, $J\ldots$ ジョルダンの標準形

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}, \qquad J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, r$$

$$e^{tA} = T\left(\sum \frac{t^k}{k!} J^k\right) T^{-1} = T \begin{pmatrix} \sum \frac{t^k}{k!} J_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum \frac{t^k}{k!} J_r^k \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$= T \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_r} \end{pmatrix} T^{-1}$$

e^{tA} を実際に計算する

補題

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}, \qquad \text{ならば} \qquad e^A = \begin{pmatrix} e^{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{A_r} \end{pmatrix}$$

証明：

$$A^2 = \begin{pmatrix} A_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r^2 \end{pmatrix}, \qquad e^A = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots$$

e^{tA} を実際に計算する

補題

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}, \qquad \text{ならば} \qquad e^A = \begin{pmatrix} e^{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{A_r} \end{pmatrix}$$

証明：

$$A^2 = \begin{pmatrix} A_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r^2 \end{pmatrix}, \qquad e^A = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots$$

e^{tA} を実際に計算する

あとは，e^{tJ_j} を求めればよい．次の ODE の解に関係する：

$$\boldsymbol{x}' = J_j\boldsymbol{x} \begin{cases} x_1' &= \lambda_j x_1 + x_2 \\ x_2' &= \lambda_j x_2 + x_3 \\ &\vdots \\ x_{i-1}' &= \lambda_j x_{i-1} + x_i \\ x_i' &= \lambda_j x_i \end{cases} \qquad \text{解は} \begin{cases} x_i &= C_i e^{\lambda_j t} \\ x_{i-1} &= (C_{i-1} + C_i t) e^{\lambda_j t} \\ &\vdots \\ x_1 &= \left(C_1 + C_2 t + \cdots + C_i \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}\right) e^{\lambda_j t} \end{cases}$$

$$\text{よって，} \quad e^{tJ_j} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{i-2}}{(i-2)!} \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_j t}$$

e^{tA} を実際に計算する

あとは，e^{tJ_j} を求めればよい．次の ODE の解に関係する：

$$\boldsymbol{x}' = J_j\boldsymbol{x} \begin{cases} x_1' &= \lambda_j x_1 + x_2 \\ x_2' &= \lambda_j x_2 + x_3 \\ &\vdots \\ x_{i-1}' &= \lambda_j x_{i-1} + x_i \\ x_i' &= \lambda_j x_i \end{cases} \qquad \text{解は} \begin{cases} x_i &= C_i e^{\lambda_j t} \\ x_{i-1} &= (C_{i-1} + C_i t) e^{\lambda_j t} \\ &\vdots \\ x_1 &= \left(C_1 + C_2 t + \cdots + C_i \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}\right) e^{\lambda_j t} \end{cases}$$

よって，$$e^{tJ_j} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{i-2}}{(i-2)!} \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_j t}$$

e^{tA} を実際に計算する

あとは，e^{tJ_j} を求めればよい．次の ODE の解に関係する：

$$\boldsymbol{x}' = J_j \boldsymbol{x} \begin{cases} x_1' &= \lambda_j x_1 + x_2 \\ x_2' &= \lambda_j x_2 + x_3 \\ &\vdots \\ x_{i-1}' &= \lambda_j x_{i-1} + x_i \\ x_i' &= \lambda_j x_i \end{cases} \qquad \text{解は} \begin{cases} x_i &= C_i e^{\lambda_j t} \\ x_{i-1} &= (C_{i-1} + C_i t) e^{\lambda_j t} \\ &\vdots \\ x_1 &= \left(C_1 + C_2 t + \cdots + C_i \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \right) e^{\lambda_j t} \end{cases}$$

よって，
$$e^{tJ_j} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{i-2}}{(i-2)!} \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_j t}$$

例：$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\text{rank} = 1 \quad \Rightarrow \quad$ 固有ベクトルは一本だけ： $\boldsymbol{v}_1 = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

一般化固有ベクトル：$(A - 2I)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1$ より $\boldsymbol{v}_2 = c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ジョルダン標準形：$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}e^{2t} \begin{pmatrix} -t+3 & t \\ t & t+3 \end{pmatrix}$$

例：$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\text{rank} = 1 \quad \Rightarrow \quad$ 固有ベクトルは一本だけ： $\boldsymbol{v}_1 = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

一般化固有ベクトル：$(A - 2I)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1$ より $\boldsymbol{v}_2 = c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ジョルダン標準形：$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} e^{2t} \begin{pmatrix} -t+3 & t \\ t & t+3 \end{pmatrix}$$

例：$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\text{rank} = 1 \quad \Rightarrow \quad$ 固有ベクトルは一本だけ： $\boldsymbol{v}_1 = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

一般化固有ベクトル：$(A - 2I)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1$ より $\boldsymbol{v}_2 = c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ジョルダン標準形：$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} e^{2t} \begin{pmatrix} -t+3 & t \\ t & t+3 \end{pmatrix}$$

例：$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\text{rank} = 1 \quad \Rightarrow \quad$ 固有ベクトルは一本だけ： $\quad \boldsymbol{v}_1 = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

一般化固有ベクトル：$(A - 2I)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1$ より $\quad \boldsymbol{v}_2 = c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ジョルダン標準形：$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} e^{2t} \begin{pmatrix} -t+3 & t \\ t & t+3 \end{pmatrix}$$

例：$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\text{rank} = 1 \quad \Rightarrow \quad$ 固有ベクトルは一本だけ： $\quad \boldsymbol{v}_1 = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

一般化固有ベクトル：$(A - 2I)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1$ より $\quad \boldsymbol{v}_2 = c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ジョルダン標準形：$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} e^{2t} \begin{pmatrix} -t+3 & t \\ t & t+3 \end{pmatrix}$$

例：$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\text{rank} = 1 \quad \Rightarrow \quad$ 固有ベクトルは一本だけ： $\quad \boldsymbol{v}_1 = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

一般化固有ベクトル：$(A - 2I)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1$ より $\quad \boldsymbol{v}_2 = c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ジョルダン標準形：$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} e^{2t} \begin{pmatrix} -t+3 & t \\ t & t+3 \end{pmatrix}$$

例：$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\text{rank} = 1 \quad \Rightarrow \quad$ 固有ベクトルは一本だけ： $\quad \boldsymbol{v}_1 = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

一般化固有ベクトル：$(A - 2I)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1$ より $\quad \boldsymbol{v}_2 = c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ジョルダン標準形：$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}e^{2t} \begin{pmatrix} -t+3 & t \\ t & t+3 \end{pmatrix}$$

微分積分学続論 II： 第 8 回

Karel Svadlenka

2020 年 6 月 3 日

■定数係数連立 1 階線型 ODE

$$(*)\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ & \vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

(IV) 初期条件： $x_1(t_0) = x_1^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0$

$$(*)\begin{cases} \boldsymbol{x}' &= A\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}^0 \end{cases} \qquad \text{ただし，} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- 前回は行列の指数関数を用いて解いた
- 今回は 射影行列の方法 で解く（行列のスペクトル分解）

■線形代数のおさらい

A ... $n \times n$ 行列

$$A \text{ の固有値} \qquad A\boldsymbol{x} = \underbrace{\lambda}_{\text{固有値}} \underbrace{\boldsymbol{x}}_{\text{固有ベクトル}}, \qquad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とも書けるので，λ は

$$\Phi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

という多項式の根である．

Φ の根（とその重複度）を $\lambda_1(m_1), \ldots, \lambda_r(m_r)$ とする．

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

■一般固有空間

λ_i の 一般（広義）固有空間 ：

$$G_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n;\ (A - \lambda_i I)^{m_i}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

- G_{λ_i} に λ_i に対する固有ベクトルが含まれる
- G_{λ_i} は線型部分空間である
- G_{λ_i} の次元は m_i

- つぎが成り立つ：

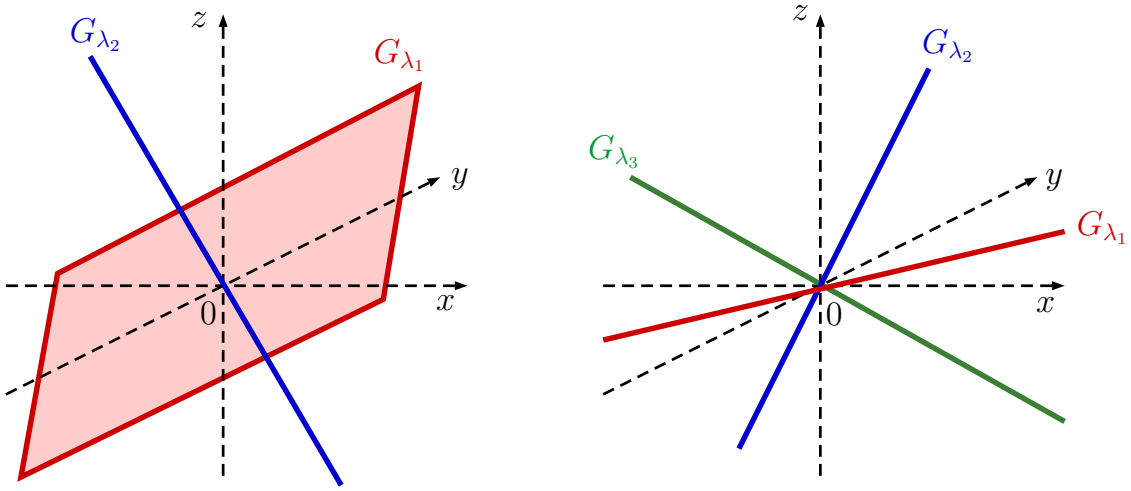
$$\mathbb{C}^n = G_{\lambda_1} \oplus G_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus G_{\lambda_r}$$

ここで，$\oplus$ は直和 を意味する．すなわち，V, W が二つの部分空間のとき，$S = V \oplus W$ とは

  - $V \cap W = \{0\}$
  - $S = \{v + w;\ v \in V,\ w \in W\}$

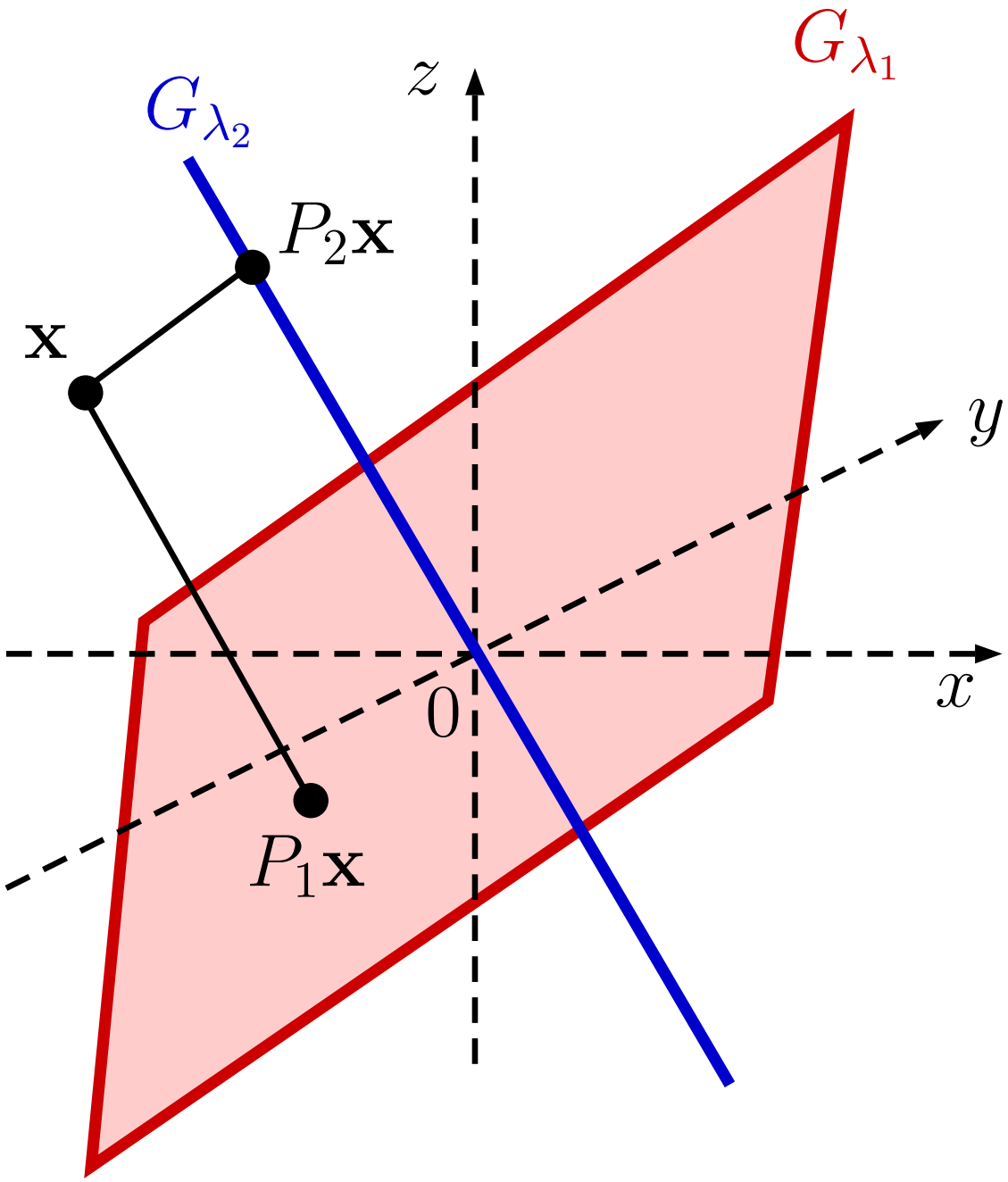
■一般固有空間：例

$n = 3$ のとき



■射影行列

任意の点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ の $G_{\lambda_1}, \ldots, G_{\lambda_r}$ への射影 $P_1\boldsymbol{x}, \ldots, P_r\boldsymbol{x}$ を考える． ここで，$P_1, \ldots, P_r$ は次を満たす $n \times n$ 行列：



(a) $P_i^2 = P_i, \quad i = 1, \ldots, r$ （射影の定義）
(b) $P_i : \mathbb{C}^n \to G_{\lambda_i}$ （P_i の値域は G_{λ_i}）
(c) $P_i P_j = 0, \quad i, j = 1, \ldots, r, \ \ i \neq j$
(d) $P_1 + P_2 + \cdots + P_r = I$

(a)-(d) を全て満たす $P_1, \ldots, P_r$ は 一意的に存在する.

■射影行列の性質

定理：性質 **(1)**
$j = 1, \ldots, r$ に対して，自然数 $\ell_j \in [1, m_j]$ が存在して

$$(A - \lambda_j I)^{\ell_j - 1} P_j \neq O, \qquad (A - \lambda_j I)^{\ell_j} P_j = O.$$

証明 : $(A-\lambda_j I)^{m_j}\underbrace{P_j\boldsymbol{x}}_{\in G_{\lambda_j}}=0 \quad \forall \boldsymbol{x}$ より $(A-\lambda_j I)^{m_j}P_j=O$ あとは，順番に $(A-\lambda_j I)^{m_j-1}P_j,\ldots,(A-\lambda_j I)^0 P_j$ を見ていけばよい

定理：性質 (2)
(1) の ℓ_j に対して，φ を以下のようにおくと，$\varphi(A)=O$.

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\ell_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{\ell_r} \qquad \text{（最小多項式）}$$

証明 : $\varphi(A)=\varphi(A)(P_1+\cdots+P_r), \quad \varphi(A)P_j=O, \ \ j=1,\ldots,r.$ 注： $\Phi(A)=O$ は Hamilton-Cayley の定理

■射影行列の性質

定理：性質 (3)
$j=1,\ldots,r$ に対して，

$$P_j=h_j(A)(A-\lambda_1 I)^{\ell_1}\cdots(A-\lambda_{j-1}I)^{\ell_{j-1}}(A-\lambda_{j+1}I)^{\ell_{j+1}}\cdots(A-\lambda_r I)^{\ell_r}.$$

ただし，$h_j(A)$ は分解

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)}=\frac{h_1(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{\ell_1}}+\cdots+\frac{h_r(\lambda)}{(\lambda-\lambda_r)^{\ell_r}} \tag{1}$$

により一意的に決まる（高々 (ℓ_j-1)-次多項式）.

証明 : (1) に $\varphi(\lambda)$ をかけると，

$$1=h_1(\lambda)g_1(\lambda)+\cdots+h_r(\lambda)g_r(\lambda)$$

ただし， $g_j(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\ell_1}\cdots(\lambda-\lambda_{j-1})^{\ell_{j-1}}(\lambda-\lambda_{j+1})^{\ell_{j+1}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{\ell_r}$

■射影行列の性質
証明 : (1) に $\varphi(\lambda)$ をかけると，

$$1=h_1(\lambda)g_1(\lambda)+\cdots+h_r(\lambda)g_r(\lambda)$$

ただし， $g_j(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\ell_1}\cdots(\lambda-\lambda_{j-1})^{\ell_{j-1}}(\lambda-\lambda_{j+1})^{\ell_{j+1}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{\ell_r}$

λ に A を代入して，両辺に任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$ をかけると

$$\boldsymbol{x}=h_1(A)g_1(A)\boldsymbol{x}+\cdots+h_r(A)g_r(A)\boldsymbol{x}$$

一方 $\qquad \boldsymbol{x}=P_1\boldsymbol{x}+\cdots+P_r\boldsymbol{x}$

ここで，$(A-\lambda_j I)^{\ell_j}h_j(A)g_j(A)\boldsymbol{x}=h_j(A)\varphi(A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ より

$$h_j(A)g_j(A)\boldsymbol{x}\in G_{\lambda_j}.$$

直和分解の一意性より $P_j=h_j(A)g_j(A) \quad j=1,\ldots,r.$

■射影行列の性質

定理 **(4)**：一般スペクトル分解・ジョルダン分解

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r + N$$

ただし，N は冪零（m があって，$N^m = O$）で，A と P_j は可換.

証明 :

$$\begin{aligned} N &= A - \lambda_1 P_1 - \cdots - \lambda_r P_r \\ &= A(P_1 + \cdots + P_r) - \lambda_1 P_1 - \cdots - \lambda_r P_r \\ &= (A - \lambda_1 I)P_1 + \cdots + (A - \lambda_r I)P_r \end{aligned}$$

に対して直接，確かめる.

■射影行列の性質

定理 **(5)**

次が同値である：

(i) A は対角化可能

(ii) $A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r \quad \ldots$ スペクトル分解

(iii) $G_{\lambda_j} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n;\ (A - \lambda_j I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$

(iv) $\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_r)$

このとき，

$$P_j = \frac{(A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_{j-1} I)(A - \lambda_{j+1} I) \cdots (A - \lambda_r I)}{(\lambda_j - \lambda_1) \cdots (\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1}) \cdots (\lambda_j - \lambda_r)}, \quad j = 1, \ldots, r$$

例えば，A が実対称行列のとき，または φ が単根のみもつとき.

■射影行列による行列の指数関数

定理

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} \left\{ I + \frac{t}{1!}(A - \lambda_j I) + \cdots + \frac{t^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!}(A - \lambda_j I)^{m_j - 1} \right\} P_j \tag{2}$$

注意：

- t の冪乗は本当は $\ell_j - 1$ までですが，ℓ_j を求めるのが面倒だから，$m_j - 1$ を用いている.
- A が対角化可能なとき： $e^{tA} = e^{\lambda_1 t} P_1 + \cdots + e^{\lambda_r t} P_r$

証明 : $e^{tA} = e^{tA}(P_1 + \cdots + P_r)$

$$e^{tA} P_j = e^{t(A - \lambda_j I) + t\lambda_j I} P_j = \underbrace{e^{t\lambda_j I}}_{= e^{\lambda_j t} I} \underbrace{e^{t(A - \lambda_j I)} P_j}_{= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_j I)^k P_j = \sum_{k=0}^{\ell_j - 1} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_j I)^k P_j}$$

■例：$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$ 単根 $\Rightarrow$ 対角化可能

$$P_1 = \frac{A-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \frac{A-\lambda_1 I}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{-t}+2e^{4t} & -3e^{-t}+3e^{4t} \\ -2e^{-t}+2e^{4t} & 2e^{-t}+3e^{4t} \end{pmatrix}$$

■例：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda+2\right), \qquad \Phi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$\lambda_1 = 1$ $(m_1 = 2)$, $\lambda_2 = 2$ $(m_2 = 1)$: これで対角化可能かわからない

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda-1)^2(\lambda-2)} = \frac{-\lambda}{(\lambda-1)^2} + \frac{1}{\lambda-2}$$

$$1 = \underbrace{-\lambda}_{h_1}\cdot\underbrace{(\lambda-2)}_{g_1} + \underbrace{1}_{h_2}\cdot\underbrace{(\lambda-1)^2}_{g_2}$$

$$P_1 = h_1(A)g_1(A) = -A(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$P_2 = h_2(A)g_2(A) = (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

■例：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_1 = h_1(A)g_1(A) = -A(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$P_2 = h_2(A)g_2(A) = (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t}\left(I + \frac{t}{1!}(A-\lambda_1 I)\right)P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2$$
$$= e^t\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_1}\right)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} + e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_1P_1 \neq O$ なので，A は対角化可能ではない.

微分積分学続論 II： 第 8 回

Karel Svadlenka

京都大学大学院理学研究科 数学教室

2020 年 6 月 3 日

定数係数連立 1 階線型 ODE

$$(*)\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

(IV) 初期条件： $x_1(t_0) = x_1^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0$

$$(*)\begin{cases} \boldsymbol{x}' &= A\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}^0 \end{cases} \qquad \text{ただし，} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- 前回は行列の指数関数を用いて解いた
- 今回は 射影行列の方法 で解く（行列のスペクトル分解）

定数係数連立 1 階線型 ODE

$$(*)\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

(IV) 初期条件： $x_1(t_0) = x_1^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0$

$$(*)\begin{cases} \boldsymbol{x}' &= A\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}^0 \end{cases} \qquad \text{ただし，} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- 前回は行列の指数関数を用いて解いた
- 今回は 射影行列の方法 で解く（行列のスペクトル分解）

定数係数連立 1 階線型 ODE

$$(*)\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

(IV) 初期条件： $x_1(t_0) = x_1^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0$

$$(*)\begin{cases} \boldsymbol{x}' &= A\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}^0 \end{cases} \qquad \text{ただし，} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- 前回は行列の指数関数を用いて解いた
- 今回は 射影行列の方法 で解く（行列のスペクトル分解）

定数係数連立 1 階線型 ODE

$$(*)\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

(IV) 初期条件： $x_1(t_0) = x_1^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0$

$$(*)\begin{cases} \boldsymbol{x}' &= A\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}^0 \end{cases} \qquad \text{ただし，} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- 前回は行列の指数関数を用いて解いた
- 今回は 射影行列の方法 で解く（行列のスペクトル分解）

線形代数のおさらい

A ... $n \times n$ 行列

A の固有値 $\qquad A\boldsymbol{x} = \underbrace{\lambda}_{\text{固有値}} \underbrace{\boldsymbol{x}}_{\text{固有ベクトル}}, \qquad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とも書けるので，λ は

$$\Phi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

という多項式の根である．

Φ の根（とその重複度）を $\lambda_1(m_1), \ldots, \lambda_r(m_r)$ とする．

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

線形代数のおさらい

A ... $n \times n$ 行列

A の固有値　　$A\boldsymbol{x} = \underbrace{\lambda}_{\text{固有値}} \quad \underbrace{\boldsymbol{x}}_{\text{固有ベクトル}}$,　　$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とも書けるので，λ は

$$\Phi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

という多項式の根である.

Φ の根（とその重複度）を $\lambda_1(m_1), \ldots, \lambda_r(m_r)$ とする.

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

線形代数のおさらい

A ... $n \times n$ 行列

A の固有値　　$A\boldsymbol{x} = \underbrace{\lambda}_{\text{固有値}} \quad \underbrace{\boldsymbol{x}}_{\text{固有ベクトル}}$,　　$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とも書けるので, λ は

$$\Phi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

という多項式の根である.

Φ の根（とその重複度）を $\lambda_1(m_1), \ldots, \lambda_r(m_r)$ とする.

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

線形代数のおさらい

A ... $n \times n$ 行列

$$A \text{ の固有値} \qquad A\boldsymbol{x} = \underbrace{\lambda}_{\text{固有値}} \quad \underbrace{\boldsymbol{x}}_{\text{固有ベクトル}}, \qquad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とも書けるので，λ は

$$\Phi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

という多項式の根である.

Φ の根（とその重複度）を $\lambda_1(m_1), \ldots, \lambda_r(m_r)$ とする.

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

線形代数のおさらい

A ... $n \times n$ 行列

$$A \text{ の固有値} \qquad A\boldsymbol{x} = \underbrace{\lambda}_{\text{固有値}} \quad \underbrace{\boldsymbol{x}}_{\text{固有ベクトル}}, \qquad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とも書けるので，λ は

$$\Phi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

という多項式の根である.

Φ の根（とその重複度）を $\lambda_1(m_1), \ldots, \lambda_r(m_r)$ とする.

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

線形代数のおさらい

A ... $n \times n$ 行列

$$A \text{ の固有値} \qquad A\boldsymbol{x} = \underbrace{\lambda}_{\text{固有値}} \quad \underbrace{\boldsymbol{x}}_{\text{固有ベクトル}}, \qquad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とも書けるので，λ は

$$\Phi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

という多項式の根である.

Φ の根（とその重複度）を $\lambda_1(m_1), \ldots, \lambda_r(m_r)$ とする.

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

一般固有空間

λ_i の **一般（広義）固有空間** :

$$G_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n;\ (A - \lambda_i I)^{m_i} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

- G_{λ_i} に λ_i に対する固有ベクトルが含まれる
- G_{λ_i} は線型部分空間である
- G_{λ_i} の次元は m_i
- つぎが成り立つ :

$$\mathbb{C}^n = G_{\lambda_1} \oplus G_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus G_{\lambda_r}$$

ここで，$\oplus$ は直和 を意味する．すなわち，V, W が二つの部分空間のとき，$S = V \oplus W$ とは

- $V \cap W = \{0\}$
- $S = \{v + w;\ v \in V,\ w \in W\}$

一般固有空間

λ_i の **一般（広義）固有空間** ：

$$G_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n;\ (A - \lambda_i I)^{m_i} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

- G_{λ_i} に λ_i に対する固有ベクトルが含まれる
- G_{λ_i} は線型部分空間である
- G_{λ_i} の次元は m_i
- つぎが成り立つ：

$$\mathbb{C}^n = G_{\lambda_1} \oplus G_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus G_{\lambda_r}$$

ここで，$\oplus$ は直和 を意味する．すなわち，V, W が二つの部分空間のとき，$S = V \oplus W$ とは

- $V \cap W = \{0\}$
- $S = \{v + w;\ v \in V,\ w \in W\}$

一般固有空間

λ_i の **一般（広義）固有空間** ：

$$G_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n;\ (A - \lambda_i I)^{m_i} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

- G_{λ_i} に λ_i に対する固有ベクトルが含まれる
- G_{λ_i} は線型部分空間である
- G_{λ_i} の次元は m_i
- つぎが成り立つ：

$$\mathbb{C}^n = G_{\lambda_1} \oplus G_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus G_{\lambda_r}$$

ここで，$\oplus$ は直和 を意味する．すなわち，V, W が二つの部分空間のとき，$S = V \oplus W$ とは

- $V \cap W = \{0\}$
- $S = \{v + w;\ v \in V,\ w \in W\}$

一般固有空間

λ_i の **一般（広義）固有空間** ：

$$G_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n;\ (A - \lambda_i I)^{m_i} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

- G_{λ_i} に λ_i に対する固有ベクトルが含まれる
- G_{λ_i} は線型部分空間である
- G_{λ_i} の次元は m_i
- つぎが成り立つ：

$$\mathbb{C}^n = G_{\lambda_1} \oplus G_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus G_{\lambda_r}$$

ここで，$\oplus$ は直和 を意味する．すなわち，V, W が二つの部分空間のとき，$S = V \oplus W$ とは

- $V \cap W = \{0\}$
- $S = \{v + w;\ v \in V,\ w \in W\}$

一般固有空間

λ_i の **一般（広義）固有空間** ：

$$G_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n;\ (A - \lambda_i I)^{m_i} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

- G_{λ_i} に λ_i に対する固有ベクトルが含まれる
- G_{λ_i} は線型部分空間である
- G_{λ_i} の次元は m_i
- つぎが成り立つ：

$$\mathbb{C}^n = G_{\lambda_1} \oplus G_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus G_{\lambda_r}$$

ここで，$\oplus$ は直和 を意味する．すなわち，V, W が二つの部分空間のとき，$S = V \oplus W$ とは

- $V \cap W = \{0\}$
- $S = \{v + w;\ v \in V, w \in W\}$

一般固有空間

λ_i の **一般（広義）固有空間** ：

$$G_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n;\ (A - \lambda_i I)^{m_i} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

- G_{λ_i} に λ_i に対する固有ベクトルが含まれる
- G_{λ_i} は線型部分空間である
- G_{λ_i} の次元は m_i
- つぎが成り立つ：

$$\mathbb{C}^n = G_{\lambda_1} \oplus G_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus G_{\lambda_r}$$

ここで，$\oplus$ は直和 を意味する．すなわち，V, W が二つの部分空間のとき，$S = V \oplus W$ とは

- $V \cap W = \{0\}$
- $S = \{v + w;\ v \in V, w \in W\}$

一般固有空間

λ_i の **一般（広義）固有空間** ：

$$G_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n;\ (A - \lambda_i I)^{m_i} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

- G_{λ_i} に λ_i に対する固有ベクトルが含まれる
- G_{λ_i} は線型部分空間である
- G_{λ_i} の次元は m_i
- つぎが成り立つ：

$$\mathbb{C}^n = G_{\lambda_1} \oplus G_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus G_{\lambda_r}$$

ここで，$\oplus$ は直和 を意味する．すなわち，V, W が二つの部分空間のとき，$S = V \oplus W$ とは

- $V \cap W = \{0\}$
- $S = \{v + w;\ v \in V, w \in W\}$

一般固有空間

λ_i の **一般（広義）固有空間** ：

$$G_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n;\ (A - \lambda_i I)^{m_i} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

- G_{λ_i} に λ_i に対する固有ベクトルが含まれる
- G_{λ_i} は線型部分空間である
- G_{λ_i} の次元は m_i
- つぎが成り立つ：

$$\mathbb{C}^n = G_{\lambda_1} \oplus G_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus G_{\lambda_r}$$

ここで，$\oplus$ は直和 を意味する．すなわち，V, W が二つの部分空間のとき，$S = V \oplus W$ とは

- $V \cap W = \{0\}$
- $S = \{v + w;\ v \in V,\ w \in W\}$

一般固有空間

λ_i の **一般（広義）固有空間** ：

$$G_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n;\ (A - \lambda_i I)^{m_i} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

- G_{λ_i} に λ_i に対する固有ベクトルが含まれる
- G_{λ_i} は線型部分空間である
- G_{λ_i} の次元は m_i
- つぎが成り立つ：

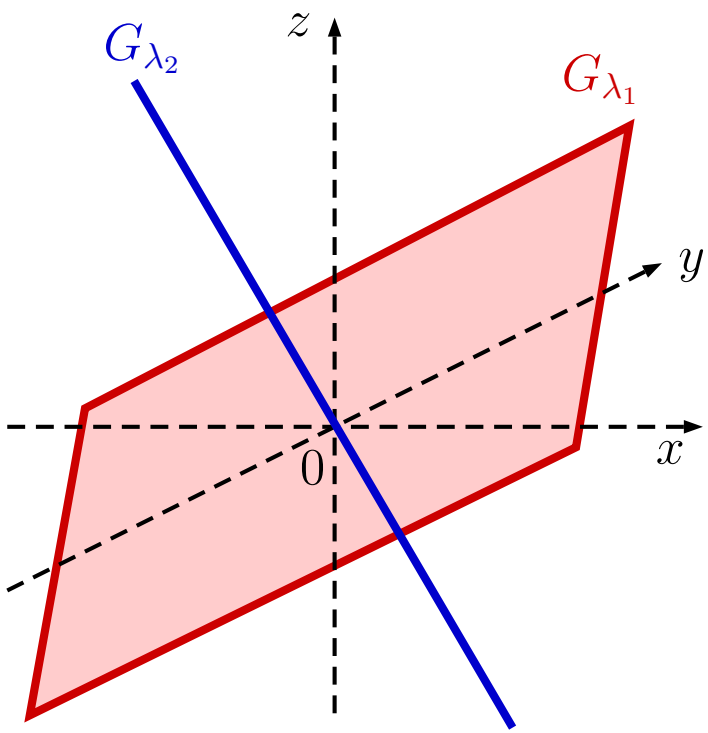
$$\mathbb{C}^n = G_{\lambda_1} \oplus G_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus G_{\lambda_r}$$

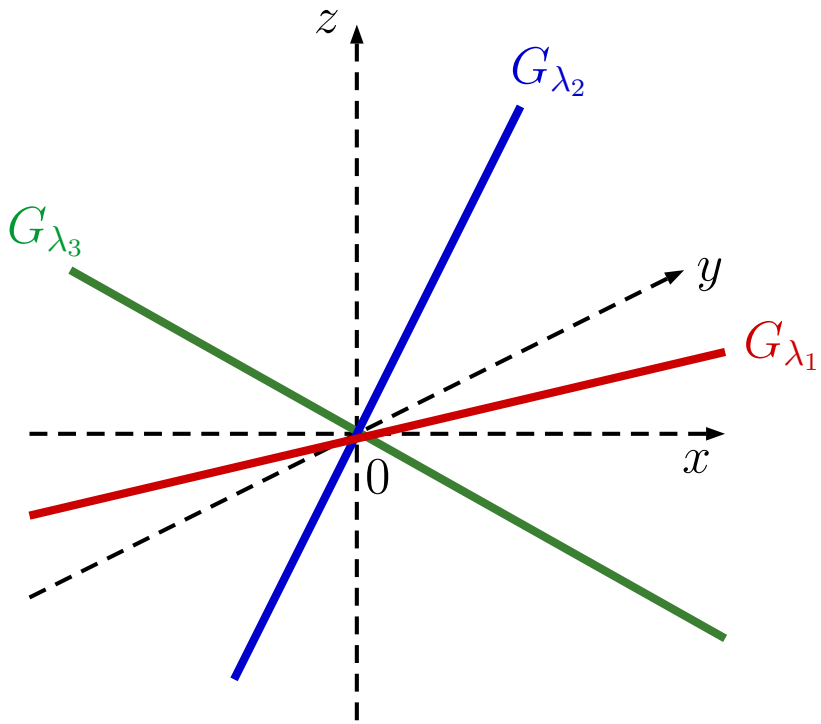
ここで，$\oplus$ は直和 を意味する．すなわち，V, W が二つの部分空間のとき，$S = V \oplus W$ とは

- $V \cap W = \{0\}$
- $S = \{v + w;\ v \in V, w \in W\}$

一般固有空間：例

$n = 3$ のとき

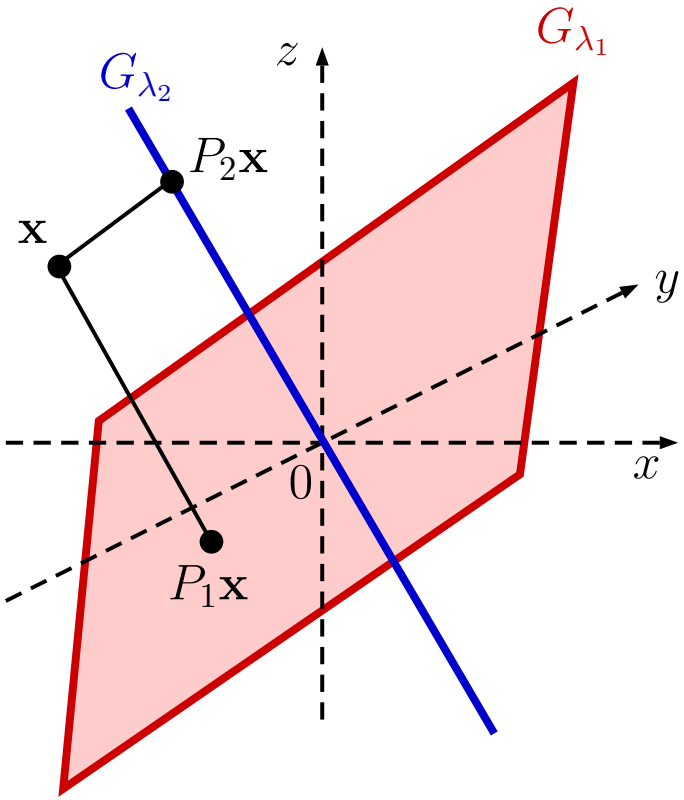




射影行列

任意の点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ の $G_{\lambda_1}, \ldots, G_{\lambda_r}$ への射影 $P_1\boldsymbol{x}, \ldots, P_r\boldsymbol{x}$ を考える.

ここで, $P_1, \ldots, P_r$ は次を満たす $n \times n$ 行列：



(a) $P_i^2 = P_i, \quad i = 1, \ldots, r$ （射影の定義）

(b) $P_i : \mathbb{C}^n \to G_{\lambda_i}$ （P_i の値域は G_{λ_i}）

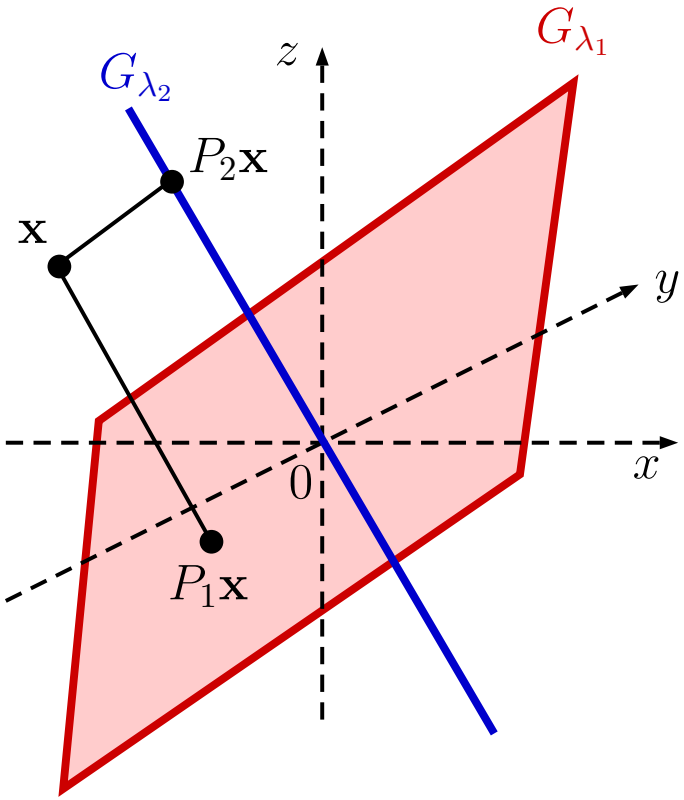
(c) $P_i P_j = 0, \quad i, j = 1, \ldots, r, \ i \neq j$

(d) $P_1 + P_2 + \cdots + P_r = I$

(a)-(d) を全て満たす $P_1, \ldots, P_r$ は一意的に存在する.

射影行列

任意の点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ の $G_{\lambda_1}, \ldots, G_{\lambda_r}$ への射影 $P_1\boldsymbol{x}, \ldots, P_r\boldsymbol{x}$ を考える.
ここで，$P_1, \ldots, P_r$ は次を満たす $n \times n$ 行列：



(a) $P_i^2 = P_i, \quad i = 1, \ldots, r$ （射影の定義）

(b) $P_i : \mathbb{C}^n \to G_{\lambda_i}$ （P_i の値域は G_{λ_i}）

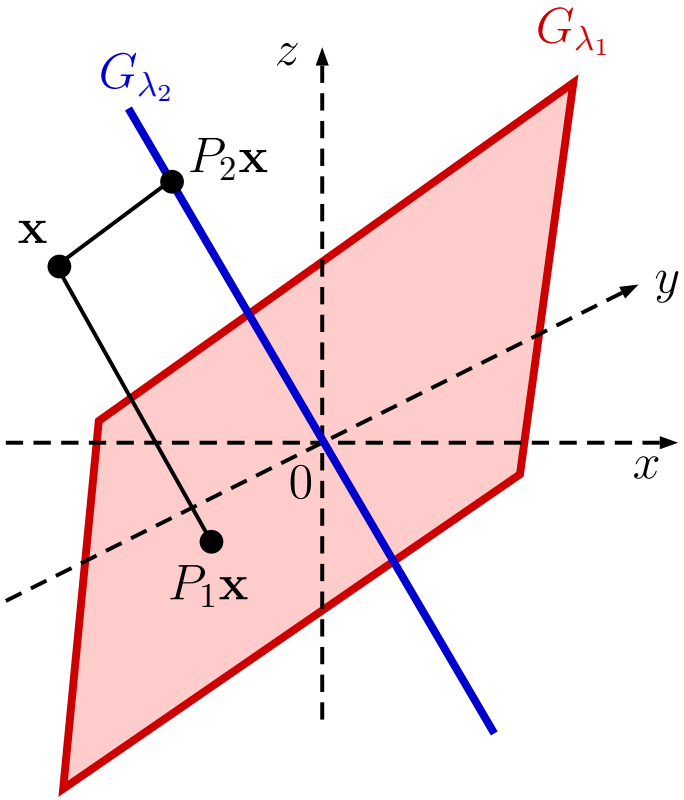
(c) $P_i P_j = 0, \quad i, j = 1, \ldots, r, \quad i \neq j$

(d) $P_1 + P_2 + \cdots + P_r = I$

(a)-(d) を全て満たす $P_1, \ldots, P_r$ は一意的に存在する.

射影行列

任意の点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ の $G_{\lambda_1}, \ldots, G_{\lambda_r}$ への射影 $P_1\boldsymbol{x}, \ldots, P_r\boldsymbol{x}$ を考える.
ここで，$P_1, \ldots, P_r$ は次を満たす $n \times n$ 行列：



(a) $P_i^2 = P_i, \quad i = 1, \ldots, r$ （射影の定義）

(b) $P_i : \mathbb{C}^n \to G_{\lambda_i}$ （P_i の値域は G_{λ_i}）

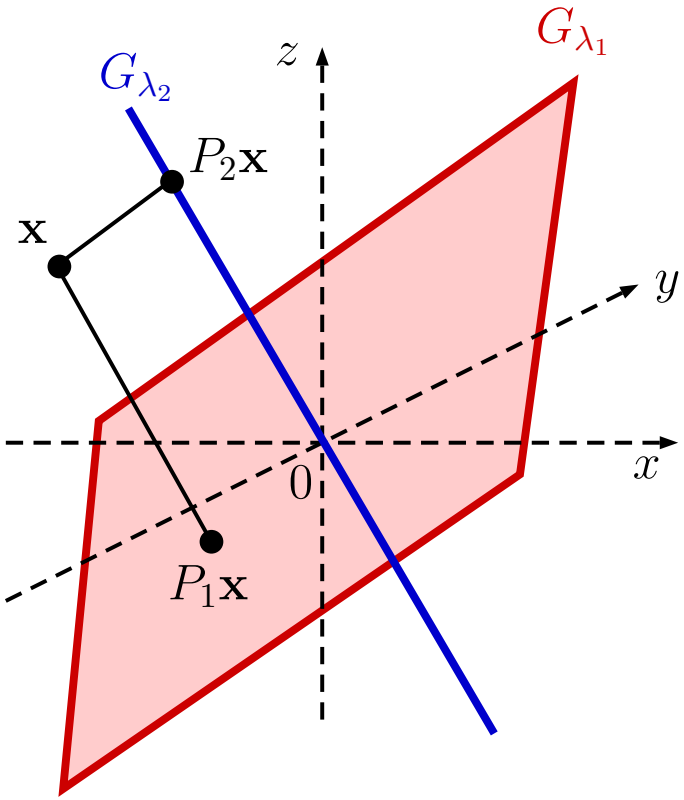
(c) $P_i P_j = 0, \quad i, j = 1, \ldots, r, \quad i \neq j$

(d) $P_1 + P_2 + \cdots + P_r = I$

(a)-(d) を全て満たす $P_1, \ldots, P_r$ は一意的に存在する.

射影行列

任意の点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ の $G_{\lambda_1}, \ldots, G_{\lambda_r}$ への射影 $P_1\boldsymbol{x}, \ldots, P_r\boldsymbol{x}$ を考える.
ここで, $P_1, \ldots, P_r$ は次を満たす $n \times n$ 行列 :



(a) $P_i^2 = P_i, \quad i = 1, \ldots, r$ （射影の定義）

(b) $P_i : \mathbb{C}^n \to G_{\lambda_i}$ （P_i の値域は G_{λ_i}）

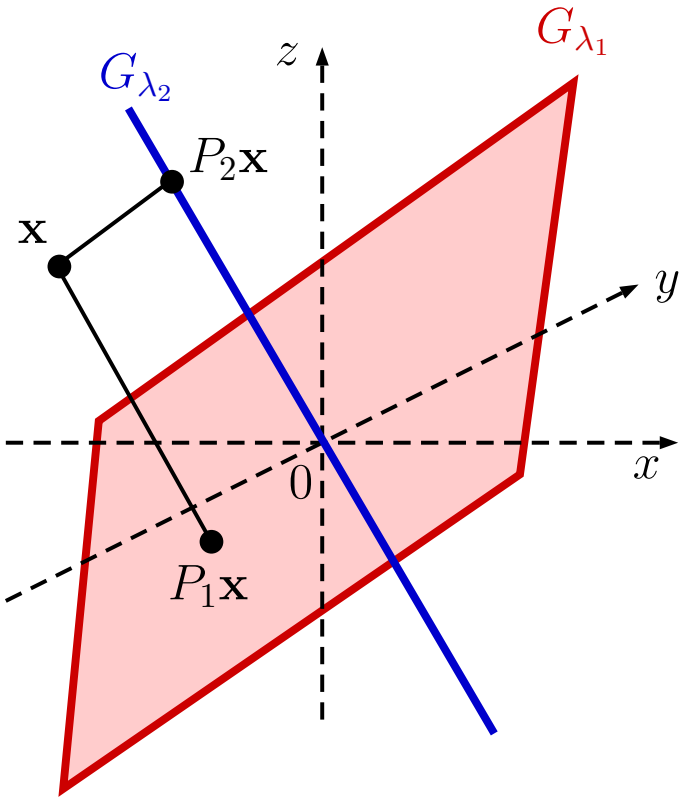
(c) $P_i P_j = 0, \quad i, j = 1, \ldots, r, \quad i \neq j$

(d) $P_1 + P_2 + \cdots + P_r = I$

(a)-(d) を全て満たす $P_1, \ldots, P_r$ は一意的に存在する.

射影行列

任意の点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ の $G_{\lambda_1}, \ldots, G_{\lambda_r}$ への射影 $P_1\boldsymbol{x}, \ldots, P_r\boldsymbol{x}$ を考える.
ここで，$P_1, \ldots, P_r$ は次を満たす $n \times n$ 行列：



(a) $P_i^2 = P_i, \quad i = 1, \ldots, r$ （射影の定義）

(b) $P_i : \mathbb{C}^n \to G_{\lambda_i}$ （P_i の値域は G_{λ_i}）

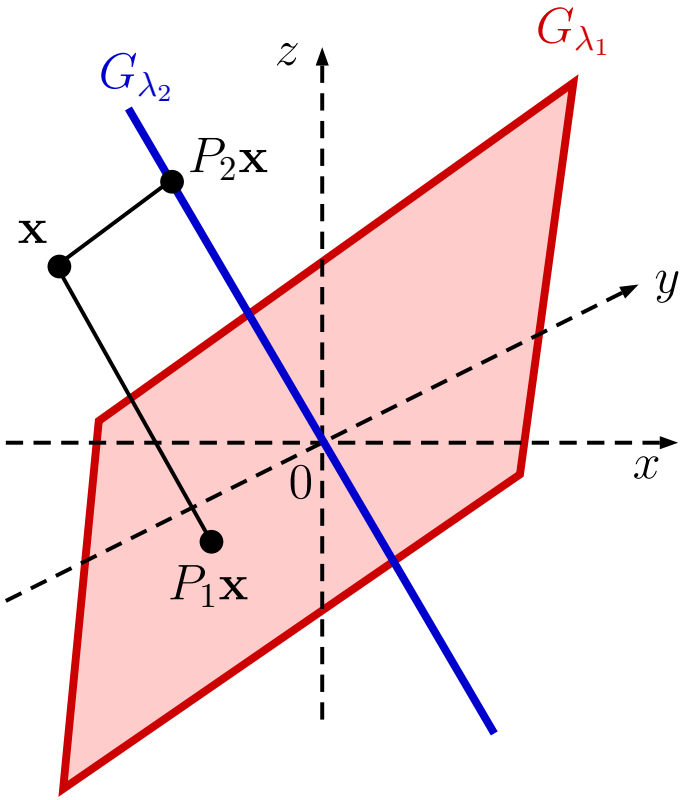
(c) $P_i P_j = 0, \quad i, j = 1, \ldots, r, \quad i \neq j$

(d) $P_1 + P_2 + \cdots + P_r = I$

(a)-(d) を全て満たす $P_1, \ldots, P_r$ は一意的に存在する.

射影行列

任意の点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ の $G_{\lambda_1}, \ldots, G_{\lambda_r}$ への射影 $P_1\boldsymbol{x}, \ldots, P_r\boldsymbol{x}$ を考える.
ここで, $P_1, \ldots, P_r$ は次を満たす $n \times n$ 行列 :



(a) $P_i^2 = P_i, \quad i = 1, \ldots, r$ （射影の定義）

(b) $P_i : \mathbb{C}^n \to G_{\lambda_i}$ （P_i の値域は G_{λ_i}）

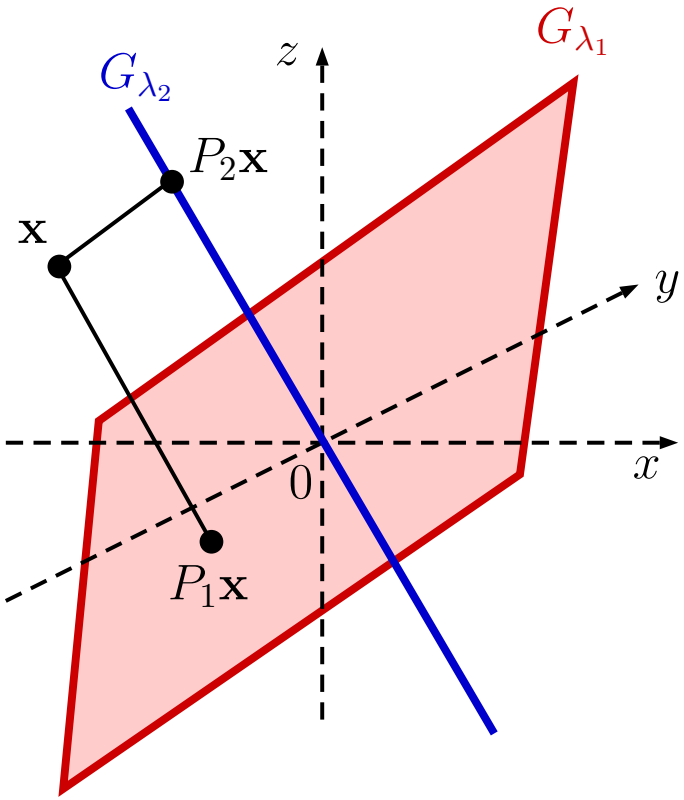
(c) $P_i P_j = 0, \quad i, j = 1, \ldots, r, \quad i \neq j$

(d) $P_1 + P_2 + \cdots + P_r = I$

(a)-(d) を全て満たす $P_1, \ldots, P_r$ は一意的に存在する.

射影行列

任意の点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ の $G_{\lambda_1}, \ldots, G_{\lambda_r}$ への射影 $P_1\boldsymbol{x}, \ldots, P_r\boldsymbol{x}$ を考える.
ここで, $P_1, \ldots, P_r$ は次を満たす $n \times n$ 行列 :



(a) $P_i^2 = P_i, \quad i = 1, \ldots, r$ （射影の定義）

(b) $P_i : \mathbb{C}^n \to G_{\lambda_i}$ （P_i の値域は G_{λ_i}）

(c) $P_i P_j = 0, \quad i, j = 1, \ldots, r, \quad i \neq j$

(d) $P_1 + P_2 + \cdots + P_r = I$

(a)-(d) を全て満たす $P_1, \ldots, P_r$ は一意的に存在する.

射影行列の性質

定理：性質 (1)

$j = 1, \ldots, r$ に対して，自然数 $\ell_j \in [1, m_j]$ が存在して

$$(A - \lambda_j I)^{\ell_j - 1} P_j \neq O, \qquad (A - \lambda_j I)^{\ell_j} P_j = O.$$

証明 : $(A - \lambda_j I)^{m_j} \underbrace{P_j \boldsymbol{x}}_{\in G_{\lambda_j}} = 0 \ \forall \boldsymbol{x}$ より $(A - \lambda_j I)^{m_j} P_j = O$

あとは，順番に $(A - \lambda_j I)^{m_j - 1} P_j, \ldots, (A - \lambda_j I)^0 P_j$ を見ていけばよい

定理：性質 (2)

(1) の ℓ_j に対して，φ を以下のようにおくと，$\varphi(A) = O$.

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\ell_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\ell_r} \qquad \text{（最小多項式）}$$

証明 : $\varphi(A) = \varphi(A)(P_1 + \cdots + P_r), \quad \varphi(A) P_j = O, \ j = 1, \ldots, r.$

注： $\Phi(A) = O$ は Hamilton-Cayley の定理

射影行列の性質

定理：性質 (1)

$j = 1, \ldots, r$ に対して，自然数 $\ell_j \in [1, m_j]$ が存在して

$$(A - \lambda_j I)^{\ell_j - 1} P_j \neq O, \qquad (A - \lambda_j I)^{\ell_j} P_j = O.$$

証明：$(A - \lambda_j I)^{m_j} \underbrace{P_j \boldsymbol{x}}_{\in G_{\lambda_j}} = 0 \ \ \forall \boldsymbol{x}$ より $(A - \lambda_j I)^{m_j} P_j = O$

あとは，順番に $(A - \lambda_j I)^{m_j - 1} P_j, \ldots, (A - \lambda_j I)^0 P_j$ を見ていけばよい

定理：性質 (2)

(1) の ℓ_j に対して，φ を以下のようにおくと，$\varphi(A) = O$.

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\ell_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\ell_r} \qquad \text{（最小多項式）}$$

証明：$\varphi(A) = \varphi(A)(P_1 + \cdots + P_r), \quad \varphi(A) P_j = O, \ \ j = 1, \ldots, r.$

注：$\Phi(A) = O$ は Hamilton-Cayley の定理

射影行列の性質

定理：性質 (1)

$j = 1, \ldots, r$ に対して，自然数 $\ell_j \in [1, m_j]$ が存在して

$$(A - \lambda_j I)^{\ell_j - 1} P_j \neq O, \qquad (A - \lambda_j I)^{\ell_j} P_j = O.$$

証明：$(A - \lambda_j I)^{m_j} \underbrace{P_j \boldsymbol{x}}_{\in G_{\lambda_j}} = 0 \ \ \forall \boldsymbol{x}$ より $(A - \lambda_j I)^{m_j} P_j = O$

あとは，順番に $(A - \lambda_j I)^{m_j - 1} P_j, \ldots, (A - \lambda_j I)^0 P_j$ を見ていけばよい

定理：性質 (2)

(1) の ℓ_j に対して，φ を以下のようにおくと，$\varphi(A) = O$.

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\ell_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\ell_r} \qquad \text{（最小多項式）}$$

証明：$\varphi(A) = \varphi(A)(P_1 + \cdots + P_r), \quad \varphi(A) P_j = O, \ \ j = 1, \ldots, r.$

注：$\Phi(A) = O$ は Hamilton-Cayley の定理

射影行列の性質

定理：性質 (1)

$j = 1, \ldots, r$ に対して，自然数 $\ell_j \in [1, m_j]$ が存在して

$$(A - \lambda_j I)^{\ell_j - 1} P_j \neq O, \qquad (A - \lambda_j I)^{\ell_j} P_j = O.$$

証明：$(A - \lambda_j I)^{m_j} \underbrace{P_j \boldsymbol{x}}_{\in G_{\lambda_j}} = 0 \ \ \forall \boldsymbol{x}$ より $(A - \lambda_j I)^{m_j} P_j = O$

あとは，順番に $(A - \lambda_j I)^{m_j - 1} P_j, \ldots, (A - \lambda_j I)^0 P_j$ を見ていけばよい

定理：性質 (2)

(1) の ℓ_j に対して，φ を以下のようにおくと，$\varphi(A) = O$.

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\ell_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\ell_r} \qquad \text{（最小多項式）}$$

証明：$\varphi(A) = \varphi(A)(P_1 + \cdots + P_r), \quad \varphi(A) P_j = O, \ \ j = 1, \ldots, r.$

注：$\Phi(A) = O$ は Hamilton-Cayley の定理

射影行列の性質

定理：性質 (1)

$j = 1, \ldots, r$ に対して，自然数 $\ell_j \in [1, m_j]$ が存在して

$$(A - \lambda_j I)^{\ell_j - 1} P_j \neq O, \qquad (A - \lambda_j I)^{\ell_j} P_j = O.$$

証明：$(A - \lambda_j I)^{m_j} \underbrace{P_j \boldsymbol{x}}_{\in G_{\lambda_j}} = 0 \ \ \forall \boldsymbol{x}$ より $(A - \lambda_j I)^{m_j} P_j = O$

あとは，順番に $(A - \lambda_j I)^{m_j - 1} P_j, \ldots, (A - \lambda_j I)^0 P_j$ を見ていけばよい

定理：性質 (2)

(1) の ℓ_j に対して，φ を以下のようにおくと，$\varphi(A) = O$.

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\ell_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\ell_r} \qquad \text{（最小多項式）}$$

証明：$\varphi(A) = \varphi(A)(P_1 + \cdots + P_r), \quad \varphi(A) P_j = O, \ \ j = 1, \ldots, r.$

注： $\Phi(A) = O$ は Hamilton-Cayley の定理

射影行列の性質

定理：性質 (1)

$j = 1, \ldots, r$ に対して，自然数 $\ell_j \in [1, m_j]$ が存在して

$$(A - \lambda_j I)^{\ell_j - 1} P_j \neq O, \qquad (A - \lambda_j I)^{\ell_j} P_j = O.$$

証明：$(A - \lambda_j I)^{m_j} \underbrace{P_j \boldsymbol{x}}_{\in G_{\lambda_j}} = 0 \ \ \forall \boldsymbol{x}$ より $(A - \lambda_j I)^{m_j} P_j = O$

あとは，順番に $(A - \lambda_j I)^{m_j - 1} P_j, \ldots, (A - \lambda_j I)^0 P_j$ を見ていけばよい

定理：性質 (2)

(1) の ℓ_j に対して，φ を以下のようにおくと，$\varphi(A) = O$.

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\ell_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\ell_r} \qquad \text{（最小多項式）}$$

証明：$\varphi(A) = \varphi(A)(P_1 + \cdots + P_r), \quad \varphi(A) P_j = O, \ \ j = 1, \ldots, r.$

注： $\Phi(A) = O$ は Hamilton-Cayley の定理

射影行列の性質

定理：性質 (3)

$j = 1, \ldots, r$ に対して，

$$P_j = h_j(A)(A - \lambda_1 I)^{\ell_1} \cdots (A - \lambda_{j-1} I)^{\ell_{j-1}} (A - \lambda_{j+1} I)^{\ell_{j+1}} \cdots (A - \lambda_r I)^{\ell_r}.$$

ただし，$h_j(A)$ は分解

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)} = \frac{h_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{\ell_1}} + \cdots + \frac{h_r(\lambda)}{(\lambda - \lambda_r)^{\ell_r}} \tag{1}$$

により一意的に決まる（高々$(\ell_j - 1)$-次多項式）.

証明：(1) に $\varphi(\lambda)$ をかけると，

$$1 = h_1(\lambda) g_1(\lambda) + \cdots + h_r(\lambda) g_r(\lambda)$$

ただし，$g_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\ell_1} \cdots (\lambda - \lambda_{j-1})^{\ell_{j-1}} (\lambda - \lambda_{j+1})^{\ell_{j+1}} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\ell_r}$

射影行列の性質

定理：性質 (3)

$j = 1, \ldots, r$ に対して，

$$P_j = h_j(A)(A - \lambda_1 I)^{\ell_1} \cdots (A - \lambda_{j-1} I)^{\ell_{j-1}} (A - \lambda_{j+1} I)^{\ell_{j+1}} \cdots (A - \lambda_r I)^{\ell_r}.$$

ただし，$h_j(A)$ は分解

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)} = \frac{h_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{\ell_1}} + \cdots + \frac{h_r(\lambda)}{(\lambda - \lambda_r)^{\ell_r}} \tag{1}$$

により一意的に決まる（高々$(\ell_j - 1)$-次多項式）.

証明：(1) に $\varphi(\lambda)$ をかけると，

$$1 = h_1(\lambda) g_1(\lambda) + \cdots + h_r(\lambda) g_r(\lambda)$$

ただし，$g_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\ell_1} \cdots (\lambda - \lambda_{j-1})^{\ell_{j-1}} (\lambda - \lambda_{j+1})^{\ell_{j+1}} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\ell_r}$

射影行列の性質

定理：性質 (3)

$j = 1, \ldots, r$ に対して，

$$P_j = h_j(A)(A - \lambda_1 I)^{\ell_1} \cdots (A - \lambda_{j-1} I)^{\ell_{j-1}} (A - \lambda_{j+1} I)^{\ell_{j+1}} \cdots (A - \lambda_r I)^{\ell_r}.$$

ただし，$h_j(A)$ は分解

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)} = \frac{h_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{\ell_1}} + \cdots + \frac{h_r(\lambda)}{(\lambda - \lambda_r)^{\ell_r}} \tag{1}$$

により一意的に決まる（高々$(\ell_j - 1)$-次多項式）.

証明：(1) に $\varphi(\lambda)$ をかけると，

$$1 = h_1(\lambda) g_1(\lambda) + \cdots + h_r(\lambda) g_r(\lambda)$$

ただし，$g_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\ell_1} \cdots (\lambda - \lambda_{j-1})^{\ell_{j-1}} (\lambda - \lambda_{j+1})^{\ell_{j+1}} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\ell_r}$

射影行列の性質

証明：(1) に $\varphi(\lambda)$ をかけると，

$$1 = h_1(\lambda)g_1(\lambda) + \cdots + h_r(\lambda)g_r(\lambda)$$

ただし，　$g_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\ell_1} \cdots (\lambda - \lambda_{j-1})^{\ell_{j-1}} (\lambda - \lambda_{j+1})^{\ell_{j+1}} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\ell_r}$

λ に A を代入して，両辺に任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ をかけると

$$\boldsymbol{x} = h_1(A)g_1(A)\boldsymbol{x} + \cdots + h_r(A)g_r(A)\boldsymbol{x}$$

一方　　$\boldsymbol{x} = P_1\boldsymbol{x} + \cdots + P_r\boldsymbol{x}$

ここで，$(A - \lambda_j I)^{\ell_j} h_j(A)g_j(A)\boldsymbol{x} = h_j(A)\varphi(A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ より

$$h_j(A)g_j(A)\boldsymbol{x} \in G_{\lambda_j}.$$

直和分解の一意性より $P_j = h_j(A)g_j(A) \quad j = 1, \ldots, r.$

射影行列の性質

証明：(1) に $\varphi(\lambda)$ をかけると，

$$1 = h_1(\lambda)g_1(\lambda) + \cdots + h_r(\lambda)g_r(\lambda)$$

ただし，$g_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\ell_1} \cdots (\lambda - \lambda_{j-1})^{\ell_{j-1}} (\lambda - \lambda_{j+1})^{\ell_{j+1}} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\ell_r}$

λ に A を代入して，両辺に任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ をかけると

$$\boldsymbol{x} = h_1(A)g_1(A)\boldsymbol{x} + \cdots + h_r(A)g_r(A)\boldsymbol{x}$$

一方　　$\boldsymbol{x} = P_1\boldsymbol{x} + \cdots + P_r\boldsymbol{x}$

ここで，$(A - \lambda_j I)^{\ell_j} h_j(A)g_j(A)\boldsymbol{x} = h_j(A)\varphi(A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ より

$$h_j(A)g_j(A)\boldsymbol{x} \in G_{\lambda_j}.$$

直和分解の一意性より $P_j = h_j(A)g_j(A) \quad j = 1, \ldots, r.$

射影行列の性質

証明：(1) に $\varphi(\lambda)$ をかけると，

$$1 = h_1(\lambda)g_1(\lambda) + \cdots + h_r(\lambda)g_r(\lambda)$$

ただし，$g_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\ell_1} \cdots (\lambda - \lambda_{j-1})^{\ell_{j-1}} (\lambda - \lambda_{j+1})^{\ell_{j+1}} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\ell_r}$

λ に A を代入して，両辺に任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ をかけると

$$\boldsymbol{x} = h_1(A)g_1(A)\boldsymbol{x} + \cdots + h_r(A)g_r(A)\boldsymbol{x}$$

一方　　$\boldsymbol{x} = P_1\boldsymbol{x} + \cdots + P_r\boldsymbol{x}$

ここで，$(A - \lambda_j I)^{\ell_j} h_j(A)g_j(A)\boldsymbol{x} = h_j(A)\varphi(A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ より

$$h_j(A)g_j(A)\boldsymbol{x} \in G_{\lambda_j}.$$

直和分解の一意性より $P_j = h_j(A)g_j(A) \quad j = 1, \ldots, r.$

射影行列の性質

証明：(1) に $\varphi(\lambda)$ をかけると，

$$1 = h_1(\lambda)g_1(\lambda) + \cdots + h_r(\lambda)g_r(\lambda)$$

ただし，$g_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\ell_1} \cdots (\lambda - \lambda_{j-1})^{\ell_{j-1}} (\lambda - \lambda_{j+1})^{\ell_{j+1}} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\ell_r}$

λ に A を代入して，両辺に任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ をかけると

$$\boldsymbol{x} = h_1(A)g_1(A)\boldsymbol{x} + \cdots + h_r(A)g_r(A)\boldsymbol{x}$$

$$\text{一方} \qquad \boldsymbol{x} = P_1\boldsymbol{x} + \cdots + P_r\boldsymbol{x}$$

ここで，$(A - \lambda_j I)^{\ell_j} h_j(A)g_j(A)\boldsymbol{x} = h_j(A)\varphi(A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ より

$$h_j(A)g_j(A)\boldsymbol{x} \in G_{\lambda_j}.$$

直和分解の一意性より $P_j = h_j(A)g_j(A) \quad j = 1, \ldots, r.$

射影行列の性質

証明：(1) に $\varphi(\lambda)$ をかけると，

$$1 = h_1(\lambda)g_1(\lambda) + \cdots + h_r(\lambda)g_r(\lambda)$$

ただし，$g_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\ell_1} \cdots (\lambda - \lambda_{j-1})^{\ell_{j-1}} (\lambda - \lambda_{j+1})^{\ell_{j+1}} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\ell_r}$

λ に A を代入して，両辺に任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ をかけると

$$\boldsymbol{x} = h_1(A)g_1(A)\boldsymbol{x} + \cdots + h_r(A)g_r(A)\boldsymbol{x}$$

$$\text{一方} \qquad \boldsymbol{x} = P_1\boldsymbol{x} + \cdots + P_r\boldsymbol{x}$$

ここで，$(A - \lambda_j I)^{\ell_j} h_j(A)g_j(A)\boldsymbol{x} = h_j(A)\varphi(A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ より

$$h_j(A)g_j(A)\boldsymbol{x} \in G_{\lambda_j}.$$

直和分解の一意性より $P_j = h_j(A)g_j(A) \quad j = 1, \ldots, r.$

射影行列の性質

証明 : (1) に $\varphi(\lambda)$ をかけると,

$$1 = h_1(\lambda)g_1(\lambda) + \cdots + h_r(\lambda)g_r(\lambda)$$

ただし, $g_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\ell_1} \cdots (\lambda - \lambda_{j-1})^{\ell_{j-1}} (\lambda - \lambda_{j+1})^{\ell_{j+1}} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\ell_r}$

λ に A を代入して, 両辺に任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ をかけると

$$\boldsymbol{x} = h_1(A)g_1(A)\boldsymbol{x} + \cdots + h_r(A)g_r(A)\boldsymbol{x}$$

一方 $$\boldsymbol{x} = P_1\boldsymbol{x} + \cdots + P_r\boldsymbol{x}$$

ここで, $(A - \lambda_j I)^{\ell_j} h_j(A)g_j(A)\boldsymbol{x} = h_j(A)\varphi(A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ より

$$h_j(A)g_j(A)\boldsymbol{x} \in G_{\lambda_j}.$$

直和分解の一意性より $P_j = h_j(A)g_j(A) \quad j = 1, \ldots, r.$

射影行列の性質

定理 (4)：一般スペクトル分解・ジョルダン分解

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r + N$$

ただし，N は冪零（m があって，$N^m = O$）で，A と P_j は可換.

証明 :

$$\begin{aligned} N &= A - \lambda_1 P_1 - \cdots - \lambda_r P_r \\ &= A(P_1 + \cdots + P_r) - \lambda_1 P_1 - \cdots - \lambda_r P_r \\ &= (A - \lambda_1 I)P_1 + \cdots + (A - \lambda_r I)P_r \end{aligned}$$

に対して直接，確かめる.

射影行列の性質

定理 (4)：一般スペクトル分解・ジョルダン分解

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r + N$$

ただし，N は冪零（m があって，$N^m = O$）で，A と P_j は可換.

証明 :

$$\begin{aligned} N &= A - \lambda_1 P_1 - \cdots - \lambda_r P_r \\ &= A(P_1 + \cdots + P_r) - \lambda_1 P_1 - \cdots - \lambda_r P_r \\ &= (A - \lambda_1 I)P_1 + \cdots + (A - \lambda_r I)P_r \end{aligned}$$

に対して直接，確かめる.

射影行列の性質

定理 (4)：一般スペクトル分解・ジョルダン分解

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r + N$$

ただし，N は冪零（m があって，$N^m = O$）で，A と P_j は可換.

証明 :

$$\begin{aligned} N &= A - \lambda_1 P_1 - \cdots - \lambda_r P_r \\ &= A(P_1 + \cdots + P_r) - \lambda_1 P_1 - \cdots - \lambda_r P_r \\ &= (A - \lambda_1 I)P_1 + \cdots + (A - \lambda_r I)P_r \end{aligned}$$

に対して直接，確かめる.

射影行列の性質

定理 (5)

次が同値である：

(i) A は対角化可能

(ii) $A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r \quad \ldots \quad$ スペクトル分解

(iii) $G_{\lambda_j} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n;\ (A - \lambda_j I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$

(iv) $\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_r)$

このとき，

$$P_j = \frac{(A - \lambda_1 I)\cdots(A - \lambda_{j-1} I)(A - \lambda_{j+1} I)\cdots(A - \lambda_r I)}{(\lambda_j - \lambda_1)\cdots(\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1})\cdots(\lambda_j - \lambda_r)}, \quad j = 1, \ldots, r$$

例えば，A が実対称行列のとき，または φ が単根のみもつとき．

射影行列の性質

定理 (5)

次が同値である：

(i) A は対角化可能

(ii) $A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r \quad \ldots \quad$ スペクトル分解

(iii) $G_{\lambda_j} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n;\ (A - \lambda_j I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$

(iv) $\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_r)$

このとき，

$$P_j = \frac{(A - \lambda_1 I)\cdots(A - \lambda_{j-1} I)(A - \lambda_{j+1} I)\cdots(A - \lambda_r I)}{(\lambda_j - \lambda_1)\cdots(\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1})\cdots(\lambda_j - \lambda_r)}, \quad j = 1, \ldots, r$$

例えば，A が実対称行列のとき，または φ が単根のみもつとき．

射影行列による行列の指数関数

定理

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} \left\{ I + \frac{t}{1!}(A - \lambda_j I) + \cdots + \frac{t^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!}(A - \lambda_j I)^{m_j - 1} \right\} P_j \tag{2}$$

注意：

- t の冪乗は本当は $\ell_j - 1$ までですが，ℓ_j を求めるのが面倒だから，$m_j - 1$ を用いている．
- A が対角化可能なとき： $e^{tA} = e^{\lambda_1 t} P_1 + \cdots + e^{\lambda_r t} P_r$

証明 : $e^{tA} = e^{tA}(P_1 + \cdots + P_r)$

$$e^{tA} P_j = e^{t(A - \lambda_j I) + t\lambda_j I} P_j = \underbrace{e^{t\lambda_j I}}_{= e^{\lambda_j t} I} \underbrace{e^{t(A - \lambda_j I)} P_j}_{= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_j I)^k P_j = \sum_{k=0}^{\ell_j - 1} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_j I)^k P_j}$$

射影行列による行列の指数関数

定理

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} \left\{ I + \frac{t}{1!}(A - \lambda_j I) + \cdots + \frac{t^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!}(A - \lambda_j I)^{m_j - 1} \right\} P_j \tag{2}$$

注意：

- t の冪乗は本当は $\ell_j - 1$ までででよいが，ℓ_j を求めるのが面倒だから，$m_j - 1$ を用いている．
- A が対角化可能なとき： $e^{tA} = e^{\lambda_1 t} P_1 + \cdots + e^{\lambda_r t} P_r$

証明 : $e^{tA} = e^{tA}(P_1 + \cdots + P_r)$

$$e^{tA} P_j = e^{t(A - \lambda_j I) + t\lambda_j I} P_j = \underbrace{e^{t\lambda_j I}}_{= e^{\lambda_j t} I} \underbrace{e^{t(A - \lambda_j I)} P_j}_{= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_j I)^k P_j = \sum_{k=0}^{\ell_j - 1} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_j I)^k P_j}$$

射影行列による行列の指数関数

定理

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} \left\{ I + \frac{t}{1!}(A - \lambda_j I) + \cdots + \frac{t^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!}(A - \lambda_j I)^{m_j - 1} \right\} P_j \tag{2}$$

注意：

- t の冪乗は本当は $\ell_j - 1$ までででよいが，ℓ_j を求めるのが面倒だから，$m_j - 1$ を用いている．
- A が対角化可能なとき：　$e^{tA} = e^{\lambda_1 t} P_1 + \cdots + e^{\lambda_r t} P_r$

証明：$e^{tA} = e^{tA}(P_1 + \cdots + P_r)$

$$e^{tA} P_j = e^{t(A - \lambda_j I) + t\lambda_j I} P_j = \underbrace{e^{t\lambda_j I}}_{= e^{\lambda_j t} I} \underbrace{e^{t(A - \lambda_j I)} P_j}_{= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_j I)^k P_j = \sum_{k=0}^{\ell_j - 1} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_j I)^k P_j}$$

射影行列による行列の指数関数

定理

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} \left\{ I + \frac{t}{1!}(A - \lambda_j I) + \cdots + \frac{t^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!}(A - \lambda_j I)^{m_j - 1} \right\} P_j \tag{2}$$

注意：

- t の冪乗は本当は $\ell_j - 1$ までででよいが，ℓ_j を求めるのが面倒だから，$m_j - 1$ を用いている．
- A が対角化可能なとき：　$e^{tA} = e^{\lambda_1 t} P_1 + \cdots + e^{\lambda_r t} P_r$

証明：$e^{tA} = e^{tA}(P_1 + \cdots + P_r)$

$$e^{tA} P_j = e^{t(A - \lambda_j I) + t\lambda_j I} P_j = \underbrace{e^{t\lambda_j I}}_{= e^{\lambda_j t} I} \underbrace{e^{t(A - \lambda_j I)} P_j}_{= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_j I)^k P_j = \sum_{k=0}^{\ell_j - 1} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_j I)^k P_j}$$

射影行列による行列の指数関数

定理

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} \left\{ I + \frac{t}{1!}(A - \lambda_j I) + \cdots + \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!}(A - \lambda_j I)^{m_j-1} \right\} P_j \tag{2}$$

注意：

- t の冪乗は本当は $\ell_j - 1$ までででよいが，ℓ_j を求めるのが面倒だから，$m_j - 1$ を用いている．
- A が対角化可能なとき：　$e^{tA} = e^{\lambda_1 t} P_1 + \cdots + e^{\lambda_r t} P_r$

証明：$e^{tA} = e^{tA}(P_1 + \cdots + P_r)$

$$e^{tA} P_j = e^{t(A-\lambda_j I)+t\lambda_j I} P_j = \underbrace{e^{t\lambda_j I}}_{=e^{\lambda_j t} I} \underbrace{e^{t(A-\lambda_j I)} P_j}_{=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda_j I)^k P_j = \sum_{k=0}^{\ell_j - 1} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda_j I)^k P_j}$$

例：$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4 \quad$ 単根 $\Rightarrow$ 対角化可能

$$P_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t} P_1 + e^{\lambda_2 t} P_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{-t} + 2e^{4t} & -3e^{-t} + 3e^{4t} \\ -2e^{-t} + 2e^{4t} & 2e^{-t} + 3e^{4t} \end{pmatrix}$$

例：$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$ 単根 $\Rightarrow$ 対角化可能

$$P_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{-t} + 2e^{4t} & -3e^{-t} + 3e^{4t} \\ -2e^{-t} + 2e^{4t} & 2e^{-t} + 3e^{4t} \end{pmatrix}$$

例：$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$ 単根 $\Rightarrow$ 対角化可能

$$P_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{-t} + 2e^{4t} & -3e^{-t} + 3e^{4t} \\ -2e^{-t} + 2e^{4t} & 2e^{-t} + 3e^{4t} \end{pmatrix}$$

例：$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$ 単根 $\Rightarrow$ 対角化可能

$$P_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{-t} + 2e^{4t} & -3e^{-t} + 3e^{4t} \\ -2e^{-t} + 2e^{4t} & 2e^{-t} + 3e^{4t} \end{pmatrix}$$

例：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda+2\right), \qquad \Phi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$\lambda_1 = 1\,(m_1 = 2)$, $\lambda_2 = 2\,(m_2 = 1)$: これで対角化可能かわからない

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda-1)^2(\lambda-2)} = \frac{-\lambda}{(\lambda-1)^2} + \frac{1}{\lambda-2}$$

$$1 = \underbrace{-\lambda}_{h_1}\cdot\underbrace{(\lambda-2)}_{g_1} + \underbrace{1}_{h_2}\cdot\underbrace{(\lambda-1)^2}_{g_2}$$

$$P_1 = h_1(A)g_1(A) = -A(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = h_2(A)g_2(A) = (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

例：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda+2\right), \qquad \Phi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$\lambda_1 = 1\,(m_1 = 2)$, $\lambda_2 = 2\,(m_2 = 1)$: これで対角化可能かわからない

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda-1)^2(\lambda-2)} = \frac{-\lambda}{(\lambda-1)^2} + \frac{1}{\lambda-2}$$

$$1 = \underbrace{-\lambda}_{h_1}\cdot\underbrace{(\lambda-2)}_{g_1} + \underbrace{1}_{h_2}\cdot\underbrace{(\lambda-1)^2}_{g_2}$$

$$P_1 = h_1(A)g_1(A) = -A(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = h_2(A)g_2(A) = (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

例：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda+2\right), \qquad \Phi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$\lambda_1 = 1\ (m_1 = 2)$, $\lambda_2 = 2\ (m_2 = 1)$: これで対角化可能かわからない

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda-1)^2(\lambda-2)} = \frac{-\lambda}{(\lambda-1)^2} + \frac{1}{\lambda-2}$$

$$1 = \underbrace{-\lambda}_{h_1}\cdot\underbrace{(\lambda-2)}_{g_1} + \underbrace{1}_{h_2}\cdot\underbrace{(\lambda-1)^2}_{g_2}$$

$$P_1 = h_1(A)g_1(A) = -A(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = h_2(A)g_2(A) = (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

例：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda+2\right), \qquad \Phi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$\lambda_1 = 1\ (m_1 = 2)$, $\lambda_2 = 2\ (m_2 = 1)$: これで対角化可能かわからない

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda-1)^2(\lambda-2)} = \frac{-\lambda}{(\lambda-1)^2} + \frac{1}{\lambda-2}$$

$$1 = \underbrace{-\lambda}_{h_1}\cdot\underbrace{(\lambda-2)}_{g_1} + \underbrace{1}_{h_2}\cdot\underbrace{(\lambda-1)^2}_{g_2}$$

$$P_1 = h_1(A)g_1(A) = -A(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = h_2(A)g_2(A) = (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

例：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda+2\right), \qquad \Phi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$\lambda_1 = 1\ (m_1 = 2)$, $\lambda_2 = 2\ (m_2 = 1)$: これで対角化可能かわからない

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda-1)^2(\lambda-2)} = \frac{-\lambda}{(\lambda-1)^2} + \frac{1}{\lambda-2}$$

$$1 = \underbrace{-\lambda}_{h_1}\cdot\underbrace{(\lambda-2)}_{g_1} + \underbrace{1}_{h_2}\cdot\underbrace{(\lambda-1)^2}_{g_2}$$

$$P_1 = h_1(A)g_1(A) = -A(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = h_2(A)g_2(A) = (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

例：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda+2\right), \qquad \Phi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$\lambda_1 = 1\ (m_1 = 2)$, $\lambda_2 = 2\ (m_2 = 1)$: これで対角化可能かわからない

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda-1)^2(\lambda-2)} = \frac{-\lambda}{(\lambda-1)^2} + \frac{1}{\lambda-2}$$

$$1 = \underbrace{-\lambda}_{h_1}\cdot\underbrace{(\lambda-2)}_{g_1} + \underbrace{1}_{h_2}\cdot\underbrace{(\lambda-1)^2}_{g_2}$$

$$P_1 = h_1(A)g_1(A) = -A(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = h_2(A)g_2(A) = (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

例：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_1 = h_1(A)g_1(A) = -A(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = h_2(A)g_2(A) = (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t}\left(I + \frac{t}{1!}(A-\lambda_1 I)\right)P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2$$

$$= e^t\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_1}\right)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} + e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_1P_1 \neq O$ なので，A は対角化可能ではない．

例：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_1 = h_1(A)g_1(A) = -A(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = h_2(A)g_2(A) = (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t}\left(I + \frac{t}{1!}(A-\lambda_1 I)\right)P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2$$

$$= e^t\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_1}\right)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} + e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_1P_1 \neq O$ なので，A は対角化可能ではない．

例：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_1 = h_1(A)g_1(A) = -A(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = h_2(A)g_2(A) = (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t}\left(I + \frac{t}{1!}(A-\lambda_1 I)\right)P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2$$

$$= e^t\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_1}\right)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} + e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_1P_1 \neq O$ なので，A は対角化可能ではない.

微分積分学続論 II： 第 9 回

Karel Svadlenka

2020 年 6 月 10 日

■ODE の解軌道

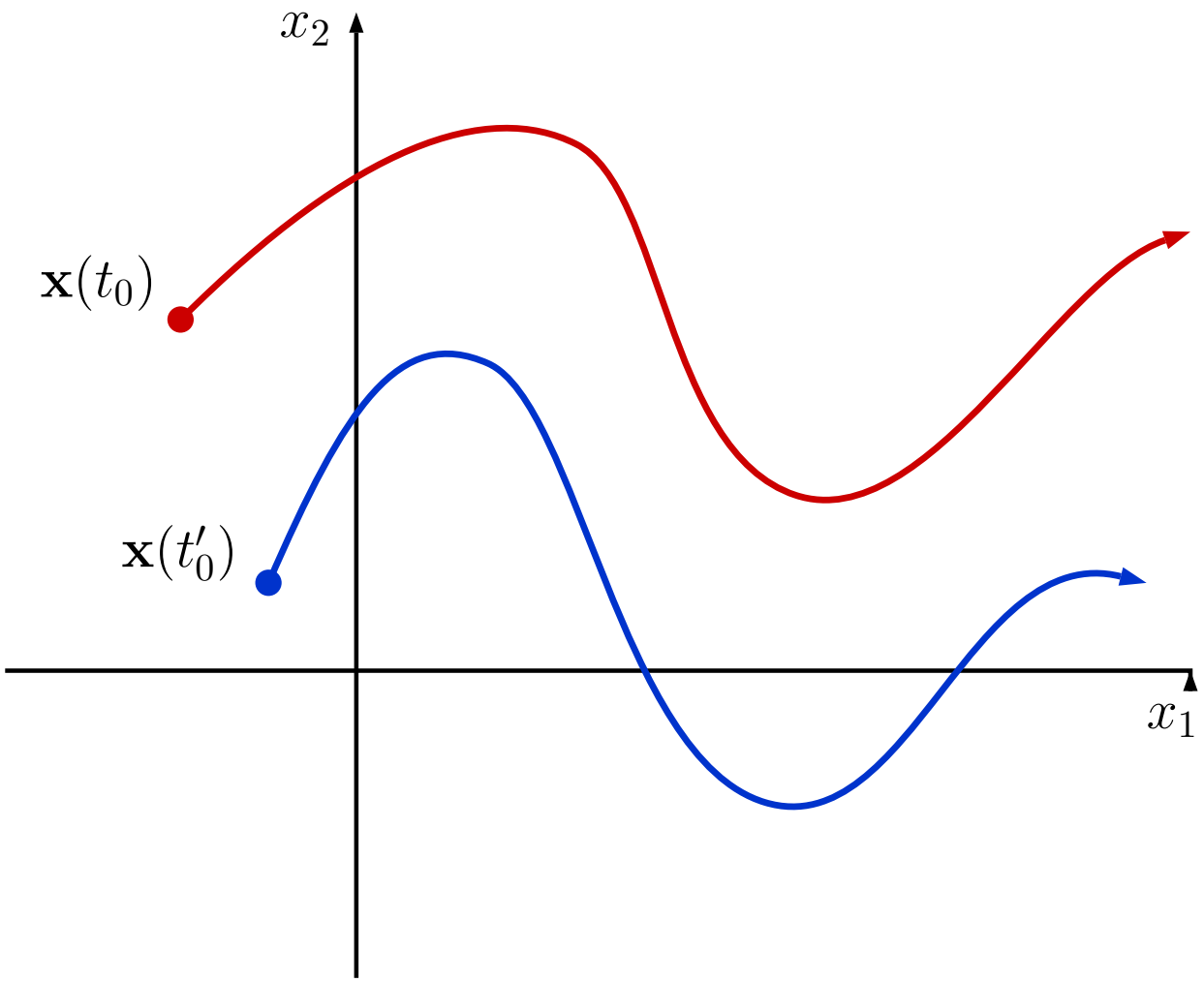
$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \qquad = \text{連立 ODE} \begin{cases} x_1' &= f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

解軌道　＝ $\{\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n;\ t \geq t_0\}$　$\mathbb{R}^n$ = 相空間

次の ODE で詳しく見る：

$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{cases}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$



■ODE の解軌道

4 つの場合に分ける：

(i) A は異なる実固有値をもつ
(ii) A は 2 重固有値をもち，対角化可能
(iii) A は 2 重固有値をもち，対角化不可能
(iv) A は複素の固有値をもつ

■射影行列：復習

定理

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} \left\{ I + \frac{t}{1!}(A - \lambda_j I) + \cdots + \frac{t^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!}(A - \lambda_j I)^{m_j - 1} \right\} P_j$$

2×2 行列のとき，

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} \left\{ I + t(A - \lambda_j I) \right\} P_j, \qquad r = 1 \text{ or } 2.$$

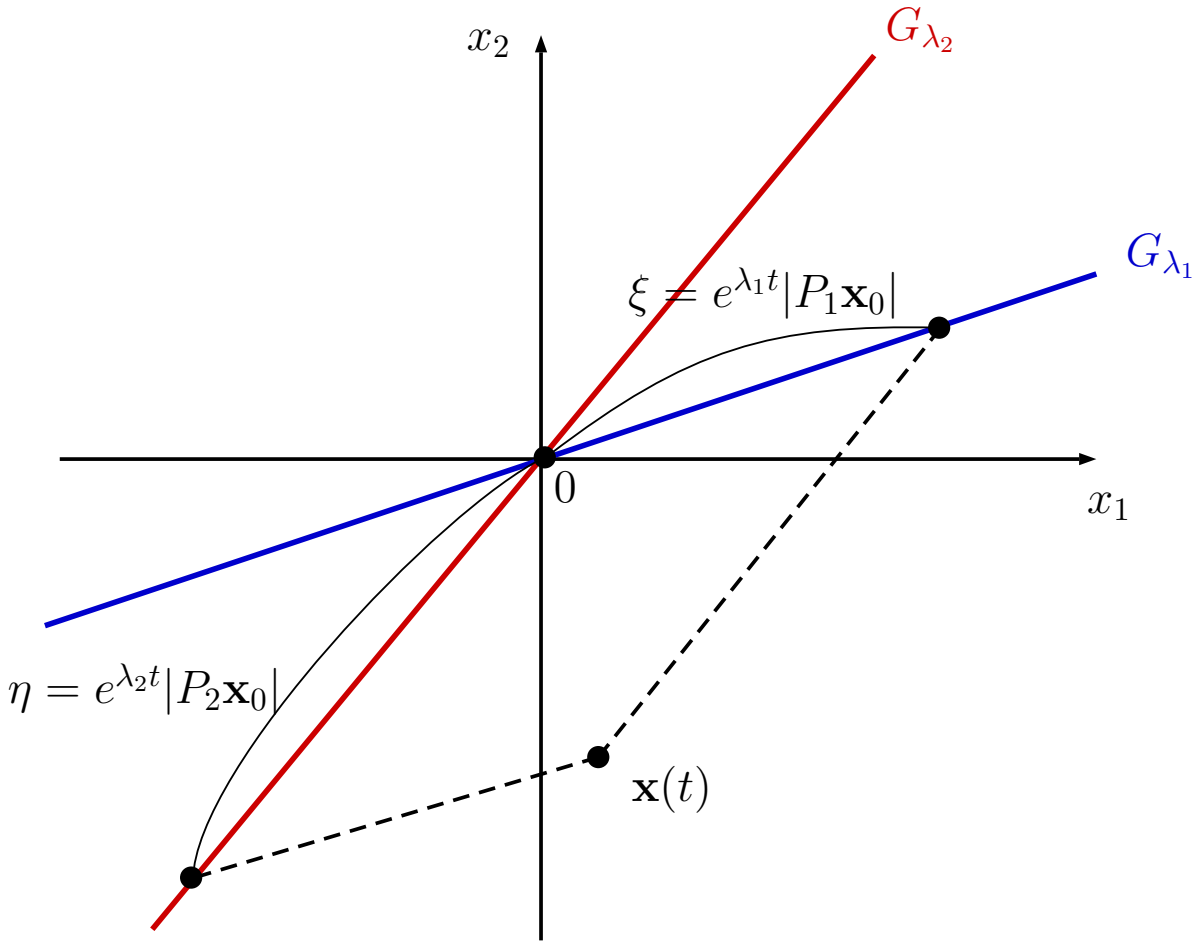
2 つの異なる固有値のとき，

$$P_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad P_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t} P_1 + e^{\lambda_2 t} P_2$$

■(i) A は異なる実固有値をもつ

解：$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}_0 = \left(e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2\right)\boldsymbol{x}_0 = e^{\lambda_1 t}P_1\boldsymbol{x}_0 + e^{\lambda_2 t}P_2\boldsymbol{x}_0 \quad P_i\boldsymbol{x}_0 \in G_{\lambda_i}$ （λ_i に対する固有ベクトル）



$P_1\boldsymbol{x}_0, P_2\boldsymbol{x}_0$ の向きを 斜交座標軸にとる：

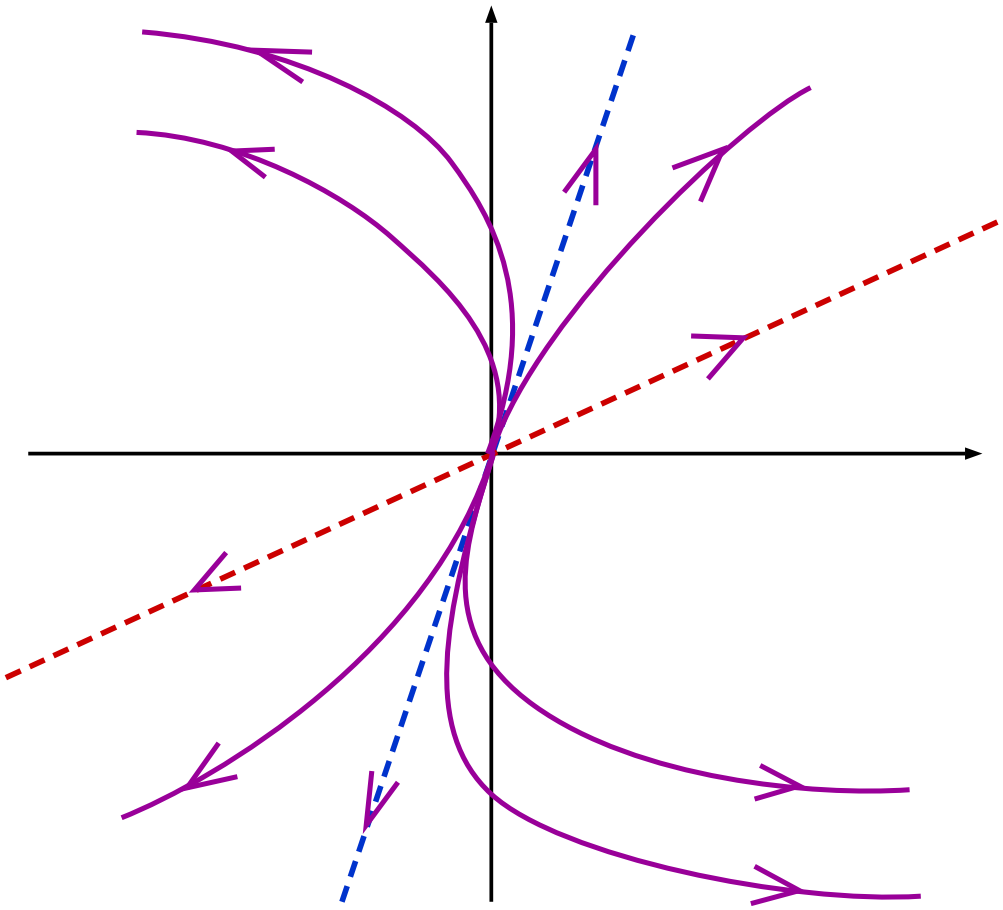
$$\xi = \pm e^{\lambda_1 t}|P_1\boldsymbol{x}_0|$$
$$\eta = \pm e^{\lambda_2 t}|P_2\boldsymbol{x}_0|$$

より

$$\eta = C\xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

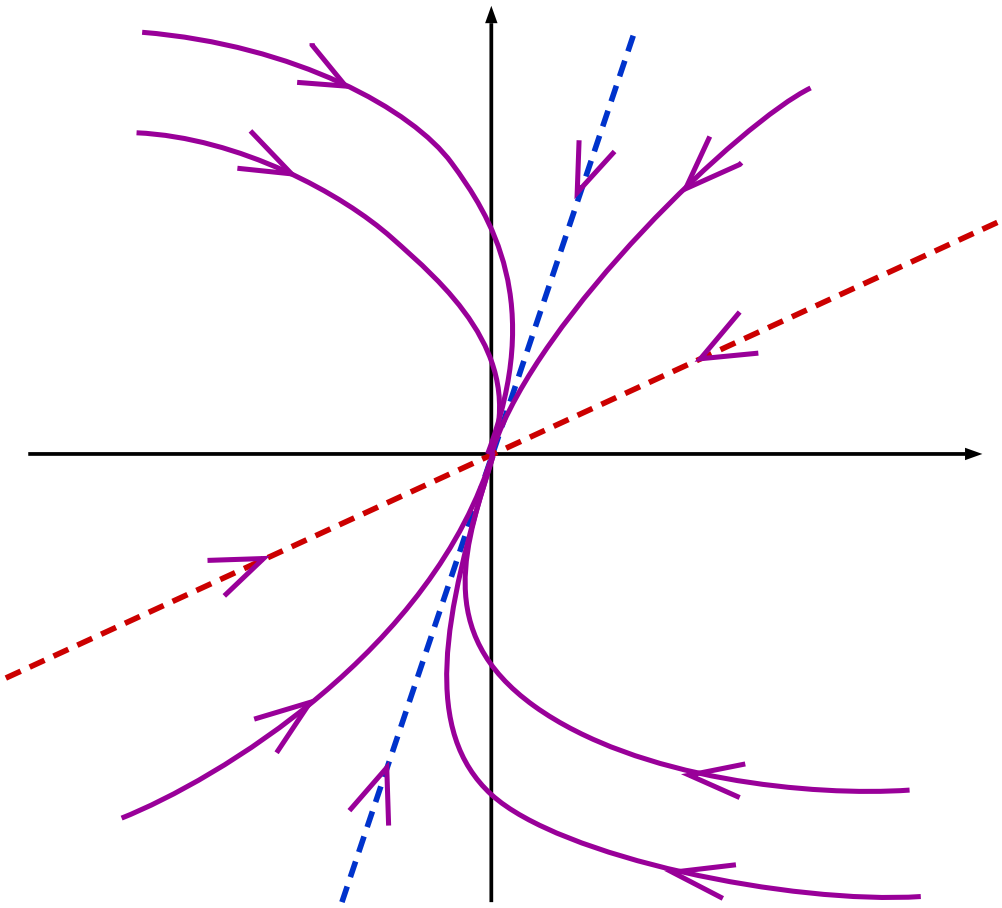
原点は 平衡点 ：$\boldsymbol{x}(t) = 0$ は解である.

■(i) A は異なる実固有値をもつ： $\xi = C_1 e^{\lambda_1 t}, \eta = C_2 e^{\lambda_2 t}$
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$：不安定結節点



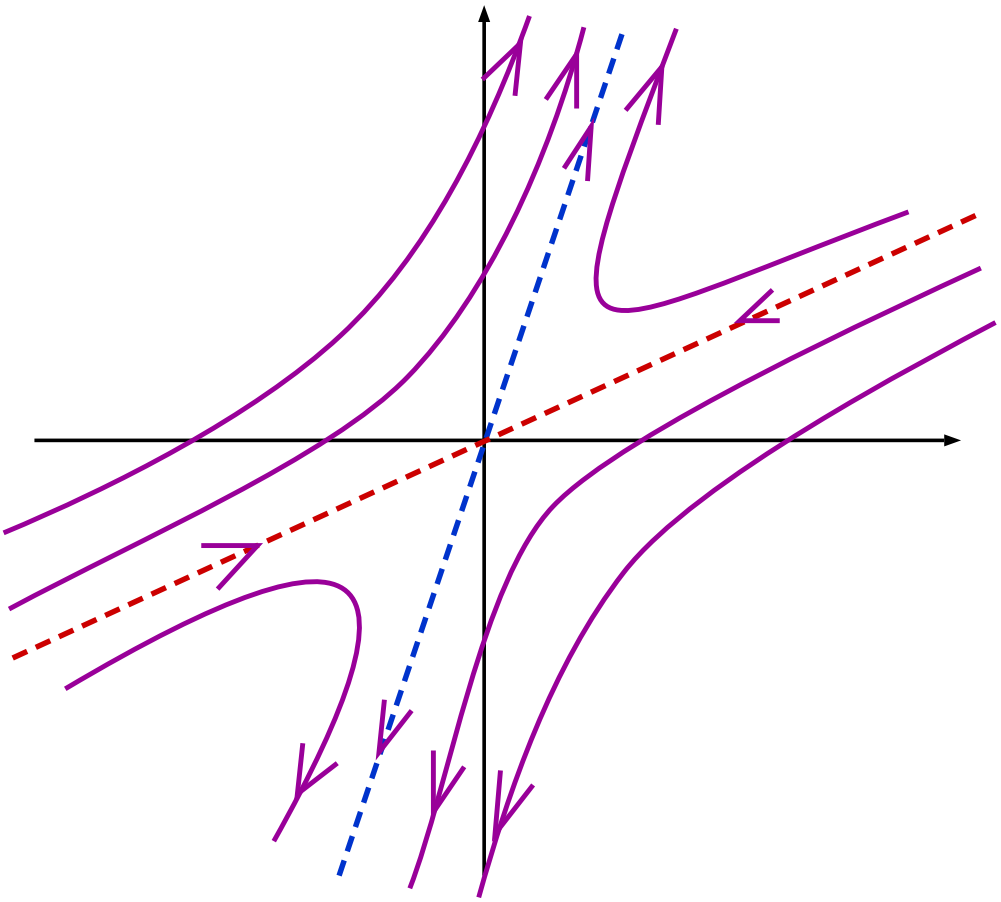
$t \to \infty$ のとき， $|\boldsymbol{x}(t)| \to \infty$

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$：安定結節点



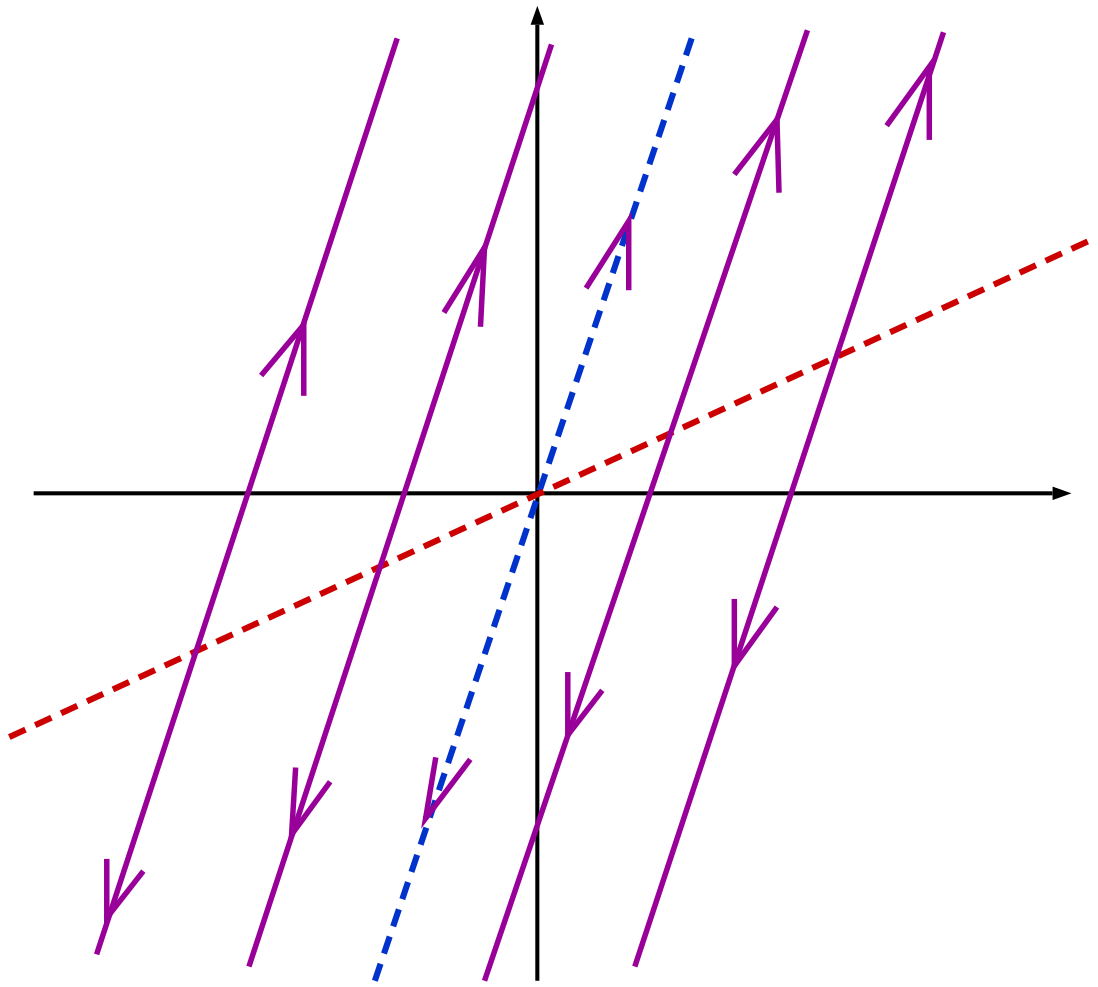
$t \to \infty$ のとき， $|\boldsymbol{x}(t)| \to 0$

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$：鞍状点



$t \to \infty$ のとき， $|\boldsymbol{x}(t)| \to \infty$ G_{λ_2} に 漸近する

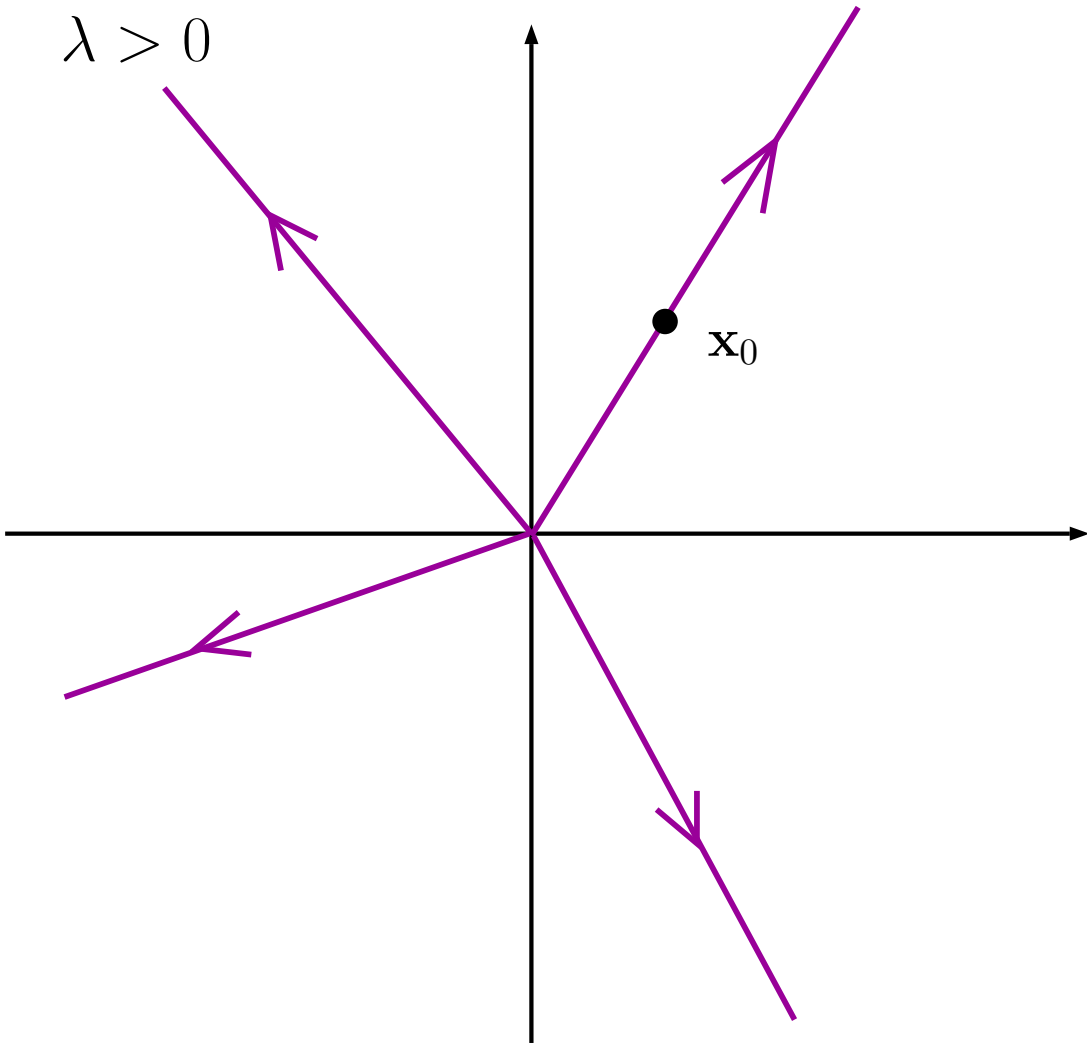
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$



$\xi = C$ に沿って $|\boldsymbol{x}(t)| \to \infty$，$G_{\lambda_1}$ 上の点は全て不安定な平衡点

■(ii) A は 2 重固有値をもち，対角化可能

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I$$

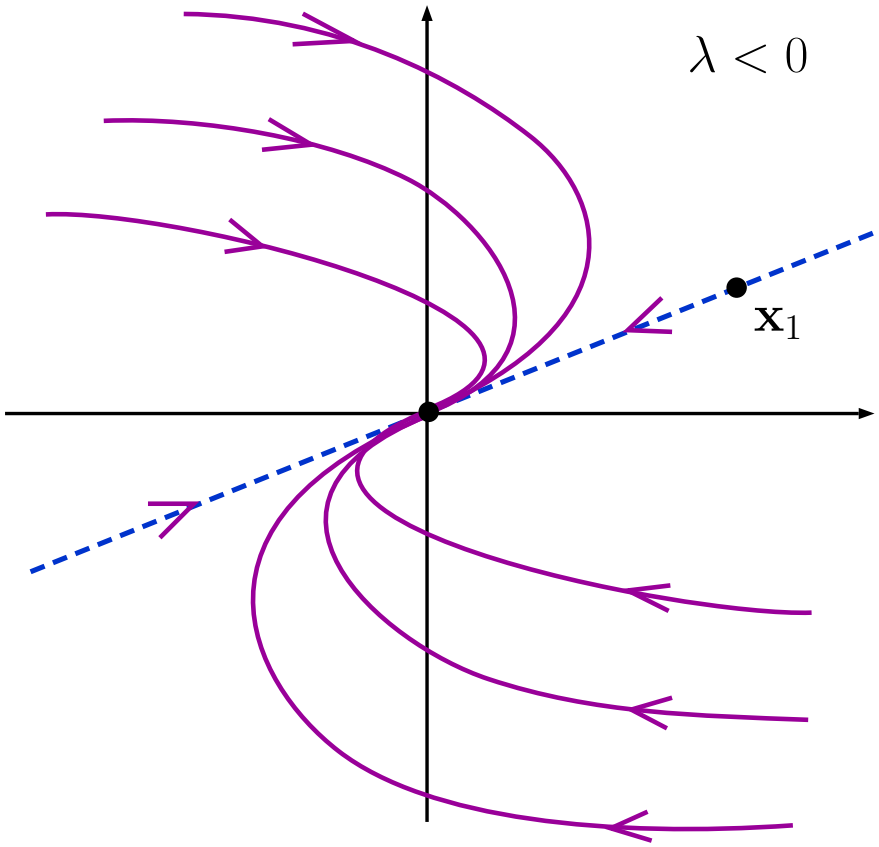


解：$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{x}_0$

- $\lambda < 0$ のとき，原点は安定な平衡点
- $\lambda > 0$ のとき，原点は不安定な平衡点

■(iii) A は 2 重固有値をもち，対角化不可能

解：$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\left(I + t(A - \lambda I)\right)\boldsymbol{x}_0 = e^{\lambda t}\boldsymbol{x}_0 + te^{\lambda t}\underbrace{(A - \lambda I)\boldsymbol{x}_0}_{\boldsymbol{x}_1}$ $\boldsymbol{x}_1$ の向きは $\boldsymbol{x}_0$ に寄らず決まる（$(A-\lambda I)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$ より）.

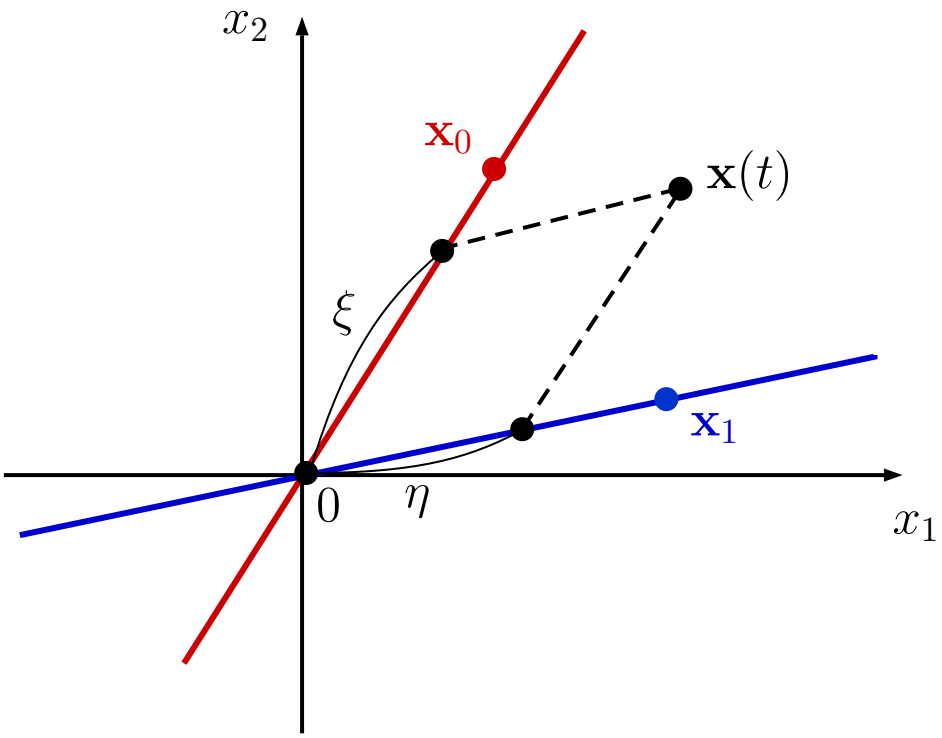


原点：$\lambda > 0 \ldots$ 不安定，$\lambda < 0 \ldots$ 安定

$\boldsymbol{x}_0$ を固定する．

$$\xi = \pm e^{\lambda t}|\boldsymbol{x}_0|$$
$$\eta = \pm t e^{\lambda t}|\boldsymbol{x}_1|$$

より $\eta = \dfrac{1}{\lambda}\log\dfrac{\xi}{|\boldsymbol{x}_0|}\cdot\dfrac{\xi}{|\boldsymbol{x}_0|}|\boldsymbol{x}_1|$



■(iv) A は複素の固有値をもつ

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$，このとき，$P_2 = \overline{P}_1$（共役）　$P_1 = Q + iR$ とすると，$Q = \frac{1}{2}(P_1 + \overline{P}_1) = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = \frac{1}{2}I.$

$$
\begin{aligned}
\text{解：} \qquad e^{tA}\boldsymbol{x}_0 &= (e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2)\boldsymbol{x}_0 \\
&= e^{\alpha t}((\cos\beta t + i\sin\beta t)(Q + iR) \\
&\quad +(\cos\beta t - i\sin\beta t)(Q - iR))\boldsymbol{x}_0 \\
&= 2e^{\alpha t}\left(\cos\beta t Q - \sin\beta t R\right)\boldsymbol{x}_0 \\
&= e^{\alpha t}\cos\beta t\boldsymbol{x}_0 - e^{\alpha t}\sin\beta t \underbrace{2R\boldsymbol{x}_0}_{\boldsymbol{x}_1}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$ の向きを斜交座標軸にとると，

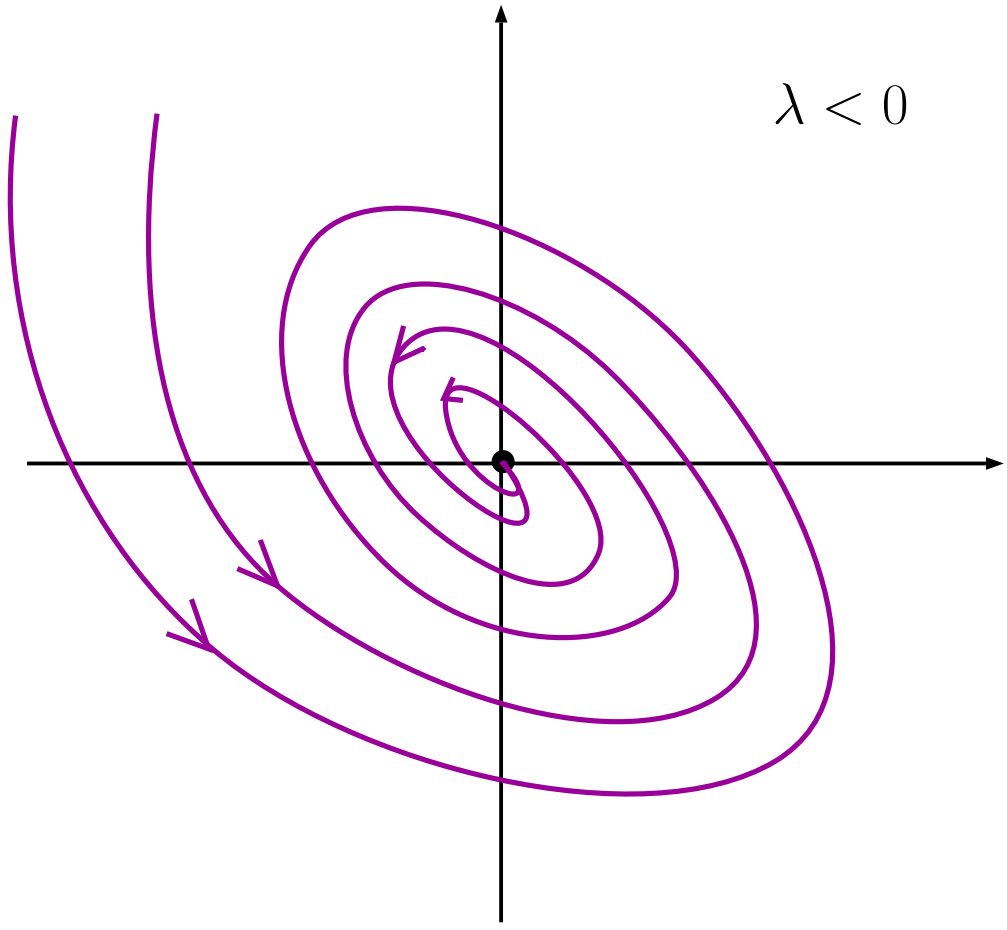
$$
\begin{aligned}
\xi &= \pm e^{\alpha t}\cos\beta t|\boldsymbol{x}_0| \\
\eta &= \pm e^{\alpha t}\sin\beta t|\boldsymbol{x}_1|
\end{aligned}
$$

より，対数螺旋.

■(iv) A は複素の固有値をもつ

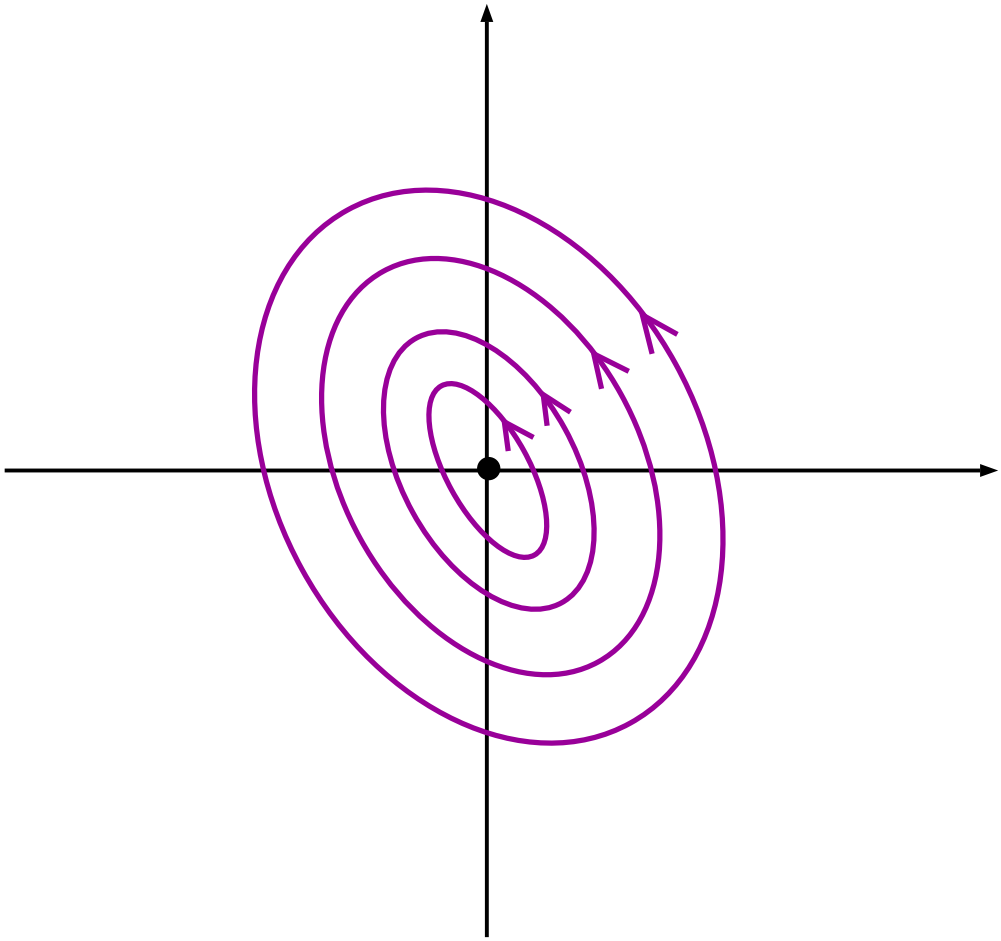
$\xi = C_1 e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad \eta = C_2 e^{\alpha t}\sin\beta t$

$\alpha \neq 0$：渦状点



軌道は対数螺旋 $\alpha > 0$ のとき，不安定な渦状点 $\alpha < 0$ のとき，安定な渦状点

$\alpha = 0$：渦心点



軌道は楕円 $\Rightarrow$ 周期的な運動

■まとめ：原点の安定性

固有値の実部は

- すべて > 0 $\Rightarrow$ 不安定
- すべて < 0 $\Rightarrow$ 安定
- 0 のものがある $\Rightarrow$ 他の平衡点があるか，周期解がある

安定性の定義

平衡点 $\boldsymbol{x}_s$ は

- 安定であるとは，
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \ |\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_s| \leq \delta \ \ \Rightarrow \ \ |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_s| \leq \varepsilon$$
- 漸近安定であるとは，
$$\exists \delta > 0 :\ \ |\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_s| \leq \delta \ \ \Rightarrow \ \ \lim_{t \to \infty} |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_s| = 0$$

微分積分学続論 II： 第 9 回

Karel Svadlenka

京都大学大学院理学研究科 数学教室

2020 年 6 月 10 日

ODE の解軌道

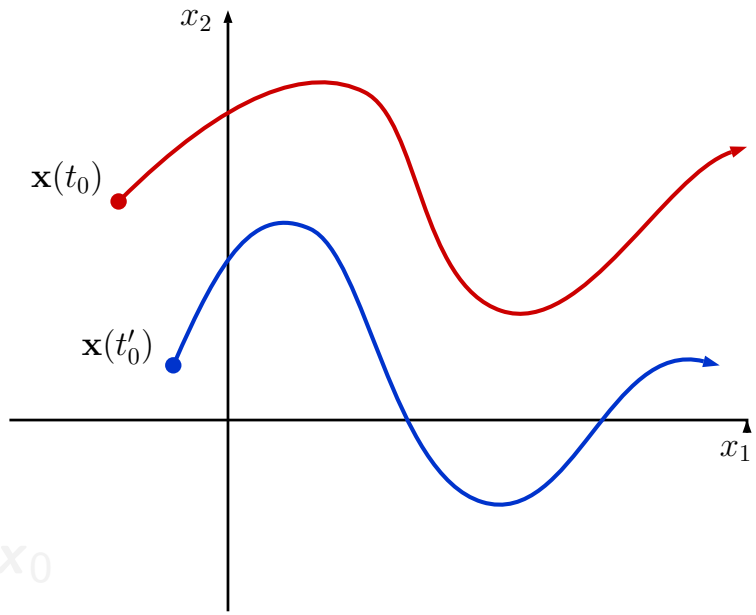
$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \quad = \text{連立 ODE} \quad \begin{cases} x_1' &= f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

解軌道 $= \{\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n;\ t \geq t_0\}$
$\mathbb{R}^n =$ 相空間

次の ODE で詳しく見る：

$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{cases}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$



ODE の解軌道

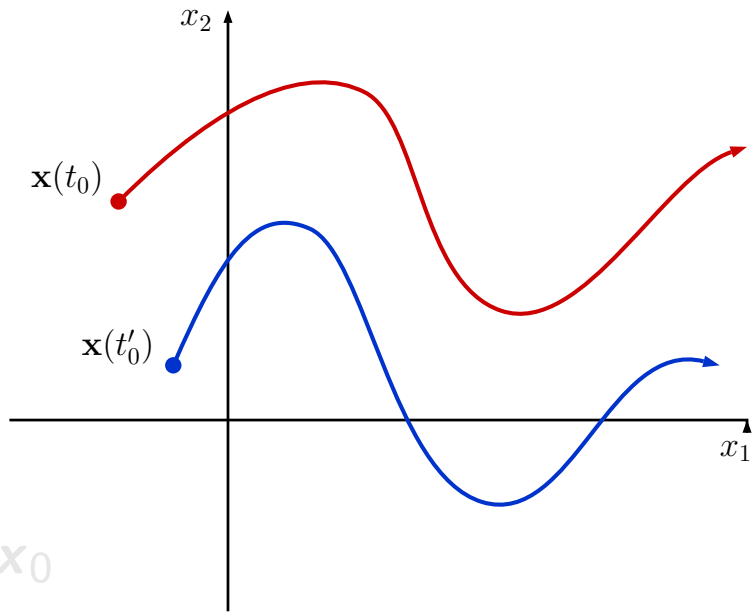
$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \quad = \text{連立 ODE} \quad \begin{cases} x_1' &= f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

解軌道 $= \{\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n;\ t \geq t_0\}$
$\mathbb{R}^n =$ 相空間

次の ODE で詳しく見る：

$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{cases}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$



ODE の解軌道

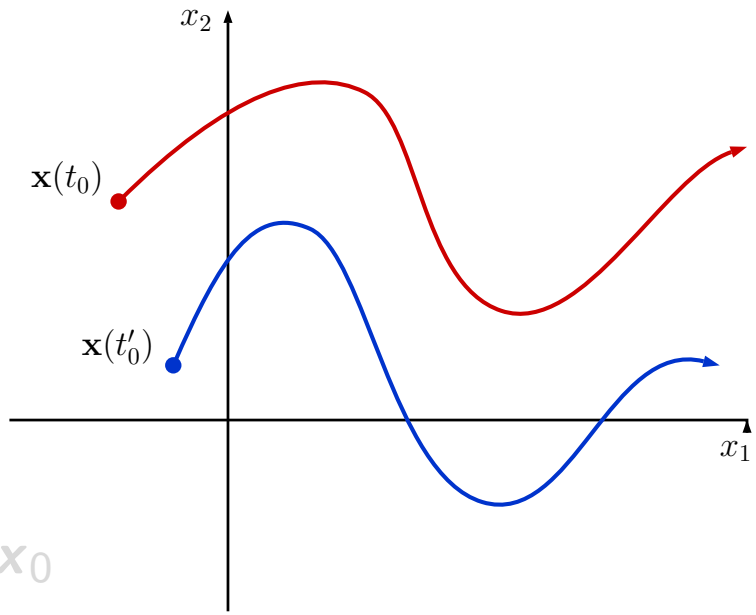
$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \quad = \text{連立 ODE} \begin{cases} x_1' &= f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

解軌道 $= \{\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n;\ t \geq t_0\}$
$\mathbb{R}^n =$ 相空間

次の ODE で詳しく見る：

$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{cases}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$



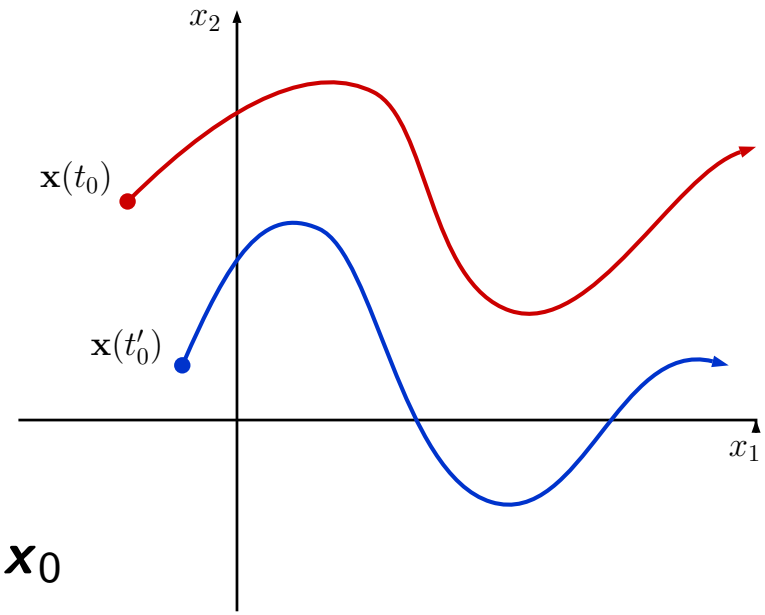
ODE の解軌道

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \quad = \text{連立 ODE} \quad \begin{cases} x_1' &= f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

解軌道 $= \{\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n;\ t \geq t_0\}$
$\mathbb{R}^n =$ 相空間

次の ODE で詳しく見る：

$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{cases}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

ODE の解軌道

4 つの場合に分ける：

(i) A は異なる実固有値をもつ

(ii) A は 2 重固有値をもち，対角化可能

(iii) A は 2 重固有値をもち，対角化不可能

(iv) A は複素の固有値をもつ

射影行列：復習

定理

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} \left\{ I + \frac{t}{1!}(A - \lambda_j I) + \cdots + \frac{t^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!}(A - \lambda_j I)^{m_j - 1} \right\} P_j$$

2×2 行列のとき，

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} \{ I + t(A - \lambda_j I) \} P_j, \qquad r = 1 \text{ or } 2.$$

2 つの異なる固有値のとき，

$$P_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad P_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t} P_1 + e^{\lambda_2 t} P_2$$

射影行列：復習

定理

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} \left\{ I + \frac{t}{1!}(A - \lambda_j I) + \cdots + \frac{t^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!}(A - \lambda_j I)^{m_j - 1} \right\} P_j$$

2×2 行列のとき，

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} \{ I + t(A - \lambda_j I) \} P_j, \qquad r = 1 \text{ or } 2.$$

2 つの異なる固有値のとき，

$$P_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad P_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t} P_1 + e^{\lambda_2 t} P_2$$

射影行列：復習

定理

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} \left\{ I + \frac{t}{1!}(A - \lambda_j I) + \cdots + \frac{t^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!}(A - \lambda_j I)^{m_j - 1} \right\} P_j$$

2×2 行列のとき，

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} \left\{ I + t(A - \lambda_j I) \right\} P_j, \qquad r = 1 \text{ or } 2.$$

2 つの異なる固有値のとき，

$$P_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad P_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t} P_1 + e^{\lambda_2 t} P_2$$

射影行列：復習

定理

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} \left\{ I + \frac{t}{1!}(A - \lambda_j I) + \cdots + \frac{t^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!}(A - \lambda_j I)^{m_j - 1} \right\} P_j$$

2×2 行列のとき，

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} \left\{ I + t(A - \lambda_j I) \right\} P_j, \qquad r = 1 \text{ or } 2.$$

2 つの異なる固有値のとき，

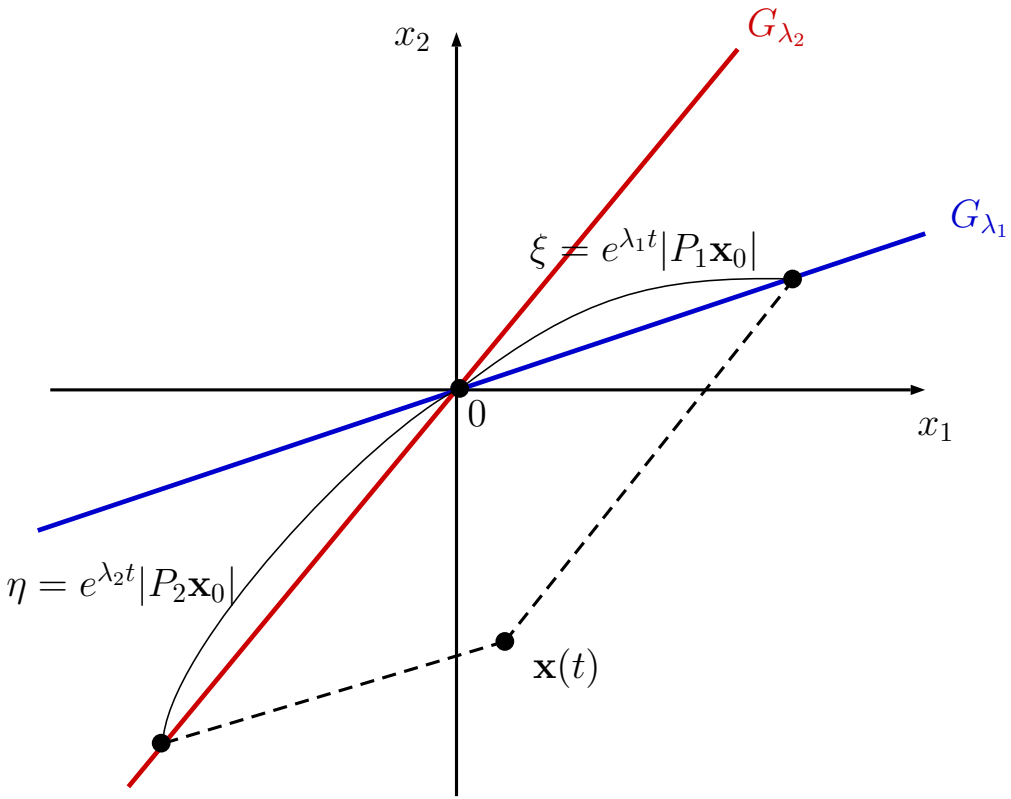
$$P_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad P_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t} P_1 + e^{\lambda_2 t} P_2$$

(i) A は異なる実固有値をもつ

解：$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}_0 = \left(e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2\right)\boldsymbol{x}_0 = e^{\lambda_1 t}P_1\boldsymbol{x}_0 + e^{\lambda_2 t}P_2\boldsymbol{x}_0$

$P_i\boldsymbol{x}_0 \in G_{\lambda_i}$ （λ_i に対する固有ベクトル）



$P_1\boldsymbol{x}_0, P_2\boldsymbol{x}_0$ の向きを
斜交座標軸にとる：

$$\xi = \pm e^{\lambda_1 t}|P_1\boldsymbol{x}_0|$$
$$\eta = \pm e^{\lambda_2 t}|P_2\boldsymbol{x}_0|$$

より

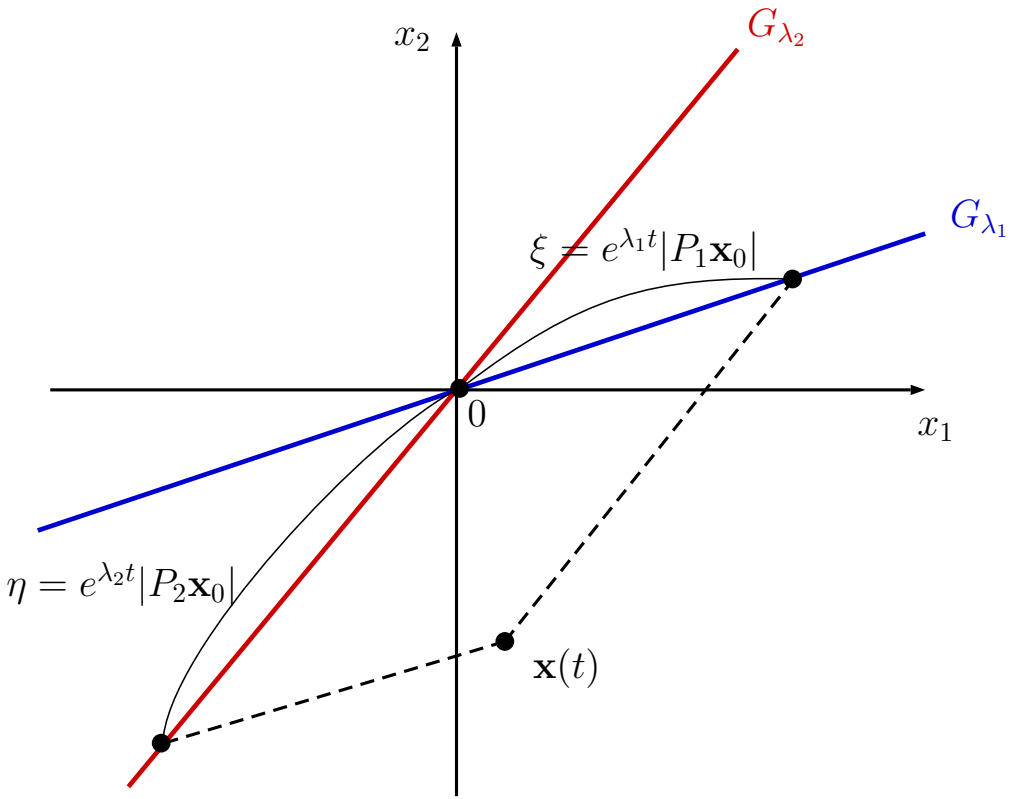
$$\eta = C\xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

原点は**平衡点**：$\boldsymbol{x}(t) = 0$ は解である．

(i) A は異なる実固有値をもつ

解：$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}_0 = \left(e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2\right)\boldsymbol{x}_0 = e^{\lambda_1 t}P_1\boldsymbol{x}_0 + e^{\lambda_2 t}P_2\boldsymbol{x}_0$

$P_i\boldsymbol{x}_0 \in G_{\lambda_i}$ （λ_i に対する固有ベクトル）



$P_1\boldsymbol{x}_0, P_2\boldsymbol{x}_0$ の向きを
斜交座標軸にとる：

$$\begin{aligned} \xi &= \pm e^{\lambda_1 t}|P_1\boldsymbol{x}_0| \\ \eta &= \pm e^{\lambda_2 t}|P_2\boldsymbol{x}_0| \end{aligned}$$

より

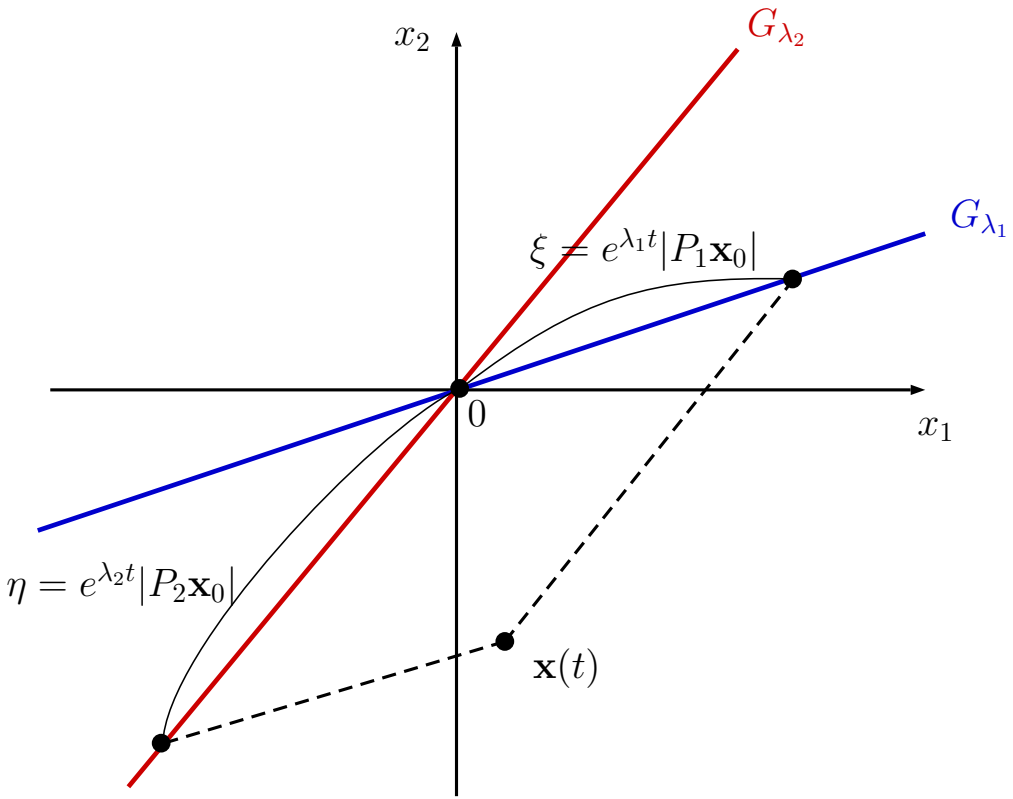
$$\eta = C\xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

原点は 平衡点 ：$x(t) = 0$ は解である.

(i) A は異なる実固有値をもつ

解：$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}_0 = \left(e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2\right)\boldsymbol{x}_0 = e^{\lambda_1 t}P_1\boldsymbol{x}_0 + e^{\lambda_2 t}P_2\boldsymbol{x}_0$

$P_i\boldsymbol{x}_0 \in G_{\lambda_i}$ （λ_i に対する固有ベクトル）



$P_1\boldsymbol{x}_0, P_2\boldsymbol{x}_0$ の向きを
斜交座標軸にとる：

$$\begin{aligned} \xi &= \pm e^{\lambda_1 t}|P_1\boldsymbol{x}_0| \\ \eta &= \pm e^{\lambda_2 t}|P_2\boldsymbol{x}_0| \end{aligned}$$

より

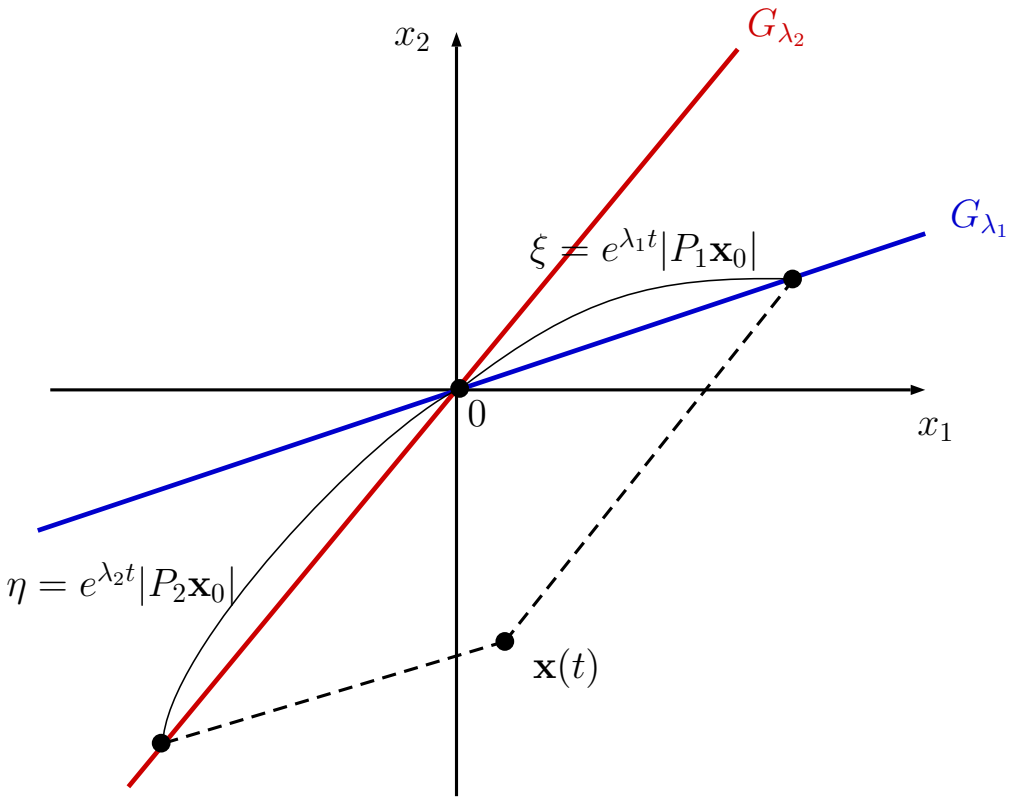
$$\eta = C\xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

原点は 平衡点 ：$\boldsymbol{x}(t) = 0$ は解である.

(i) A は異なる実固有値をもつ

解：$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}_0 = \left(e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2\right)\boldsymbol{x}_0 = e^{\lambda_1 t}P_1\boldsymbol{x}_0 + e^{\lambda_2 t}P_2\boldsymbol{x}_0$

$P_i\boldsymbol{x}_0 \in G_{\lambda_i}$ （λ_i に対する固有ベクトル）



$P_1\boldsymbol{x}_0, P_2\boldsymbol{x}_0$ の向きを
斜交座標軸にとる：

$$\begin{aligned} \xi &= \pm e^{\lambda_1 t}|P_1\boldsymbol{x}_0| \\ \eta &= \pm e^{\lambda_2 t}|P_2\boldsymbol{x}_0| \end{aligned}$$

より

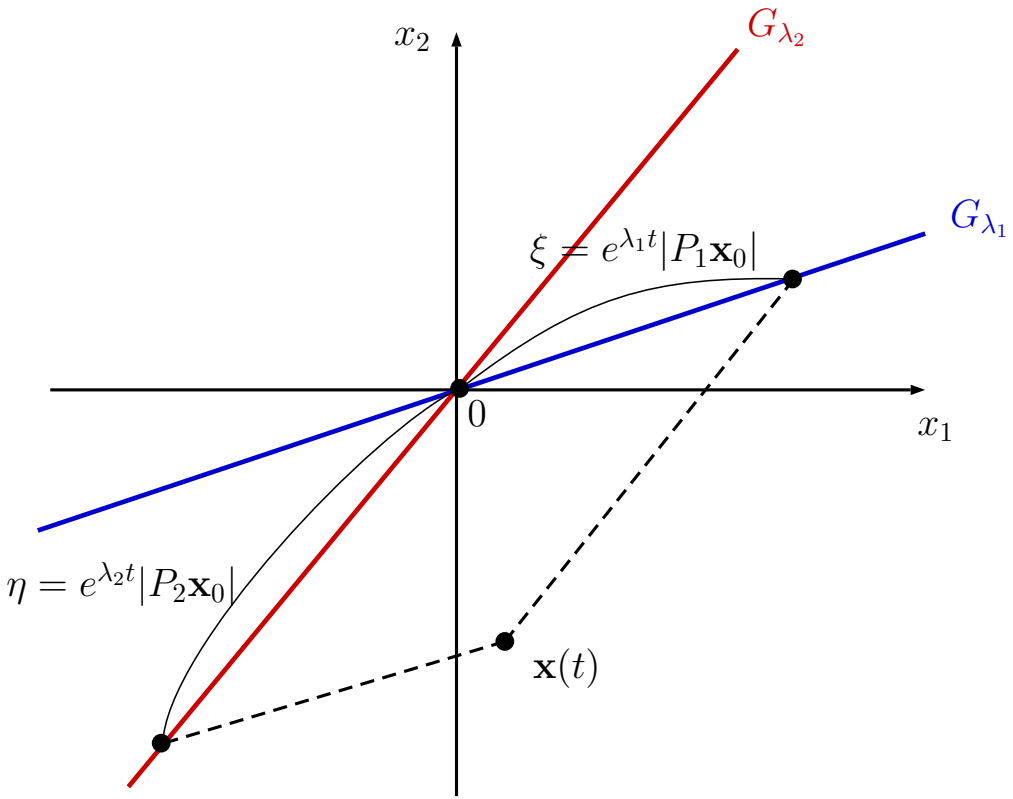
$$\eta = C\xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

原点は 平衡点 ：$\boldsymbol{x}(t) = 0$ は解である.

(i) A は異なる実固有値をもつ

解：$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}_0 = \left(e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2\right)\boldsymbol{x}_0 = e^{\lambda_1 t}P_1\boldsymbol{x}_0 + e^{\lambda_2 t}P_2\boldsymbol{x}_0$

$P_i\boldsymbol{x}_0 \in G_{\lambda_i}$ （λ_i に対する固有ベクトル）



$P_1\boldsymbol{x}_0, P_2\boldsymbol{x}_0$ の向きを
斜交座標軸にとる：

$$\begin{aligned} \xi &= \pm e^{\lambda_1 t}|P_1\boldsymbol{x}_0| \\ \eta &= \pm e^{\lambda_2 t}|P_2\boldsymbol{x}_0| \end{aligned}$$

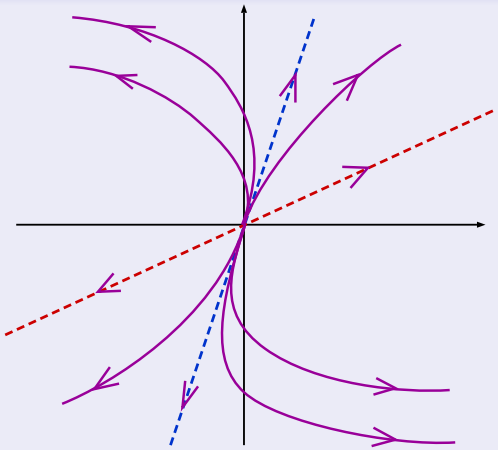
より

$$\eta = C\xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

原点は 平衡点 ：$\boldsymbol{x}(t) = 0$ は解である.

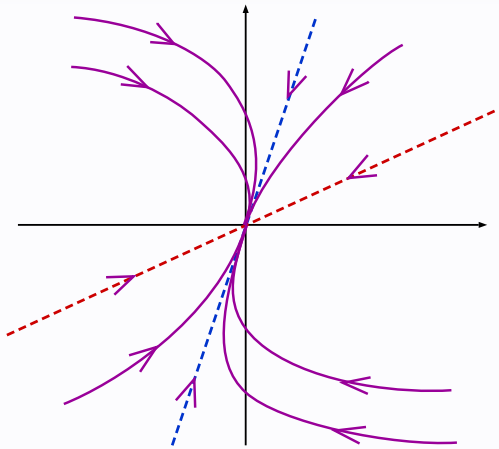
(i) A は異なる実固有値をもつ： $\xi = C_1 e^{\lambda_1 t}, \eta = C_2 e^{\lambda_2 t}$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$：不安定結節点



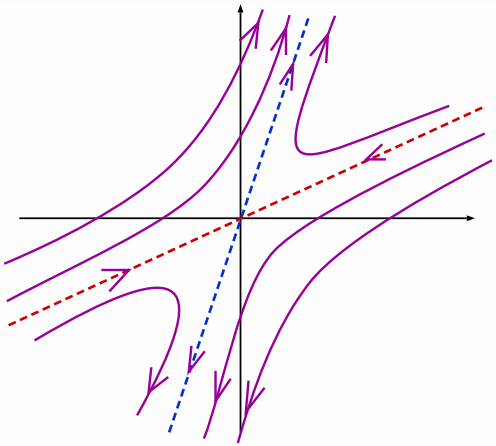
$t \to \infty$
のとき，
$|\boldsymbol{x}(t)| \to \infty$

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$：安定結節点



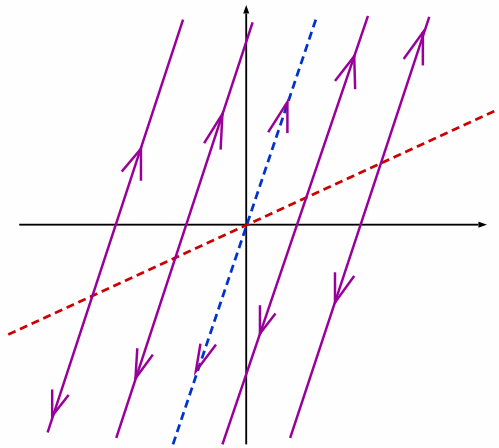
$t \to \infty$
のとき，
$|\boldsymbol{x}(t)| \to 0$

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$：鞍状点



$t \to \infty$
のとき，
$|\boldsymbol{x}(t)| \to \infty$
G_{λ_2} に
漸近する

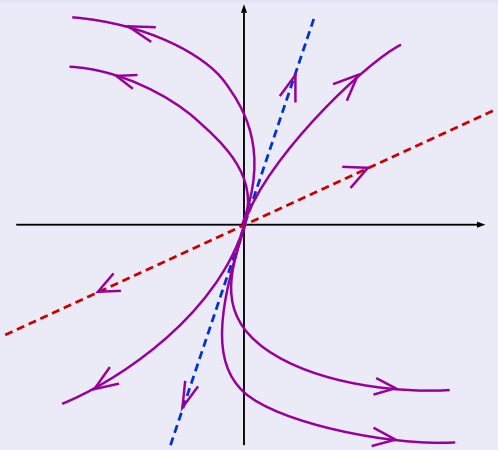
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$



$\xi = C$
に沿って
$|x(t)| \to \infty$,
G_{λ_1} 上の点は
全て不安定な
平衡点

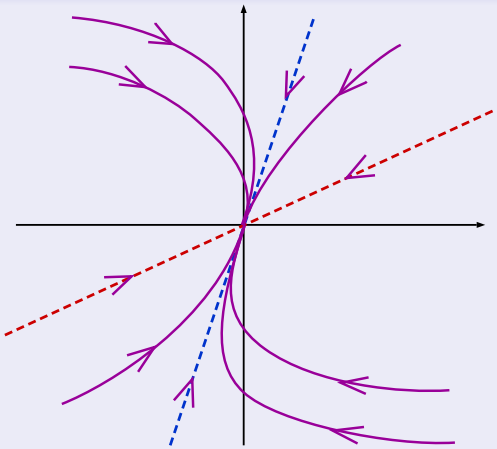
(i) A は異なる実固有値をもつ： $\xi = C_1 e^{\lambda_1 t}, \eta = C_2 e^{\lambda_2 t}$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$：不安定結節点



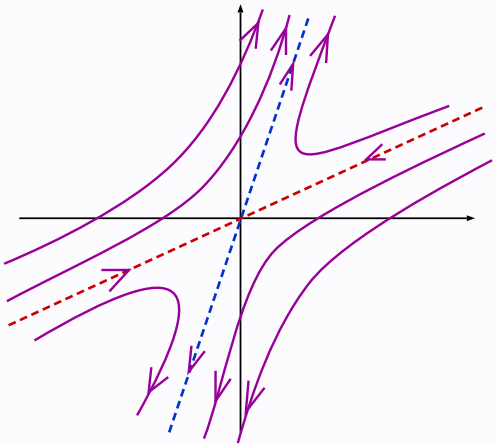
$t \to \infty$
のとき，
$|\boldsymbol{x}(t)| \to \infty$

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$：安定結節点



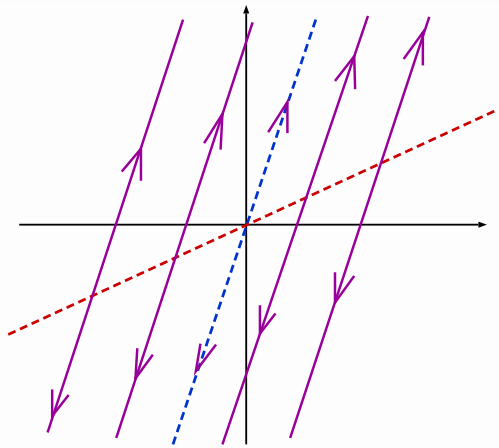
$t \to \infty$
のとき，
$|\boldsymbol{x}(t)| \to 0$

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$：鞍状点



$t \to \infty$
のとき，
$|\boldsymbol{x}(t)| \to \infty$
G_{λ_2} に
漸近する

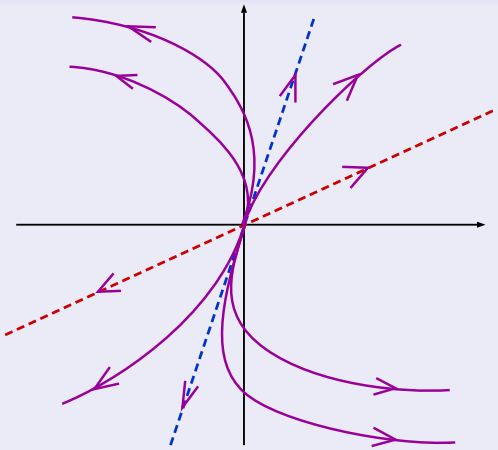
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$



$\xi = C$
に沿って
$|\boldsymbol{x}(t)| \to \infty$,
G_{λ_1} 上の点は
全て不安定な
平衡点

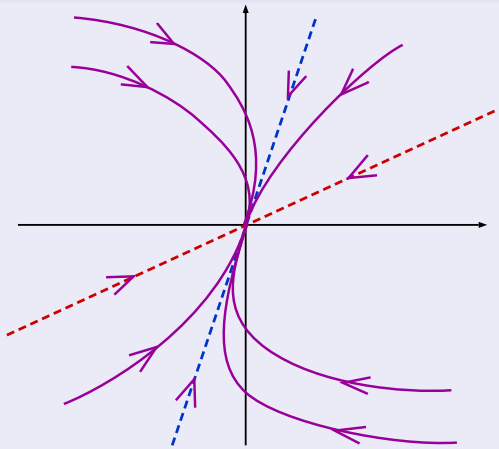
(i) A は異なる実固有値をもつ： $\xi = C_1 e^{\lambda_1 t}, \eta = C_2 e^{\lambda_2 t}$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$：不安定結節点



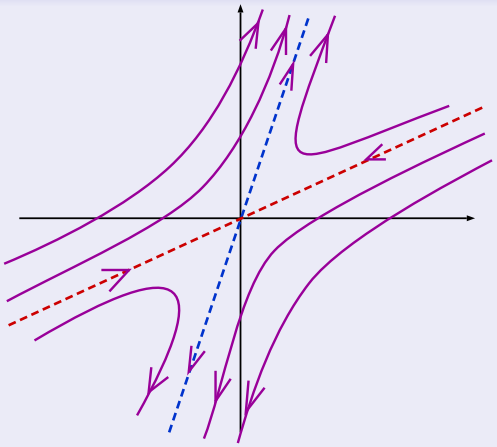
$t \to \infty$
のとき，
$|\boldsymbol{x}(t)| \to \infty$

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$：安定結節点



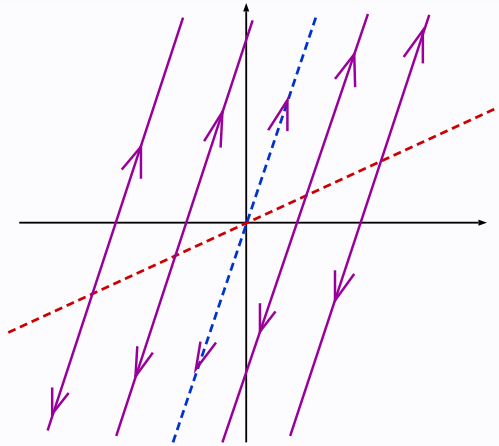
$t \to \infty$
のとき，
$|\boldsymbol{x}(t)| \to 0$

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$：鞍状点



$t \to \infty$
のとき，
$|\boldsymbol{x}(t)| \to \infty$
G_{λ_2} に
漸近する

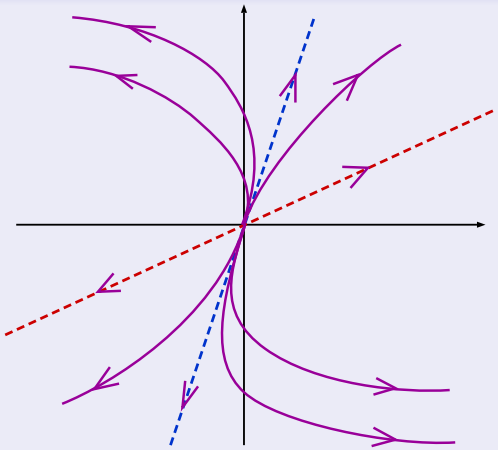
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$



$\xi = C$
に沿って
$|\boldsymbol{x}(t)| \to \infty$,
G_{λ_1} 上の点は
全て不安定な
平衡点

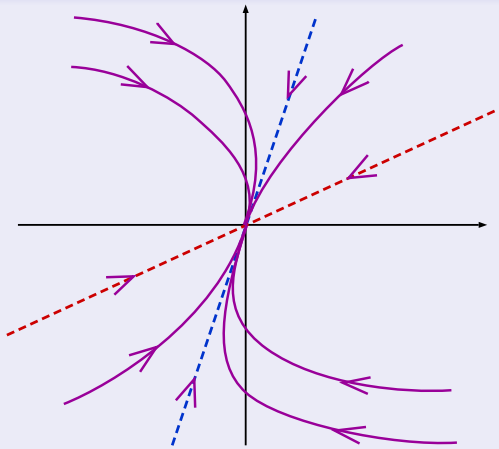
(i) A は異なる実固有値をもつ： $\xi = C_1 e^{\lambda_1 t}, \eta = C_2 e^{\lambda_2 t}$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$：不安定結節点



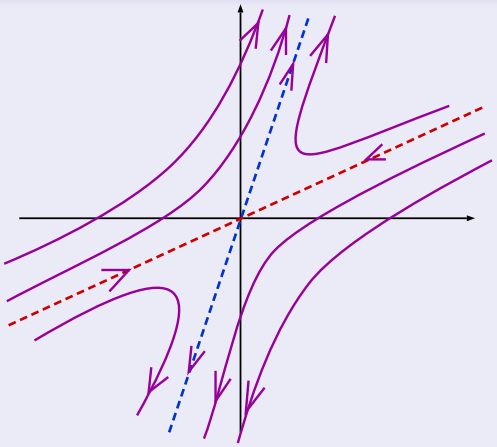
$t \to \infty$
のとき，
$|\boldsymbol{x}(t)| \to \infty$

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$：安定結節点



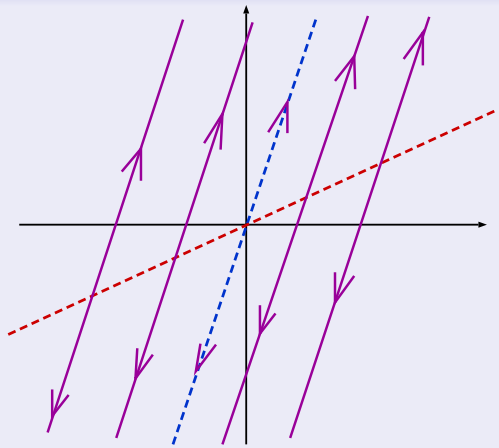
$t \to \infty$
のとき，
$|\boldsymbol{x}(t)| \to 0$

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$：鞍状点



$t \to \infty$
のとき，
$|\boldsymbol{x}(t)| \to \infty$
G_{λ_2} に
漸近する

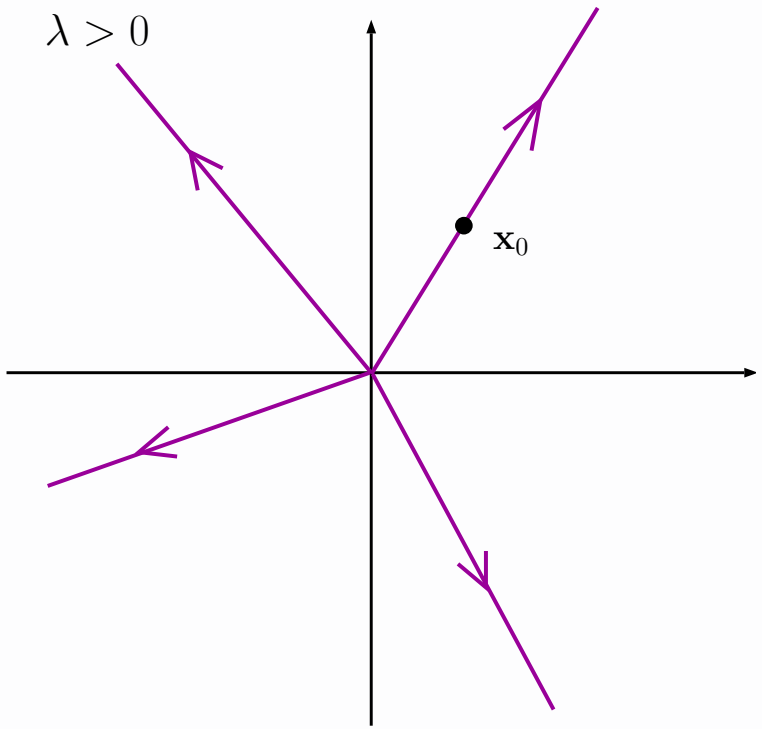
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$



$\xi = C$
に沿って
$|\boldsymbol{x}(t)| \to \infty$,
G_{λ_1} 上の点は
全て不安定な
平衡点

(ii) A は 2 重固有値をもち，対角化可能

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I$$

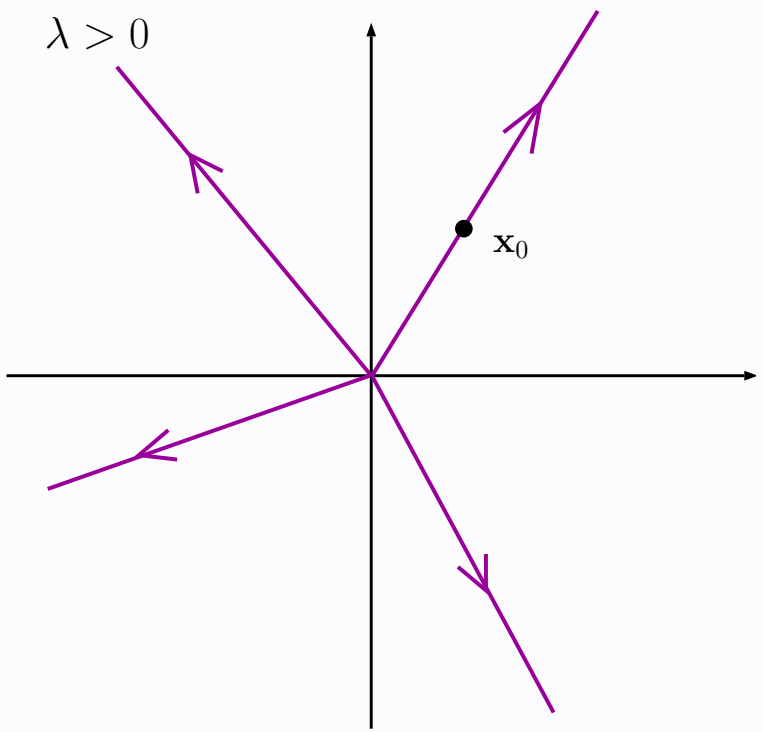


解：$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{x}_0$

- $\lambda < 0$ のとき，原点は安定な平衡点
- $\lambda > 0$ のとき，原点は不安定な平衡点

(ii) A は 2 重固有値をもち，対角化可能

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I$$

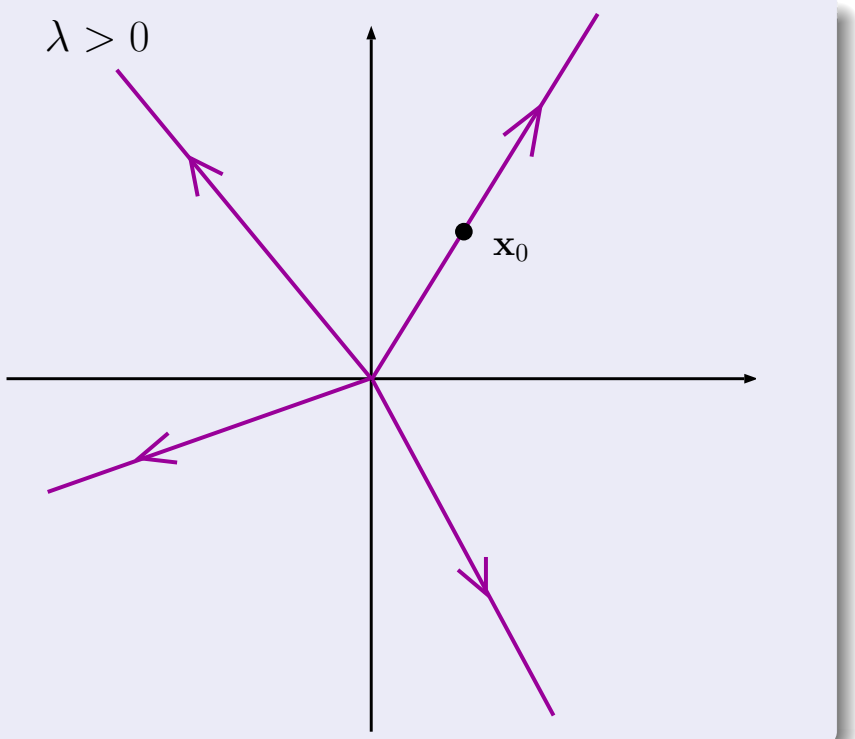


解：$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{x}_0$

- $\lambda < 0$ のとき，原点は安定な平衡点
- $\lambda > 0$ のとき，原点は不安定な平衡点

(ii) A は 2 重固有値をもち，対角化可能

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I$$

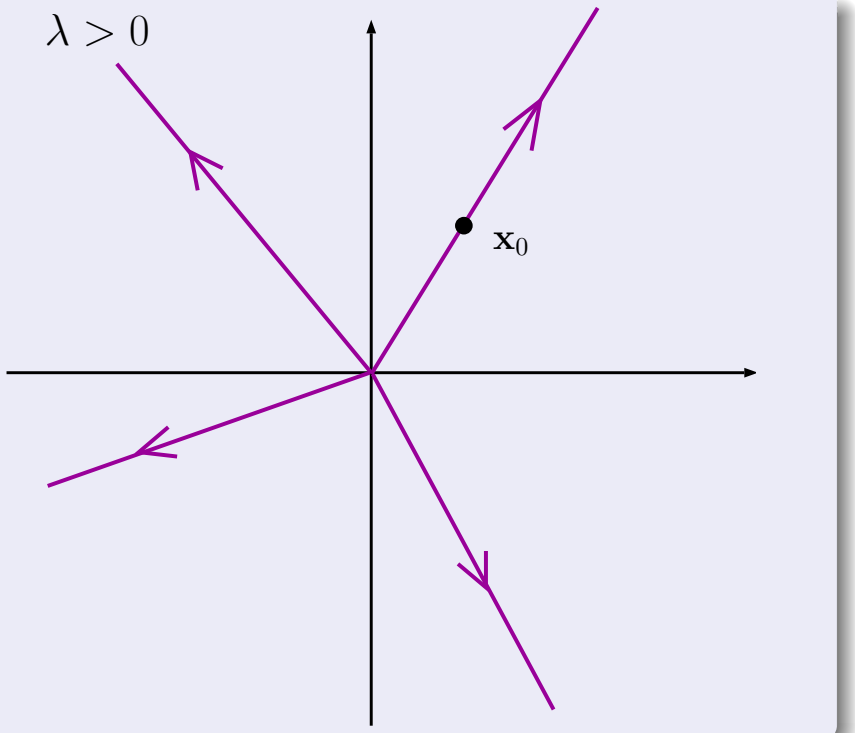


解：$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{x}_0$

- $\lambda < 0$ のとき，原点は安定な平衡点
- $\lambda > 0$ のとき，原点は不安定な平衡点

(ii) A は 2 重固有値をもち，対角化可能

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I$$

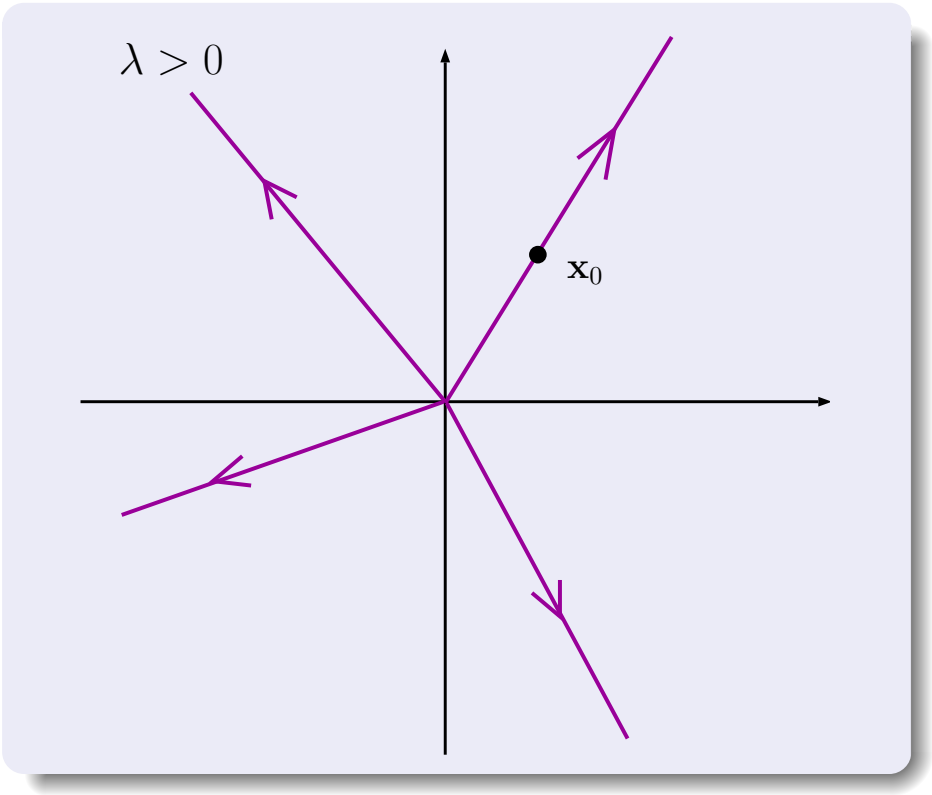


解：$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{x}_0$

- $\lambda < 0$ のとき，原点は安定な平衡点
- $\lambda > 0$ のとき，原点は不安定な平衡点

(ii) A は 2 重固有値をもち，対角化可能

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I$$



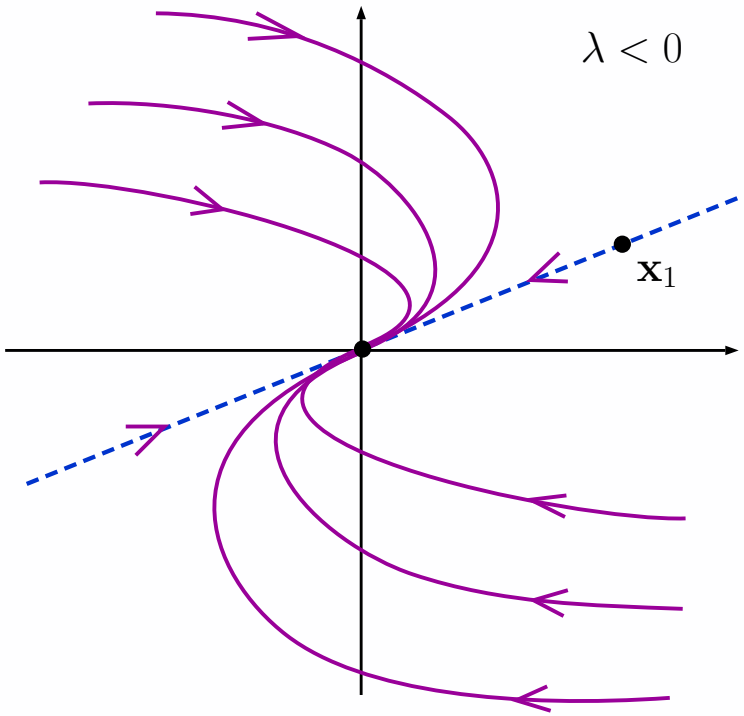
解：$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{x}_0$

- $\lambda < 0$ のとき，原点は安定な平衡点
- $\lambda > 0$ のとき，原点は不安定な平衡点

(iii) A は 2 重固有値をもち，対角化不可能

解：$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\left(I + t(A-\lambda I)\right)\boldsymbol{x}_0 = e^{\lambda t}\boldsymbol{x}_0 + te^{\lambda t}\underbrace{(A-\lambda I)\boldsymbol{x}_0}_{\boldsymbol{x}_1}$

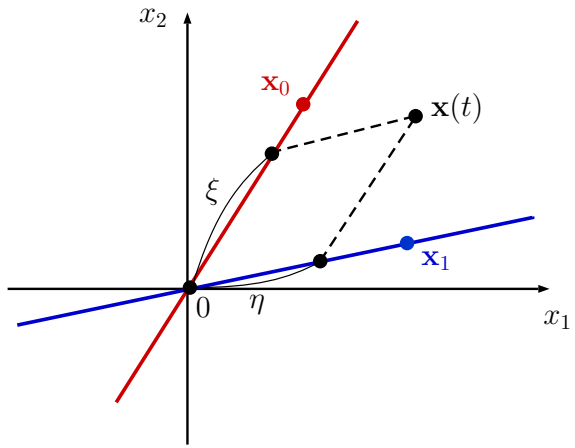
$\boldsymbol{x}_1$ の向きは $\boldsymbol{x}_0$ に寄らず決まる（$(A-\lambda I)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$ より）.



$\boldsymbol{x}_0$ を固定する．

$$\xi = \pm e^{\lambda t}|\boldsymbol{x}_0|$$
$$\eta = \pm te^{\lambda t}|\boldsymbol{x}_1|$$

より $\eta = \dfrac{1}{\lambda}\log\dfrac{\xi}{|\boldsymbol{x}_0|}\cdot\dfrac{\xi}{|\boldsymbol{x}_0|}|\boldsymbol{x}_1|$

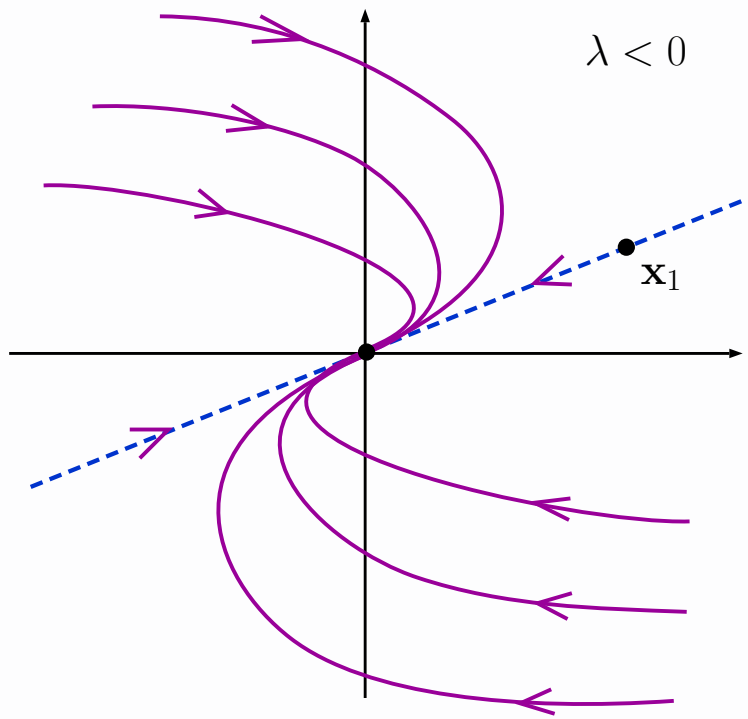


原点：$\lambda > 0$ . . . 不安定，$\lambda < 0$ . . . 安定

(iii) A は 2 重固有値をもち，対角化不可能

解：$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\left(I + t(A-\lambda I)\right)\boldsymbol{x}_0 = e^{\lambda t}\boldsymbol{x}_0 + te^{\lambda t}\underbrace{(A-\lambda I)\boldsymbol{x}_0}_{\boldsymbol{x}_1}$

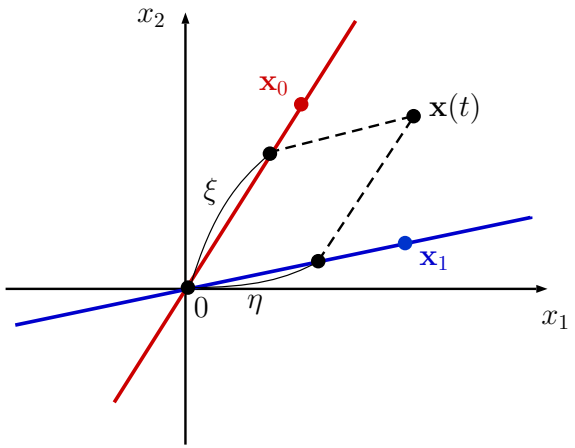
$\boldsymbol{x}_1$ の向きは $\boldsymbol{x}_0$ に寄らず決まる（$(A-\lambda I)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$ より）．



$\boldsymbol{x}_0$ を固定する．

$$\xi = \pm e^{\lambda t}|\boldsymbol{x}_0|$$
$$\eta = \pm te^{\lambda t}|\boldsymbol{x}_1|$$

より $\eta = \dfrac{1}{\lambda}\log\dfrac{\xi}{|\boldsymbol{x}_0|}\cdot\dfrac{\xi}{|\boldsymbol{x}_0|}|\boldsymbol{x}_1|$

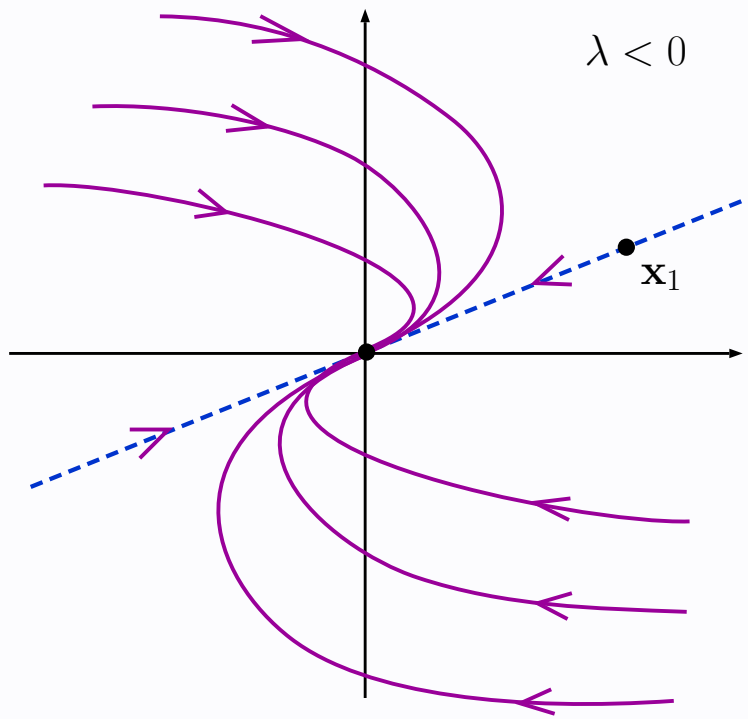


原点：$\lambda > 0$ . . . 不安定，$\lambda < 0$ . . . 安定

(iii) A は 2 重固有値をもち，対角化不可能

解：$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\left(I + t(A-\lambda I)\right)\boldsymbol{x}_0 = e^{\lambda t}\boldsymbol{x}_0 + te^{\lambda t}\underbrace{(A-\lambda I)\boldsymbol{x}_0}_{\boldsymbol{x}_1}$

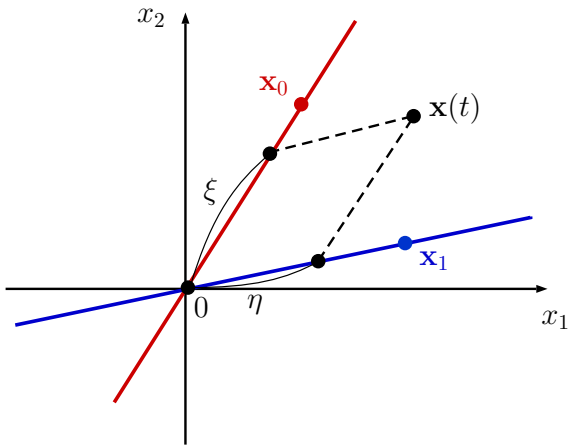
$\boldsymbol{x}_1$ の向きは $\boldsymbol{x}_0$ に寄らず決まる（$(A-\lambda I)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$ より）.



$\boldsymbol{x}_0$ を固定する.

$$\xi = \pm e^{\lambda t}|\boldsymbol{x}_0|$$
$$\eta = \pm te^{\lambda t}|\boldsymbol{x}_1|$$

より $\eta = \dfrac{1}{\lambda}\log\dfrac{\xi}{|\boldsymbol{x}_0|}\cdot\dfrac{\xi}{|\boldsymbol{x}_0|}|\boldsymbol{x}_1|$

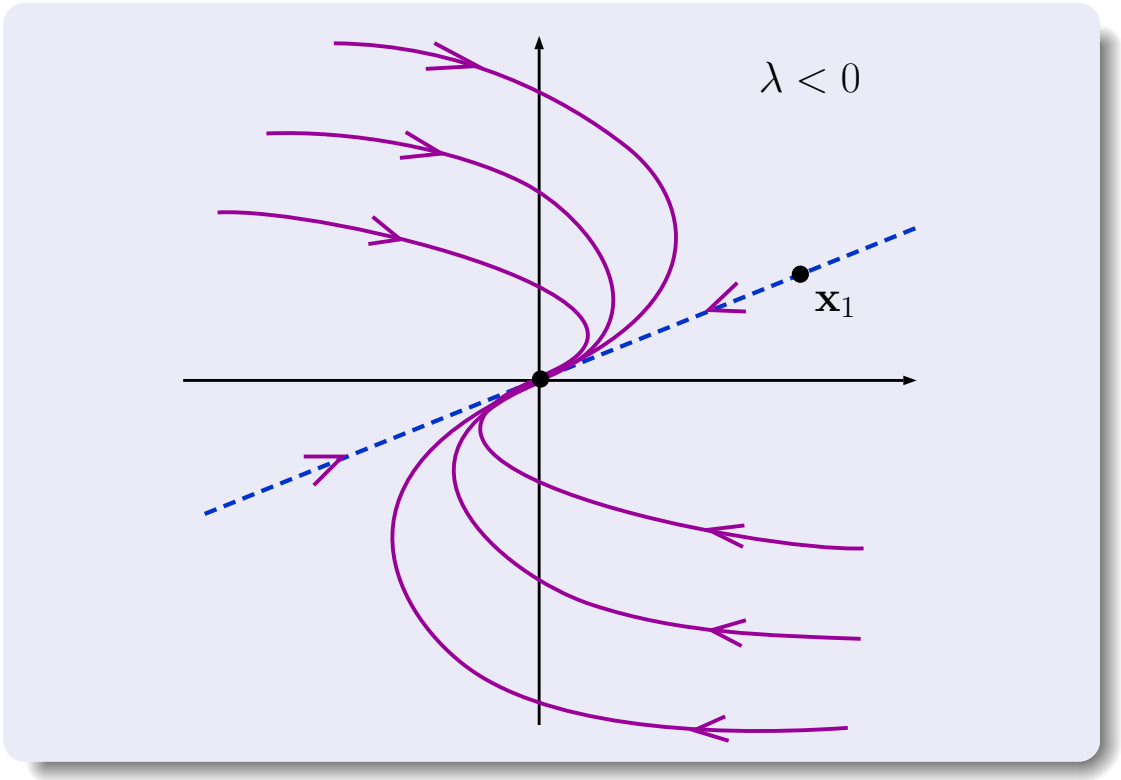


原点：$\lambda > 0$... 不安定，$\lambda < 0$... 安定

(iii) A は 2 重固有値をもち，対角化不可能

解：$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\left(I + t(A-\lambda I)\right)\boldsymbol{x}_0 = e^{\lambda t}\boldsymbol{x}_0 + te^{\lambda t}\underbrace{(A-\lambda I)\boldsymbol{x}_0}_{\boldsymbol{x}_1}$

$\boldsymbol{x}_1$ の向きは $\boldsymbol{x}_0$ に寄らず決まる（$(A-\lambda I)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$ より）.

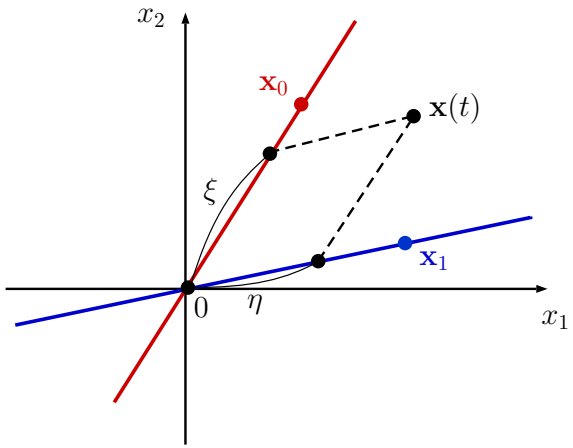


原点：$\lambda > 0\ldots$ 不安定，$\lambda < 0\ldots$ 安定

$\boldsymbol{x}_0$ を固定する.

$$\xi = \pm e^{\lambda t}|\boldsymbol{x}_0|$$
$$\eta = \pm te^{\lambda t}|\boldsymbol{x}_1|$$

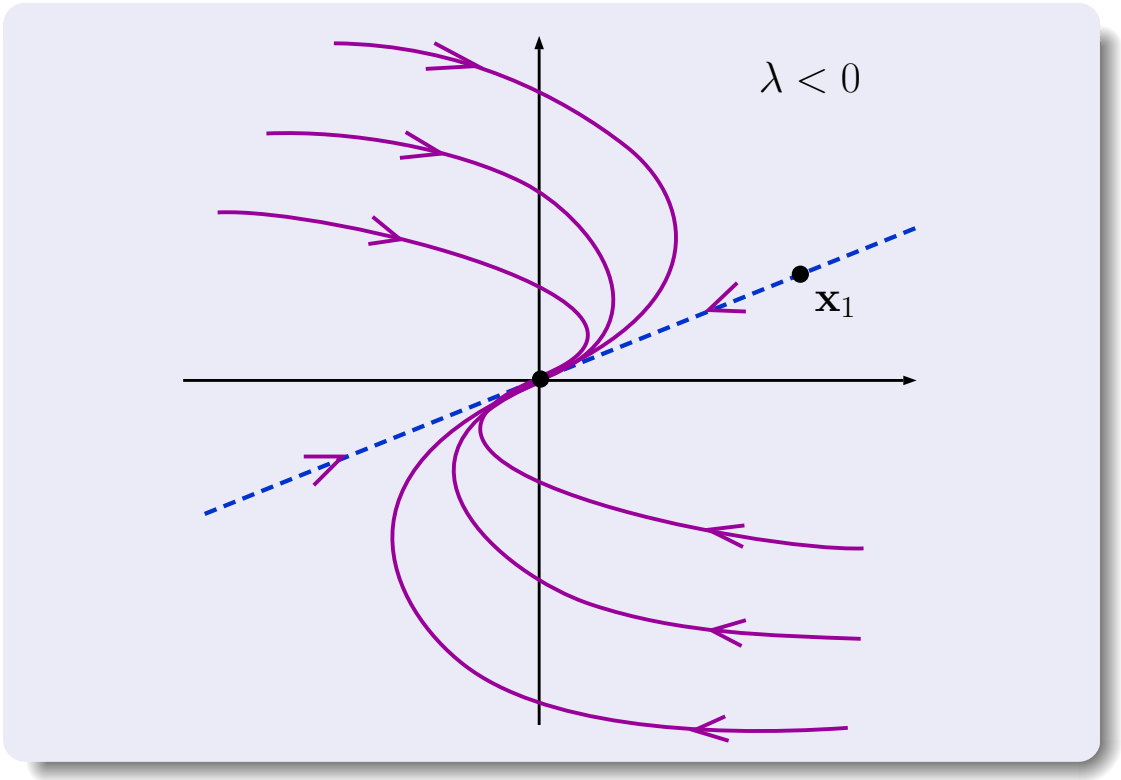
より $\eta = \dfrac{1}{\lambda}\log\dfrac{\xi}{|\boldsymbol{x}_0|}\cdot\dfrac{\xi}{|\boldsymbol{x}_0|}|\boldsymbol{x}_1|$



(iii) A は 2 重固有値をもち，対角化不可能

解：$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\left(I + t(A-\lambda I)\right)\boldsymbol{x}_0 = e^{\lambda t}\boldsymbol{x}_0 + te^{\lambda t}\underbrace{(A-\lambda I)\boldsymbol{x}_0}_{\boldsymbol{x}_1}$

$\boldsymbol{x}_1$ の向きは $\boldsymbol{x}_0$ に寄らず決まる（$(A-\lambda I)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$ より）.

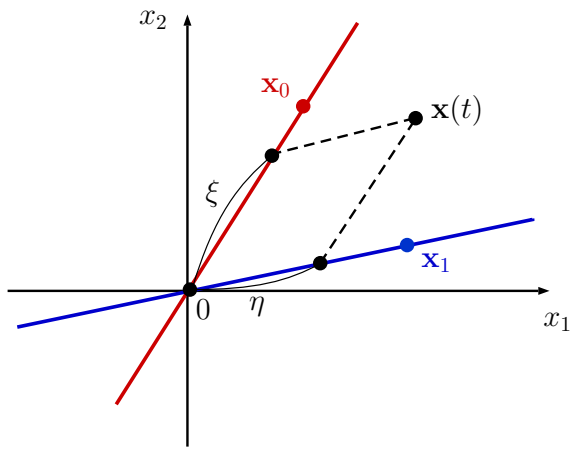


原点：$\lambda > 0\ldots$ 不安定，$\lambda < 0\ldots$ 安定

$\boldsymbol{x}_0$ を固定する.

$$\begin{aligned} \xi &= \pm e^{\lambda t}|\boldsymbol{x}_0| \\ \eta &= \pm te^{\lambda t}|\boldsymbol{x}_1| \end{aligned}$$

より $\eta = \dfrac{1}{\lambda}\log\dfrac{\xi}{|\boldsymbol{x}_0|}\cdot\dfrac{\xi}{|\boldsymbol{x}_0|}|\boldsymbol{x}_1|$



(iv) A は複素の固有値をもつ

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$，このとき，$P_2 = \overline{P}_1$（共役）
$P_1 = Q + iR$ とすると，$Q = \frac{1}{2}(P_1 + \overline{P}_1) = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = \frac{1}{2}I$.

$$
\begin{aligned}
\text{解：} \quad e^{tA}\boldsymbol{x}_0 &= (e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2)\boldsymbol{x}_0 \\
&= e^{\alpha t}((\cos\beta t + i\sin\beta t)(Q + iR) \\
&\quad +(\cos\beta t - i\sin\beta t)(Q - iR))\boldsymbol{x}_0 \\
&= 2e^{\alpha t}\left(\cos\beta t Q - \sin\beta t R\right)\boldsymbol{x}_0 \\
&= e^{\alpha t}\cos\beta t\boldsymbol{x}_0 - e^{\alpha t}\sin\beta t \underbrace{2R\boldsymbol{x}_0}_{\boldsymbol{x}_1}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$ の向きを斜交座標軸にとると，

$$
\begin{aligned}
\xi &= \pm e^{\alpha t}\cos\beta t|\boldsymbol{x}_0| \\
\eta &= \pm e^{\alpha t}\sin\beta t|\boldsymbol{x}_1|
\end{aligned}
$$

より，対数螺旋．

(iv) A は複素の固有値をもつ

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$，このとき，$P_2 = \overline{P}_1$（共役）

$P_1 = Q + iR$ とすると，$Q = \frac{1}{2}(P_1 + \overline{P}_1) = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = \frac{1}{2}I.$

$$
\begin{aligned}
\text{解：} \quad e^{tA}\boldsymbol{x}_0 &= (e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2)\boldsymbol{x}_0 \\
&= e^{\alpha t}((\cos\beta t + i\sin\beta t)(Q + iR) \\
&\quad +(\cos\beta t - i\sin\beta t)(Q - iR))\boldsymbol{x}_0 \\
&= 2e^{\alpha t}\left(\cos\beta t Q - \sin\beta t R\right)\boldsymbol{x}_0 \\
&= e^{\alpha t}\cos\beta t\boldsymbol{x}_0 - e^{\alpha t}\sin\beta t \underbrace{2R\boldsymbol{x}_0}_{\boldsymbol{x}_1}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$ の向きを斜交座標軸にとると，

$$
\begin{aligned}
\xi &= \pm e^{\alpha t}\cos\beta t|\boldsymbol{x}_0| \\
\eta &= \pm e^{\alpha t}\sin\beta t|\boldsymbol{x}_1|
\end{aligned}
$$

より，対数螺旋．

(iv) A は複素の固有値をもつ

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$，このとき，$P_2 = \overline{P}_1$（共役）
$P_1 = Q + iR$ とすると，$Q = \frac{1}{2}(P_1 + \overline{P}_1) = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = \frac{1}{2}I$.

解：
$$\begin{aligned} e^{tA}\boldsymbol{x}_0 &= (e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2)\boldsymbol{x}_0 \\ &= e^{\alpha t}((\cos\beta t + i\sin\beta t)(Q + iR) \\ &\quad +(\cos\beta t - i\sin\beta t)(Q - iR))\boldsymbol{x}_0 \\ &= 2e^{\alpha t}\left(\cos\beta t Q - \sin\beta t R\right)\boldsymbol{x}_0 \\ &= e^{\alpha t}\cos\beta t\boldsymbol{x}_0 - e^{\alpha t}\sin\beta t \underbrace{2R\boldsymbol{x}_0}_{\boldsymbol{x}_1} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$ の向きを斜交座標軸にとると，

$$\begin{aligned} \xi &= \pm e^{\alpha t}\cos\beta t|\boldsymbol{x}_0| \\ \eta &= \pm e^{\alpha t}\sin\beta t|\boldsymbol{x}_1| \end{aligned}$$

より，対数螺旋.

(iv) A は複素の固有値をもつ

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$，このとき，$P_2 = \overline{P}_1$（共役）
$P_1 = Q + iR$ とすると，$Q = \frac{1}{2}(P_1 + \overline{P}_1) = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = \frac{1}{2}I$.

$$
\begin{aligned}
\text{解：} \qquad e^{tA}\boldsymbol{x}_0 &= (e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2)\boldsymbol{x}_0 \\
&= e^{\alpha t}((\cos\beta t + i\sin\beta t)(Q + iR) \\
&\quad +(\cos\beta t - i\sin\beta t)(Q - iR))\boldsymbol{x}_0 \\
&= 2e^{\alpha t}\left(\cos\beta t Q - \sin\beta t R\right)\boldsymbol{x}_0 \\
&= e^{\alpha t}\cos\beta t\boldsymbol{x}_0 - e^{\alpha t}\sin\beta t \underbrace{2R\boldsymbol{x}_0}_{\boldsymbol{x}_1}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$ の向きを斜交座標軸にとると，

$$
\begin{aligned}
\xi &= \pm e^{\alpha t}\cos\beta t|\boldsymbol{x}_0| \\
\eta &= \pm e^{\alpha t}\sin\beta t|\boldsymbol{x}_1|
\end{aligned}
$$

より，対数螺旋.

(iv) A は複素の固有値をもつ

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$，このとき，$P_2 = \overline{P}_1$（共役）
$P_1 = Q + iR$ とすると，$Q = \frac{1}{2}(P_1 + \overline{P}_1) = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = \frac{1}{2}I$.

$$
\begin{aligned}
\text{解：} \qquad e^{tA}\boldsymbol{x}_0 &= (e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2)\boldsymbol{x}_0 \\
&= e^{\alpha t}((\cos\beta t + i\sin\beta t)(Q + iR) \\
&\quad +(\cos\beta t - i\sin\beta t)(Q - iR))\boldsymbol{x}_0 \\
&= 2e^{\alpha t}\left(\cos\beta t Q - \sin\beta t R\right)\boldsymbol{x}_0 \\
&= e^{\alpha t}\cos\beta t\boldsymbol{x}_0 - e^{\alpha t}\sin\beta t \underbrace{2R\boldsymbol{x}_0}_{\boldsymbol{x}_1}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$ の向きを斜交座標軸にとると，

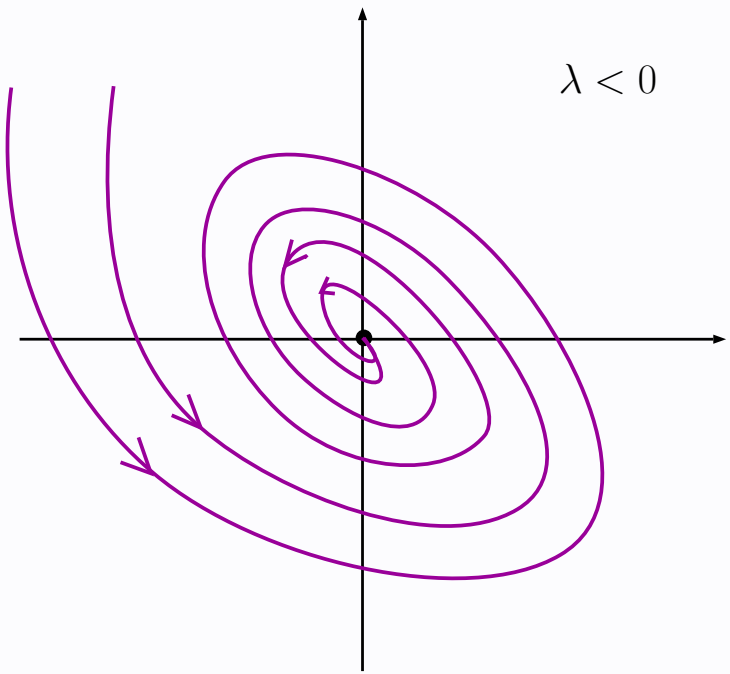
$$
\begin{aligned}
\xi &= \pm e^{\alpha t}\cos\beta t|\boldsymbol{x}_0| \\
\eta &= \pm e^{\alpha t}\sin\beta t|\boldsymbol{x}_1|
\end{aligned}
$$

より，対数螺旋.

(iv) A は複素の固有値をもつ

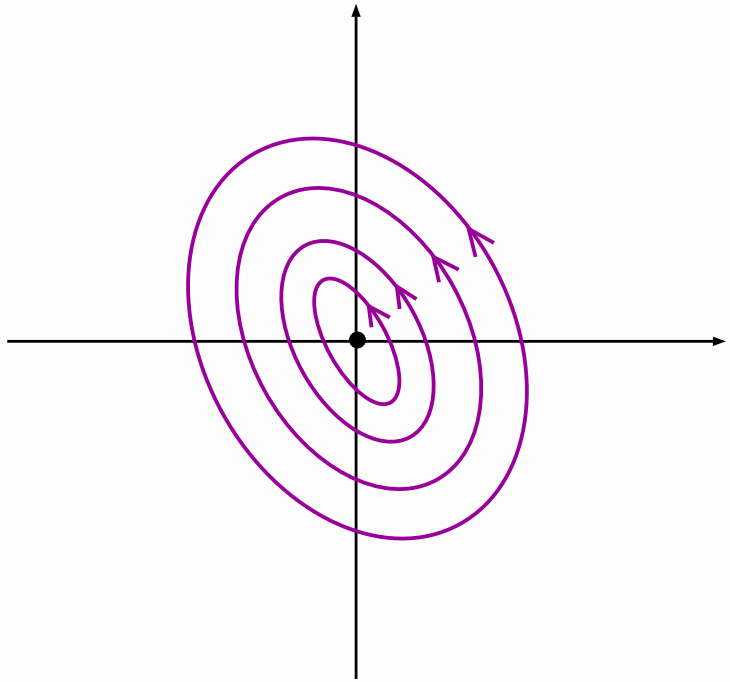
$$\xi = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad \eta = C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$$

$\alpha \neq 0$: 渦状点



軌道は対数螺旋
$\alpha > 0$ のとき，不安定な渦状点
$\alpha < 0$ のとき，安定な渦状点

$\alpha = 0$: 渦心点

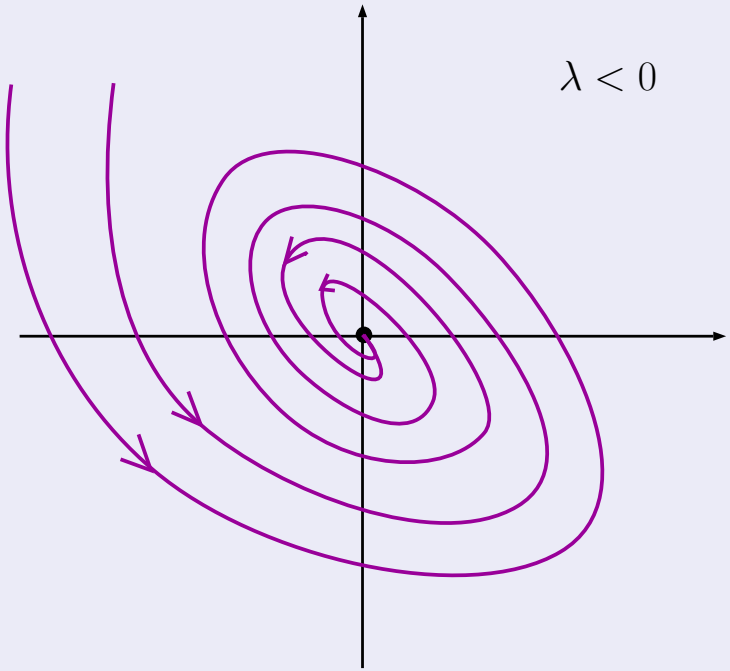


軌道は楕円 $\Rightarrow$ 周期的な運動

(iv) A は複素の固有値をもつ

$\xi = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad \eta = C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$

$\alpha \neq 0$: 渦状点

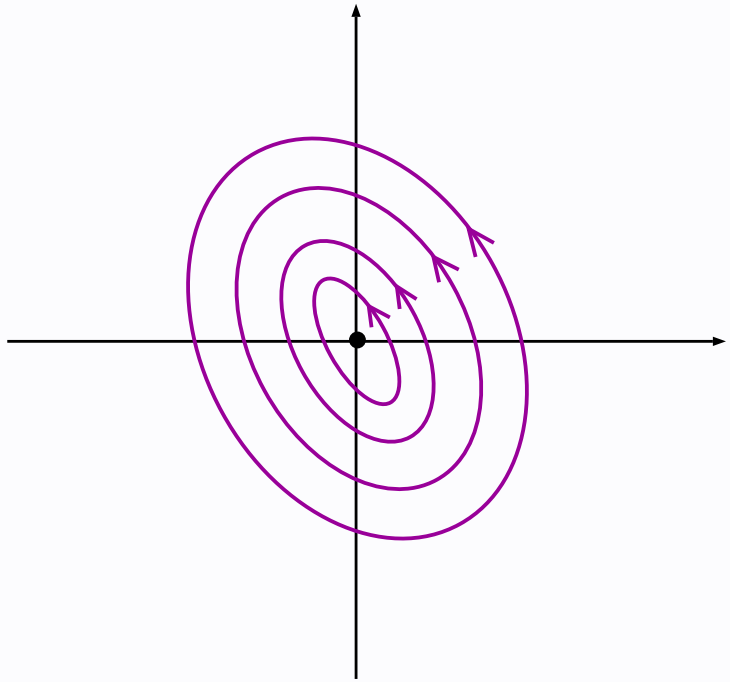


軌道は対数螺旋

$\alpha > 0$ のとき，不安定な渦状点

$\alpha < 0$ のとき，安定な渦状点

$\alpha = 0$: 渦心点

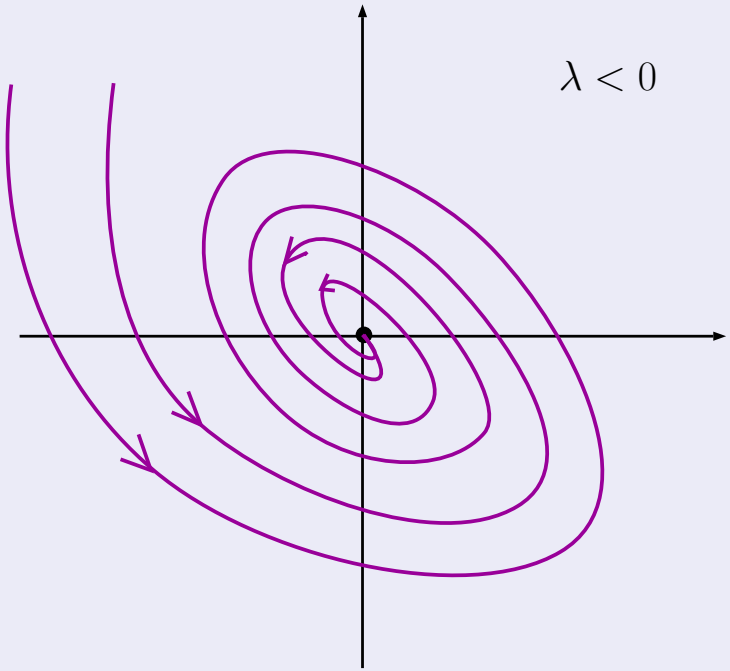


軌道は楕円 $\Rightarrow$ 周期的な運動

(iv) A は複素の固有値をもつ

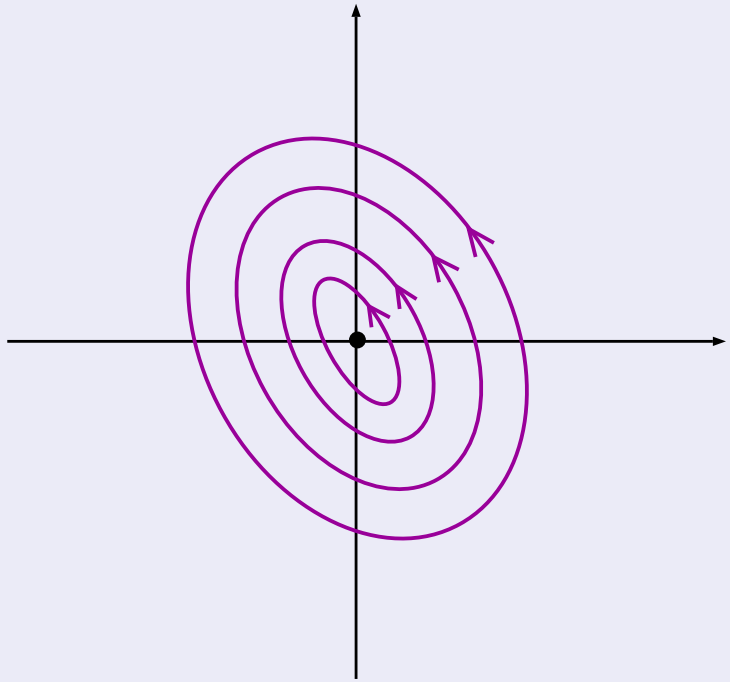
$\xi = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad \eta = C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$

$\alpha \neq 0$: 渦状点



軌道は対数螺旋
$\alpha > 0$ のとき，不安定な渦状点
$\alpha < 0$ のとき，安定な渦状点

$\alpha = 0$: 渦心点



軌道は楕円 $\Rightarrow$ 周期的な運動

まとめ：原点の安定性

固有値の実部は

- すべて > 0 $\Rightarrow$ 不安定
- すべて < 0 $\Rightarrow$ 安定
- 0 のものがある $\Rightarrow$ 他の平衡点があるか，周期解がある

安定性の定義

平衡点 $\boldsymbol{x}_s$ は

- 安定であるとは，

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \quad |\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_s| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_s| \leq \varepsilon$$

- 漸近安定であるとは，

$$\exists \delta > 0 : \quad |\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_s| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_s| = 0$$

まとめ：原点の安定性

固有値の実部は

- すべて > 0 $\Rightarrow$ 不安定
- すべて < 0 $\Rightarrow$ 安定
- 0 のものがある $\Rightarrow$ 他の平衡点があるか，周期解がある

安定性の定義

平衡点 $\boldsymbol{x}_s$ は

- 安定であるとは，

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \quad |\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_s| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_s| \leq \varepsilon$$

- 漸近安定であるとは，

$$\exists \delta > 0 : \quad |\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_s| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_s| = 0$$

微分積分学続論 II： 第 10 回

Karel Svadlenka

2020 年 6 月 17 日

■一般の線型連立 ODE の解の性質

$$\begin{cases} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n \\ x_2'(t) &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n \\ & \vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n \end{cases}$$

$$\text{斉次方程式：} \quad \boldsymbol{x}'(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{1}$$

$$\text{非斉次方程式：} \quad \boldsymbol{x}'(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t) \tag{2}$$

$A(t), \boldsymbol{b}(t)$ が開区間 $\mathcal{K}$ で連続ならば，$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, t_0 \in \mathcal{K}$ を満たす (1) または (2) の解が $\mathcal{K}$ でただ一つ存在する．

- A は $n \times n$ 行列，区間 $t \in \mathcal{K}$ で考える，$t_0 \in \mathcal{K}$
- 例：

$$\begin{cases} x'(t) &= e^t x(t) - y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + sin(t^2)y(t) \end{cases}$$

■一般の線型連立 ODE の解の性質

定理 1

非斉次 ODE(2) の一般解（すなわち，全ての解）$\boldsymbol{x}(t)$ は，非斉次 ODE(2) の一つの解 $\boldsymbol{x}_p(t)$ と斉次 ODE(1) の一般解 $\boldsymbol{X}(t)$ の和で表される：

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_p(t) + \boldsymbol{X}(t).$$

証明：$\boldsymbol{x}_p(t)$ を一つとる．$\boldsymbol{x}_1(t)$ が非斉次 ODE(2) の解ならば，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1'(t) &= A(t)\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{x}_p'(t) &= A(t)\boldsymbol{x}_p(t) + \boldsymbol{b}(t) \end{aligned}$$

$$\text{差} \quad \boldsymbol{x}_1' - \boldsymbol{x}_p' = A(t)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_p)$$

つまり，$\boldsymbol{x}_1(t) - \boldsymbol{x}_p(t)$ は斉次 ODE(1) の解となる．よって，

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \underbrace{\boldsymbol{x}_1(t) - \boldsymbol{x}_p(t)}_{\boldsymbol{X}(t) \text{ に含まれる関数}} + \boldsymbol{x}_p(t).$$

■一般の線型連立 ODE の解の性質

定理 2

斉次 ODE(1) の全ての解の集合は次元 n の線型空間である．

証明：

- 線型空間である：2 つの解 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ に対して，$\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ も解であることを確かめればよい（$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$）.
- 次元が n である
  - n 個の 1 次独立な解がある ：$\mathbb{R}^n$ の任意の基底 $\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2^0, \ldots, \boldsymbol{x}_n^0$ をとり，

    $$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_i^0$$

    の解を $\boldsymbol{x}_i$ とする（ただ一つ存在）． この $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は 1 次独立：

    $$\sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t) = 0 \ \forall t \in \mathcal{K} \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t_0) = 0 \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i^0 = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_i = 0 \ \forall i$$

  - この解 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は基底である

■一般の線型連立 ODE の解の性質

- 次元が n である
  - n 個の 1 次独立な解がある
  - この解 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は基底である： 斉次 ODE(1) の任意の解 $\boldsymbol{x}(t)$ に対して $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ があって，

    $$\boldsymbol{x}(t_0) = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i^0$$

    $\sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t)$ は斉次 ODE(1) の解で，$\sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t_0) = \boldsymbol{x}(t_0)$ を満たす． 解の一意性より，

    $$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t)$$

    と展開できた.

■基本行列

定義（基本行列）
斉次 ODE(1) の n 個の 1 次独立な解を列にもつ行列を 基本行列 （fundamental matrix）という:

$$V(t) = (\boldsymbol{x}_1(t)\ \boldsymbol{x}_2(t)\ \ldots\ \boldsymbol{x}_n(t))\,.$$

注： $\boldsymbol{x}_i^0 = \boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^T$ とすれば，斉次 ODE(1) & $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_i^0$ の解 $\boldsymbol{x}_i$ が存在し，$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は 1 次独立である． よって，基本行列は少なくとも 1 つ存在する.

■基本行列

定理 3
基本行列 $V(t)$ は全ての $t \in \mathcal{K}$ で正則である.

証明 ：もし $V(t_0)$ が正則でない $t_0 \in \mathcal{K}$ があれば，$V(t_0)$ の列 $\boldsymbol{x}_i^0$ に対して $\sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i^0 = \boldsymbol{0}$ が成り立つような β_i がある．関数 $\boldsymbol{x}_i(t)$ を $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_i^0$ の唯一の解とすれば，解の一意性よりこれらは $V(t)$ の列である．一方，$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t)$ という関数も解であるが，$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{0}$ を満たすので，解の一意性より恒等的にゼロという定数関数になる．つまり，$V(t)$ の列が 1 次従属であるという矛盾を得る.

定理 4
$\boldsymbol{x}(t)$ が斉次 ODE(1) の任意の解ならば，$\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ があって，

$$\boldsymbol{x}(t) = V(t)\boldsymbol{\alpha}.$$

証明 ：定理 2 と同様：好きな $t = t_0 \in \mathcal{K}$ で $\boldsymbol{\alpha}$ を $\boldsymbol{x}(t_0) = V(t_0)\boldsymbol{\alpha}$ より決めて，一意性より全ての t について $\boldsymbol{x}(t) = V(t)\boldsymbol{\alpha}$ が成り立つ.

■ロンスキー行列式

定義（ロンスキー行列式）
基本行列の行列式を ロンスキー行列式 とよぶ：

$$\eta(t) = \det V(t).$$

注：V が基本行列でなくても（すなわち，V の列が解であるが 1 次独立ではない場合でも），定義できる．

定理 **5**
V の列が ODE $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ の解ならば，

$$\eta(t) = \eta(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(\tau)\, d\tau} \qquad \forall t \in \mathcal{K}.$$

注：$\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t)$ は $A(t)$ の跡（トレース）で，A の固有値の和に等しいので，相似変換に対して不変である．

■ロンスキー行列式

定理 **5**
V の列が ODE $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ の解ならば，

$$\eta(t) = \eta(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(\tau)\, d\tau} \qquad \forall t \in \mathcal{K}.$$

証明：

$$V(t) = (\boldsymbol{x}_1(t) \dots \boldsymbol{x}_n(t)) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\eta'(t) = \sum_{k=1}^{n} \det V_k(t), \qquad V_k(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x'_{1k}(t) & \dots & x'_{nk}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \leftarrow k \text{ 行目}$$

■ロンスキー行列式

$\boldsymbol{x}'_i = A\boldsymbol{x}_i$ より，$x'_{ik}(t) = \sum_{m=1}^{n} a_{km}(t)x_{im}(t)$

$$\det V_k(t) = \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum a_{km}x_{1m} & \dots & \sum a_{km}x_{nm} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{kk}x_{1k} & \dots & a_{kk}x_{nk} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$= a_{kk} \det V = a_{kk}\eta$$

よって，

$$\eta'(t) = \eta(t) \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t) \right) \qquad \Rightarrow \qquad \text{解けば，定理の式を得る}$$

■ロンスキー行列式

系
$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1,\dots,n}$ が 1 次独立でなければ，$\eta \equiv 0$ in $\mathcal{K}$.

注：一般には（すなわち，V の列が ODE の解でなければ）逆は成立しない！ 例：$x_1(t) = t^2, x_2(t) = |t|t$ は 1 次独立であるが，

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^2 & |t|t \\ 2t & 2|t| \end{vmatrix} = 0 \quad \forall t$$

しかし，$\{\boldsymbol{x}_i\}$ が斉次 ODE (1) の解ならば，次が言える：

$t_0 \in \mathcal{K}$ があって，$\eta(t_0) = 0$ ならば，$\{\boldsymbol{x}_i(t)\}_i$ は $\mathcal{K}$ において 1 次従属である．

証明：$\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$ があって，$\sum \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t_0) = \boldsymbol{0}$ と仮定して，$\boldsymbol{x}(t) = \sum \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t)$ は $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}(t_0) = 0$ を満たすので，解の一意性より $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{0}$ in $\mathcal{K}$.

■ロンスキー行列式

まとめ

$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ が斉次 ODE (1) の解ならば，

- $\eta(t) \equiv 0$ in $\mathcal{K}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\{\boldsymbol{x}_i\}$ は 1 次従属
- $\eta(t) \neq 0\ \forall t \in \mathcal{K}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\{\boldsymbol{x}_i\}$ は 1 次独立

という 2 つの場合しかない．

■基本行列

注：$U(t) = (\boldsymbol{u}_1(t) \cdots \boldsymbol{u}_n(t))$ が C^1 級の行列関数ならば

$$U'(t) = A(t)U(t) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{u}_i(t) \text{ が斉次 ODE の解 } \ i = 1, \dots, n$$

定理 6
$U(t)$ が斉次 ODE (1) の基本行列であることは次の条件と同値である：

(i) $U'(t)$ は連続
(ii) $U'(t) = A(t)U(t)$
(iii) $t \in \mathcal{K}$ があって，$U(t)$ は正則である

■基本行列

定理 7

(a) $V(t)$ が斉次 ODE (1) の基本行列で $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 正則ならば，$V(t)C$ も (1) の基本行列である．
(b) $U(t), V(t)$ が (1) の基本行列ならば，正則な $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在して，$U(t) = V(t)C$.

証明：

(a) $(V(t)C)' = A(t)V(t)C$, $\det(VC) = \det V \cdot \det C \neq 0$

(b) $U(t_0), V(t_0)$ 正則より $C = V^{-1}(t_0)U(t_0)$ 正則　$Z(t) = V(t)C - U(t)$ とおくと，

$$Z' = AZ, \qquad Z(t_0) = O$$

したがって，$Z = O$ in $\mathcal{K}$.

■非斉次方程式について

- 全ての解は

$$\boldsymbol{x}(t) = V(t)\left(\boldsymbol{c} + \int_{t_0}^{t} V^{-1}(\tau)\boldsymbol{b}(\tau)\,d\tau\right), \qquad \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$$

と書ける．

- 定数変化法を用いて解ける．

微分積分学続論 II： 第 10 回

Karel Svadlenka

京都大学大学院理学研究科 数学教室

2020 年 6 月 17 日

一般の線型連立 ODE の解の性質

$$\begin{cases} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n \\ x_2'(t) &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n \end{cases}$$

斉次方程式： $\boldsymbol{x}'(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t)$ (1)

非斉次方程式： $\boldsymbol{x}'(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$ (2)

$A(t), \boldsymbol{b}(t)$ が開区間 $\mathcal{K}$ で連続ならば，$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, t_0 \in \mathcal{K}$ を満たす (1) または (2) の解が $\mathcal{K}$ でただ一つ存在する．

- A は $n \times n$ 行列，区間 $t \in \mathcal{K}$ で考える，$t_0 \in \mathcal{K}$
- 例：

$$\begin{cases} x'(t) &= e^t x(t) - y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + \sin(t^2)y(t) \end{cases}$$

一般の線型連立 ODE の解の性質

$$\begin{cases} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n \\ x_2'(t) &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n \end{cases}$$

斉次方程式： $\boldsymbol{x}'(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t)$ (1)

非斉次方程式： $\boldsymbol{x}'(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$ (2)

$A(t), \boldsymbol{b}(t)$ が開区間 $\mathcal{K}$ で連続ならば，$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, t_0 \in \mathcal{K}$ を満たす (1) または (2) の解が $\mathcal{K}$ でただ一つ存在する．

- A は $n \times n$ 行列，区間 $t \in \mathcal{K}$ で考える，$t_0 \in \mathcal{K}$
- 例：

$$\begin{cases} x'(t) &= e^t x(t) - y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + sin(t^2)y(t) \end{cases}$$

一般の線型連立 ODE の解の性質

$$\begin{cases} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n \\ x_2'(t) &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n \end{cases}$$

斉次方程式： $\boldsymbol{x}'(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t)$ (1)

非斉次方程式： $\boldsymbol{x}'(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$ (2)

$A(t), \boldsymbol{b}(t)$ が開区間 $\mathcal{K}$ で連続ならば，$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, t_0 \in \mathcal{K}$ を満たす (1) または (2) の解が $\mathcal{K}$ でただ一つ存在する．

- A は $n \times n$ 行列，区間 $t \in \mathcal{K}$ で考える，$t_0 \in \mathcal{K}$
- 例：

$$\begin{cases} x'(t) &= e^t x(t) - y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + sin(t^2)y(t) \end{cases}$$

一般の線型連立 ODE の解の性質

$$\begin{cases} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n \\ x_2'(t) &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n \end{cases}$$

斉次方程式： $\boldsymbol{x}'(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t)$ (1)

非斉次方程式： $\boldsymbol{x}'(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$ (2)

$A(t), \boldsymbol{b}(t)$ が開区間 $\mathcal{K}$ で連続ならば，$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, t_0 \in \mathcal{K}$ を満たす (1) または (2) の解が $\mathcal{K}$ でただ一つ存在する．

- A は $n \times n$ 行列，区間 $t \in \mathcal{K}$ で考える，$t_0 \in \mathcal{K}$
- 例：

$$\begin{cases} x'(t) &= e^t x(t) - y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + sin(t^2)y(t) \end{cases}$$

一般の線型連立 ODE の解の性質

定理 1

非斉次 ODE(2) の一般解（すなわち，全ての解）$\boldsymbol{x}(t)$ は，非斉次 ODE(2) の一つの解 $\boldsymbol{x}_p(t)$ と斉次 ODE(1) の一般解 $\boldsymbol{X}(t)$ の和で表される：

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_p(t) + \boldsymbol{X}(t).$$

証明：$\boldsymbol{x}_p(t)$ を一つとる．$\boldsymbol{x}_1(t)$ が非斉次 ODE(2) の解ならば，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1'(t) &= A(t)\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{x}_p'(t) &= A(t)\boldsymbol{x}_p(t) + \boldsymbol{b}(t) \end{aligned}$$

差　$\boldsymbol{x}_1' - \boldsymbol{x}_p' = A(t)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_p)$

つまり，$\boldsymbol{x}_1(t) - \boldsymbol{x}_p(t)$ は斉次 ODE(1) の解となる．よって，

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \underbrace{\boldsymbol{x}_1(t) - \boldsymbol{x}_p(t)}_{\boldsymbol{X}(t) \text{ に含まれる関数}} + \boldsymbol{x}_p(t).$$

一般の線型連立 ODE の解の性質

定理 1

非斉次 ODE(2) の一般解（すなわち，全ての解）$\boldsymbol{x}(t)$ は，非斉次 ODE(2) の一つの解 $\boldsymbol{x}_p(t)$ と斉次 ODE(1) の一般解 $\boldsymbol{X}(t)$ の和で表される：

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_p(t) + \boldsymbol{X}(t).$$

証明：$\boldsymbol{x}_p(t)$ を一つとる．$\boldsymbol{x}_1(t)$ が非斉次 ODE(2) の解ならば，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1'(t) &= A(t)\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{x}_p'(t) &= A(t)\boldsymbol{x}_p(t) + \boldsymbol{b}(t) \end{aligned}$$

差　$\boldsymbol{x}_1' - \boldsymbol{x}_p' = A(t)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_p)$

つまり，$\boldsymbol{x}_1(t) - \boldsymbol{x}_p(t)$ は斉次 ODE(1) の解となる．よって，

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \underbrace{\boldsymbol{x}_1(t) - \boldsymbol{x}_p(t)}_{\boldsymbol{X}(t) \text{ に含まれる関数}} + \boldsymbol{x}_p(t).$$

一般の線型連立 ODE の解の性質

定理 1

非斉次 ODE(2) の一般解（すなわち，全ての解）$\boldsymbol{x}(t)$ は，非斉次 ODE(2) の一つの解 $\boldsymbol{x}_p(t)$ と斉次 ODE(1) の一般解 $\boldsymbol{X}(t)$ の和で表される：

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_p(t) + \boldsymbol{X}(t).$$

証明：$\boldsymbol{x}_p(t)$ を一つとる．$\boldsymbol{x}_1(t)$ が非斉次 ODE(2) の解ならば，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1'(t) &= A(t)\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{x}_p'(t) &= A(t)\boldsymbol{x}_p(t) + \boldsymbol{b}(t) \end{aligned}$$

$$\text{差} \quad \boldsymbol{x}_1' - \boldsymbol{x}_p' = A(t)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_p)$$

つまり，$\boldsymbol{x}_1(t) - \boldsymbol{x}_p(t)$ は斉次 ODE(1) の解となる．よって，

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \underbrace{\boldsymbol{x}_1(t) - \boldsymbol{x}_p(t)}_{\boldsymbol{X}(t) \text{ に含まれる関数}} + \boldsymbol{x}_p(t).$$

一般の線型連立 ODE の解の性質

定理 1

非斉次 ODE(2) の一般解（すなわち，全ての解）$\boldsymbol{x}(t)$ は，非斉次 ODE(2) の一つの解 $\boldsymbol{x}_p(t)$ と斉次 ODE(1) の一般解 $\boldsymbol{X}(t)$ の和で表される：

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_p(t) + \boldsymbol{X}(t).$$

証明：$\boldsymbol{x}_p(t)$ を一つとる．$\boldsymbol{x}_1(t)$ が非斉次 ODE(2) の解ならば，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1'(t) &= A(t)\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{x}_p'(t) &= A(t)\boldsymbol{x}_p(t) + \boldsymbol{b}(t) \end{aligned}$$

$$\text{差} \quad \boldsymbol{x}_1' - \boldsymbol{x}_p' = A(t)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_p)$$

つまり，$\boldsymbol{x}_1(t) - \boldsymbol{x}_p(t)$ は斉次 ODE(1) の解となる．よって，

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \underbrace{\boldsymbol{x}_1(t) - \boldsymbol{x}_p(t)}_{\boldsymbol{X}(t) \text{ に含まれる関数}} + \boldsymbol{x}_p(t).$$

一般の線型連立 ODE の解の性質

定理 2

斉次 ODE(1) の全ての解の集合は次元 n の線型空間である.

証明 :

- 線型空間である : 2 つの解 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ に対して, $\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ も解であることを確かめればよい ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) .
- 次元が n である
  - n 個の 1 次独立な解がある : $\mathbb{R}^n$ の任意の基底 $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ をとり,

$$x' = Ax, \qquad x(t_0) = x_i^0$$

の解を x_i とする (ただ一つ存在) .
この $\{x_i\}_{i=1}^n$ は 1 次独立 :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t) = 0 \ \forall t \in \mathcal{K} \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t_0) = 0 \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^0 = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_i = 0 \ \forall i$$

  - この解 $\{x_i\}_{i=1}^n$ は基底である

一般の線型連立 ODE の解の性質

定理 2

斉次 ODE(1) の全ての解の集合は次元 n の線型空間である.

証明：

- 線型空間である：2 つの解 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ に対して，$\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ も解であることを確かめればよい（$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$）.
- 次元が n である
  - n 個の 1 次独立な解がある ：$\mathbb{R}^n$ の任意の基底 $\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2^0, \ldots, \boldsymbol{x}_n^0$ をとり，

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_i^0$$

の解を $\boldsymbol{x}_i$ とする（ただ一つ存在）.
この $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は 1 次独立：

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t) = 0 \ \forall t \in \mathcal{K} \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t_0) = 0 \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i^0 = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_i = 0 \ \forall i$$

  - この解 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は基底である

一般の線型連立 ODE の解の性質

定理 2

斉次 ODE(1) の全ての解の集合は次元 n の線型空間である.

証明：

- 線型空間である：2 つの解 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ に対して，$\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ も解であることを確かめればよい（$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$）.
- 次元が n である
  - n 個の 1 次独立な解がある ：$\mathbb{R}^n$ の任意の基底 $\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2^0, \ldots, \boldsymbol{x}_n^0$ をとり，

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_i^0$$

の解を $\boldsymbol{x}_i$ とする（ただ一つ存在）.
この $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は 1 次独立：

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t) = 0 \ \forall t \in \mathcal{K} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t_0) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i^0 = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$$

  - この解 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は基底である

一般の線型連立 ODE の解の性質

定理 2

斉次 ODE(1) の全ての解の集合は次元 n の線型空間である.

証明 :

- 線型空間である：2 つの解 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ に対して，$\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ も解であることを確かめればよい（$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$）.
- 次元が n である
  - n 個の 1 次独立な解がある ：$\mathbb{R}^n$ の任意の基底 $\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2^0, \ldots, \boldsymbol{x}_n^0$ をとり，

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_i^0$$

の解を $\boldsymbol{x}_i$ とする（ただ一つ存在）.
この $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は 1 次独立：

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t) = 0 \ \forall t \in \mathcal{K} \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t_0) = 0 \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i^0 = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_i = 0 \ \forall i$$

  - この解 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は基底である

一般の線型連立 ODE の解の性質

定理 2

斉次 ODE(1) の全ての解の集合は次元 n の線型空間である.

証明 :

- 線型空間である：2 つの解 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ に対して，$\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ も解であることを確かめればよい（$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$）.
- 次元が n である
  - n 個の 1 次独立な解がある ：$\mathbb{R}^n$ の任意の基底 $\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2^0, \ldots, \boldsymbol{x}_n^0$ をとり，

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_i^0$$

の解を $\boldsymbol{x}_i$ とする（ただ一つ存在）.

この $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は 1 次独立：

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t) = 0 \ \forall t \in \mathcal{K} \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t_0) = 0 \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i^0 = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_i = 0 \ \forall i$$

  - この解 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は基底である

一般の線型連立 ODE の解の性質

定理 2

斉次 ODE(1) の全ての解の集合は次元 n の線型空間である.

証明 :

- 線型空間である：2 つの解 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ に対して，$\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ も解であることを確かめればよい（$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$）.
- 次元が n である
  - n 個の 1 次独立な解がある ：$\mathbb{R}^n$ の任意の基底 $\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2^0, \ldots, \boldsymbol{x}_n^0$ をとり，

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_i^0$$

の解を $\boldsymbol{x}_i$ とする（ただ一つ存在）.
この $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は 1 次独立：

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t) = 0 \ \forall t \in \mathcal{K} \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t_0) = 0 \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i^0 = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_i = 0 \ \forall i$$

  - この解 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は基底である

一般の線型連立 ODE の解の性質

定理 2

斉次 ODE(1) の全ての解の集合は次元 n の線型空間である.

証明 :

- 線型空間である：2 つの解 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ に対して，$\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ も解であることを確かめればよい（$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$）.
- 次元が n である
  - n 個の 1 次独立な解がある ：$\mathbb{R}^n$ の任意の基底 $\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2^0, \ldots, \boldsymbol{x}_n^0$ をとり，

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_i^0$$

の解を $\boldsymbol{x}_i$ とする（ただ一つ存在）.
この $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は 1 次独立：

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t) = 0 \ \forall t \in \mathcal{K} \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t_0) = 0 \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i^0 = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_i = 0 \ \forall i$$

  - この解 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は基底である

一般の線型連立 ODE の解の性質

- 次元が n である
  - n 個の 1 次独立な解がある
  - この解 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は基底である：

    斉次 ODE(1) の任意の解 $\boldsymbol{x}(t)$ に対して $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ があって，

    $$\boldsymbol{x}(t_0) = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i^0$$

    $\sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t)$ は斉次 ODE(1) の解で，$\sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t_0) = \boldsymbol{x}(t_0)$ を満たす．
    解の一意性より，

    $$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t)$$

    と展開できた．

一般の線型連立 ODE の解の性質

- 次元が n である
  - n 個の 1 次独立な解がある
  - この解 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は基底である：
    斉次 ODE(1) の任意の解 $\boldsymbol{x}(t)$ に対して $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ があって，

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{x}_i^0$$

$\sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t)$ は斉次 ODE(1) の解で，$\sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t_0) = \boldsymbol{x}(t_0)$ を満たす．
解の一意性より，

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{x}_i(t)$$

と展開できた．

一般の線型連立 ODE の解の性質

- 次元が n である
  - n 個の 1 次独立な解がある
  - この解 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は基底である：
    斉次 ODE(1) の任意の解 $\boldsymbol{x}(t)$ に対して $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ があって，

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{x}_i^0$$

$\sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t)$ は斉次 ODE(1) の解で，$\sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t_0) = \boldsymbol{x}(t_0)$ を満たす．
解の一意性より，

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{x}_i(t)$$

と展開できた．

一般の線型連立 ODE の解の性質

- 次元が n である
  - n 個の 1 次独立な解がある
  - この解 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は基底である：
    斉次 ODE(1) の任意の解 $\boldsymbol{x}(t)$ に対して $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ があって，

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{x}_i^0$$

    $\sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t)$ は斉次 ODE(1) の解で，$\sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t_0) = \boldsymbol{x}(t_0)$ を満たす．
    解の一意性より，

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{x}_i(t)$$

    と展開できた．

基本行列

定義（基本行列）

斉次 ODE(1) の n 個の 1 次独立な解を列にもつ行列を **基本行列**（fundamental matrix）という:

$$V(t) = (\boldsymbol{x}_1(t)\ \boldsymbol{x}_2(t)\ \ldots\ \boldsymbol{x}_n(t))\,.$$

注： $\boldsymbol{x}_i^0 = \boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^T$ とすれば，斉次 ODE(1) & $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_i^0$ の解 $\boldsymbol{x}_i$ が存在し，$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は 1 次独立である.
よって，基本行列は少なくとも 1 つ存在する.

基本行列

定義（基本行列）

斉次 ODE(1) の n 個の 1 次独立な解を列にもつ行列を **基本行列**（fundamental matrix）という:

$$V(t) = (\boldsymbol{x}_1(t)\ \boldsymbol{x}_2(t)\ \ldots\ \boldsymbol{x}_n(t))\,.$$

注： $\boldsymbol{x}_i^0 = \boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^T$ とすれば，斉次 ODE(1) & $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_i^0$ の解 $\boldsymbol{x}_i$ が存在し，$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ は 1 次独立である.
よって，基本行列は少なくとも 1 つ存在する.

基本行列

定理 3

基本行列 $V(t)$ は全ての $t \in \mathcal{K}$ で正則である.

証明：もし $V(t_0)$ が正則でない $t_0 \in \mathcal{K}$ があれば，$V(t_0)$ の列 $\boldsymbol{x}_i^0$ に対して $\sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i^0 = \boldsymbol{0}$ が成り立つような β_i がある．関数 $\boldsymbol{x}_i(t)$ を $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_i^0$ の唯一の解とすれば，解の一意性よりこれらは $V(t)$ の列である．一方，$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t)$ という関数も解であるが，$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{0}$ を満たすので，解の一意性より恒等的にゼロという定数関数になる．つまり，$V(t)$ の列が 1 次従属であるという矛盾を得る.

定理 4

$\boldsymbol{x}(t)$ が斉次 ODE(1) の任意の解ならば，$\alpha \in \mathbb{R}^n$ があって，

$$\boldsymbol{x}(t) = V(t)\alpha.$$

証明：定理 2 と同様：好きな $t = t_0 \in \mathcal{K}$ で α を $\boldsymbol{x}(t_0) = V(t_0)\alpha$ より決めて，一意性より全ての t について $\boldsymbol{x}(t) = V(t)\alpha$ が成り立つ.

基本行列

定理 3

基本行列 $V(t)$ は全ての $t \in \mathcal{K}$ で正則である.

証明：もし $V(t_0)$ が正則でない $t_0 \in \mathcal{K}$ があれば，$V(t_0)$ の列 $\boldsymbol{x}_i^0$ に対して $\sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i^0 = \boldsymbol{0}$ が成り立つような β_i がある. 関数 $\boldsymbol{x}_i(t)$ を $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_i^0$ の唯一の解とすれば，解の一意性よりこれらは $V(t)$ の列である. 一方，$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t)$ という関数も解であるが，$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{0}$ を満たすので，解の一意性より恒等的にゼロという定数関数になる. つまり，$V(t)$ の列が 1 次従属であるという矛盾を得る.

定理 4

$x(t)$ が斉次 ODE(1) の任意の解ならば，$\alpha \in \mathbb{R}^n$ があって，

$$x(t) = V(t)\alpha.$$

証明：定理 2 と同様：好きな $t = t_0 \in \mathcal{K}$ で α を $x(t_0) = V(t_0)\alpha$ より決めて，一意性より全ての t について $x(t) = V(t)\alpha$ が成り立つ.

基本行列

定理 3

基本行列 $V(t)$ は全ての $t \in \mathcal{K}$ で正則である.

証明：もし $V(t_0)$ が正則でない $t_0 \in \mathcal{K}$ があれば，$V(t_0)$ の列 $\boldsymbol{x}_i^0$ に対して $\sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i^0 = \boldsymbol{0}$ が成り立つような β_i がある．関数 $\boldsymbol{x}_i(t)$ を $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_i^0$ の唯一の解とすれば，解の一意性よりこれらは $V(t)$ の列である．一方，$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t)$ という関数も解であるが，$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{0}$ を満たすので，解の一意性より恒等的にゼロという定数関数になる．つまり，$V(t)$ の列が 1 次従属であるという矛盾を得る.

定理 4

$\boldsymbol{x}(t)$ が斉次 ODE(1) の任意の解ならば，$\alpha \in \mathbb{R}^n$ があって，

$$\boldsymbol{x}(t) = V(t)\alpha.$$

証明：定理 2 と同様：好きな $t = t_0 \in \mathcal{K}$ で α を $\boldsymbol{x}(t_0) = V(t_0)\alpha$ より決めて，一意性より全ての t について $\boldsymbol{x}(t) = V(t)\alpha$ が成り立つ.

基本行列

定理 3

基本行列 $V(t)$ は全ての $t \in \mathcal{K}$ で正則である.

証明：もし $V(t_0)$ が正則でない $t_0 \in \mathcal{K}$ があれば，$V(t_0)$ の列 $\boldsymbol{x}_i^0$ に対して $\sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i^0 = \boldsymbol{0}$ が成り立つような β_i がある．関数 $\boldsymbol{x}_i(t)$ を $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_i^0$ の唯一の解とすれば，解の一意性よりこれらは $V(t)$ の列である．一方，$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t)$ という関数も解であるが，$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{0}$ を満たすので，解の一意性より恒等的にゼロという定数関数になる．つまり，$V(t)$ の列が 1 次従属であるという矛盾を得る.

定理 4

$\boldsymbol{x}(t)$ が斉次 ODE(1) の任意の解ならば，$\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ があって，

$$\boldsymbol{x}(t) = V(t)\boldsymbol{\alpha}.$$

証明：定理 2 と同様：好きな $t = t_0 \in \mathcal{K}$ で $\boldsymbol{\alpha}$ を $\boldsymbol{x}(t_0) = V(t_0)\boldsymbol{\alpha}$ より決めて，一意性より全ての t について $\boldsymbol{x}(t) = V(t)\boldsymbol{\alpha}$ が成り立つ.

基本行列

定理 3

基本行列 $V(t)$ は全ての $t \in \mathcal{K}$ で正則である.

証明：もし $V(t_0)$ が正則でない $t_0 \in \mathcal{K}$ があれば，$V(t_0)$ の列 $\boldsymbol{x}_i^0$ に対して $\sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i^0 = \boldsymbol{0}$ が成り立つような β_i がある．関数 $\boldsymbol{x}_i(t)$ を $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_i^0$ の唯一の解とすれば，解の一意性よりこれらは $V(t)$ の列である．一方，$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t)$ という関数も解であるが，$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{0}$ を満たすので，解の一意性より恒等的にゼロという定数関数になる．つまり，$V(t)$ の列が 1 次従属であるという矛盾を得る.

定理 4

$\boldsymbol{x}(t)$ が斉次 ODE(1) の任意の解ならば，$\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ があって，

$$\boldsymbol{x}(t) = V(t)\boldsymbol{\alpha}.$$

証明：定理 2 と同様：好きな $t = t_0 \in \mathcal{K}$ で $\boldsymbol{\alpha}$ を $\boldsymbol{x}(t_0) = V(t_0)\boldsymbol{\alpha}$ より決めて，一意性より全ての t について $\boldsymbol{x}(t) = V(t)\boldsymbol{\alpha}$ が成り立つ.

基本行列

定理 3

基本行列 $V(t)$ は全ての $t \in \mathcal{K}$ で正則である.

証明：もし $V(t_0)$ が正則でない $t_0 \in \mathcal{K}$ があれば，$V(t_0)$ の列 $\boldsymbol{x}_i^0$ に対して $\sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i^0 = \boldsymbol{0}$ が成り立つような β_i がある．関数 $\boldsymbol{x}_i(t)$ を $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_i^0$ の唯一の解とすれば，解の一意性よりこれらは $V(t)$ の列である．一方，$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t)$ という関数も解であるが，$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{0}$ を満たすので，解の一意性より恒等的にゼロという定数関数になる．つまり，$V(t)$ の列が 1 次従属であるという矛盾を得る.

定理 4

$\boldsymbol{x}(t)$ が斉次 ODE(1) の任意の解ならば，$\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ があって，

$$\boldsymbol{x}(t) = V(t)\boldsymbol{\alpha}.$$

証明：定理 2 と同様：好きな $t = t_0 \in \mathcal{K}$ で $\boldsymbol{\alpha}$ を $\boldsymbol{x}(t_0) = V(t_0)\boldsymbol{\alpha}$ より決めて，一意性より全ての t について $\boldsymbol{x}(t) = V(t)\boldsymbol{\alpha}$ が成り立つ.

基本行列

定理 3

基本行列 $V(t)$ は全ての $t \in \mathcal{K}$ で正則である.

証明：もし $V(t_0)$ が正則でない $t_0 \in \mathcal{K}$ があれば，$V(t_0)$ の列 $\boldsymbol{x}_i^0$ に対して $\sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i^0 = \boldsymbol{0}$ が成り立つような β_i がある．関数 $\boldsymbol{x}_i(t)$ を $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_i^0$ の唯一の解とすれば，解の一意性よりこれらは $V(t)$ の列である．一方，$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{x}_i(t)$ という関数も解であるが，$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{0}$ を満たすので，解の一意性より恒等的にゼロという定数関数になる．つまり，$V(t)$ の列が 1 次従属であるという矛盾を得る.

定理 4

$\boldsymbol{x}(t)$ が斉次 ODE(1) の任意の解ならば，$\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ があって，

$$\boldsymbol{x}(t) = V(t)\boldsymbol{\alpha}.$$

証明：定理 2 と同様：好きな $t = t_0 \in \mathcal{K}$ で $\boldsymbol{\alpha}$ を $\boldsymbol{x}(t_0) = V(t_0)\boldsymbol{\alpha}$ より決めて，一意性より全ての t について $\boldsymbol{x}(t) = V(t)\boldsymbol{\alpha}$ が成り立つ.

ロンスキー行列式

定義（ロンスキー行列式）

基本行列の行列式を **ロンスキー行列式** とよぶ：

$$\eta(t) = \det V(t).$$

注：V が基本行列でなくても（すなわち，V の列が解であるが 1 次独立ではない場合でも），定義できる．

定理 5

V の列が ODE $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ の解ならば，

$$\eta(t) = \eta(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(\tau)\, d\tau} \qquad \forall t \in \mathcal{K}.$$

注：$\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t)$ は $A(t)$ の跡（トレース）で，A の固有値の和に等しいので，相似変換に対して不変である．

ロンスキー行列式

定義（ロンスキー行列式）

基本行列の行列式を **ロンスキー行列式** とよぶ：

$$\eta(t) = \det V(t).$$

注：V が基本行列でなくても（すなわち，V の列が解であるが 1 次独立ではない場合でも），定義できる．

定理 5

V の列が ODE $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ の解ならば，

$$\eta(t) = \eta(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(\tau)\, d\tau} \qquad \forall t \in \mathcal{K}.$$

注：$\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t)$ は $A(t)$ の跡（トレース）で，A の固有値の和に等しいので，相似変換に対して不変である．

ロンスキー行列式

定義（ロンスキー行列式）

基本行列の行列式を **ロンスキー行列式** とよぶ：

$$\eta(t) = \det V(t).$$

注：V が基本行列でなくても（すなわち，V の列が解であるが 1 次独立ではない場合でも），定義できる．

定理 5

V の列が ODE $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ の解ならば，

$$\eta(t) = \eta(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(\tau)\, d\tau} \qquad \forall t \in \mathcal{K}.$$

注：$\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t)$ は $A(t)$ の跡（トレース）で，A の固有値の和に等しいので，相似変換に対して不変である．

ロンスキー行列式

定義（ロンスキー行列式）

基本行列の行列式を **ロンスキー行列式** とよぶ：

$$\eta(t) = \det V(t).$$

注：V が基本行列でなくても（すなわち，V の列が解であるが 1 次独立ではない場合でも），定義できる．

定理 5

V の列が ODE $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ の解ならば，

$$\eta(t) = \eta(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(\tau)\, d\tau} \qquad \forall t \in \mathcal{K}.$$

注：$\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t)$ は $A(t)$ の跡（トレース）で，A の固有値の和に等しいので，相似変換に対して不変である．

ロンスキー行列式

定理 5

V の列が ODE $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ の解ならば,

$$\eta(t) = \eta(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(\tau)\, d\tau} \qquad \forall t \in \mathcal{K}.$$

証明 :

$$V(t) = (\boldsymbol{x}_1(t) \dots \boldsymbol{x}_n(t)) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\eta'(t) = \sum_{k=1}^{n} \det V_k(t), \qquad V_k(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x'_{1k}(t) & \dots & x'_{nk}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \leftarrow k \text{ 行目}$$

ロンスキー行列式

定理 5

V の列が ODE $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ の解ならば,

$$\eta(t) = \eta(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(\tau)\, d\tau} \qquad \forall t \in \mathcal{K}.$$

証明 :

$$V(t) = (\boldsymbol{x}_1(t) \dots \boldsymbol{x}_n(t)) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\eta'(t) = \sum_{k=1}^{n} \det V_k(t), \qquad V_k(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x'_{1k}(t) & \dots & x'_{nk}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \leftarrow k \text{ 行目}$$

ロンスキー行列式

定理 5

V の列が ODE $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ の解ならば,

$$\eta(t) = \eta(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(\tau)\, d\tau} \qquad \forall t \in \mathcal{K}.$$

証明 :

$$V(t) = (\boldsymbol{x}_1(t) \dots \boldsymbol{x}_n(t)) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\eta'(t) = \sum_{k=1}^{n} \det V_k(t), \qquad V_k(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x'_{1k}(t) & \dots & x'_{nk}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \leftarrow k \text{ 行目}$$

ロンスキー行列式

$\boldsymbol{x}_i' = A\boldsymbol{x}_i$ より，$x_{ik}'(t) = \sum_{m=1}^{n} a_{km}(t)x_{im}(t)$

$$\det V_k(t) = \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum a_{km}x_{1m} & \dots & \sum a_{km}x_{nm} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{kk}x_{1k} & \dots & a_{kk}x_{nk} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$= a_{kk} \det V = a_{kk}\eta$$

よって，

$$\eta'(t) = \eta(t)\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t)\right) \quad \Rightarrow \quad \text{解けば，定理の式を得る}$$

ロンスキー行列式

$\boldsymbol{x}_i' = A\boldsymbol{x}_i$ より，$x_{ik}'(t) = \sum_{m=1}^{n} a_{km}(t)x_{im}(t)$

$$\det V_k(t) = \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum a_{km}x_{1m} & \dots & \sum a_{km}x_{nm} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{kk}x_{1k} & \dots & a_{kk}x_{nk} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$= a_{kk} \det V = a_{kk}\eta$$

よって，

$$\eta'(t) = \eta(t)\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t)\right) \quad \Rightarrow \quad \text{解けば，定理の式を得る}$$

ロンスキー行列式

$\boldsymbol{x}_i' = A\boldsymbol{x}_i$ より，$x_{ik}'(t) = \sum_{m=1}^{n} a_{km}(t)x_{im}(t)$

$$\det V_k(t) = \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum a_{km}x_{1m} & \dots & \sum a_{km}x_{nm} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{kk}x_{1k} & \dots & a_{kk}x_{nk} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$= a_{kk} \det V = a_{kk}\eta$$

よって，

$$\eta'(t) = \eta(t)\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t)\right) \quad \Rightarrow \quad \text{解けば，定理の式を得る}$$

ロンスキー行列式

$\boldsymbol{x}_i' = A\boldsymbol{x}_i$ より，$x_{ik}'(t) = \sum_{m=1}^{n} a_{km}(t)x_{im}(t)$

$$\det V_k(t) = \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum a_{km}x_{1m} & \dots & \sum a_{km}x_{nm} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{kk}x_{1k} & \dots & a_{kk}x_{nk} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$= a_{kk} \det V = a_{kk}\eta$$

よって，

$$\eta'(t) = \eta(t)\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t)\right) \qquad \Rightarrow \qquad \text{解けば，定理の式を得る}$$

ロンスキー行列式

系

$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1,\dots,n}$ が 1 次独立でなければ，$\eta \equiv 0$ in $\mathcal{K}$.

注：一般には（すなわち，V の列が ODE の解でなければ）逆は成立しない！

例：$x_1(t) = t^2, x_2(t) = |t|t$ は 1 次独立であるが，

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^2 & |t|t \\ 2t & 2|t| \end{vmatrix} = 0 \quad \forall t$$

しかし，$\{\boldsymbol{x}_i\}$ が斉次 ODE (1) の解ならば，次が言える：

$t_0 \in \mathcal{K}$ があって，$\eta(t_0) = 0$ ならば，$\{\boldsymbol{x}_i(t)\}_i$ は $\mathcal{K}$ において 1 次従属である.

証明：$\alpha \neq 0$ があって，$\sum \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t_0) = 0$ と仮定して，$x(t) = \sum \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t)$ は $x' = Ax$, $x(t_0) = 0$ を満たすので，解の一意性より $x(t) \equiv 0$ in $\mathcal{K}$.

ロンスキー行列式

系

$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1,\dots,n}$ が 1 次独立でなければ，$\eta \equiv 0$ in $\mathcal{K}$.

注：一般には（すなわち，V の列が ODE の解でなければ）逆は成立しない！

例：$x_1(t) = t^2, x_2(t) = |t|t$ は 1 次独立であるが，

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^2 & |t|t \\ 2t & 2|t| \end{vmatrix} = 0 \quad \forall t$$

しかし，$\{\boldsymbol{x}_i\}$ が斉次 ODE (1) の解ならば，次が言える：

$t_0 \in \mathcal{K}$ があって，$\eta(t_0) = 0$ ならば，$\{\boldsymbol{x}_i(t)\}_i$ は $\mathcal{K}$ において 1 次従属である.

証明：$\alpha \neq \mathbf{0}$ があって，$\sum \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t_0) = \mathbf{0}$ と仮定して，$\boldsymbol{x}(t) = \sum \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t)$ は $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(t_0) = 0$ を満たすので，解の一意性より $\boldsymbol{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ in $\mathcal{K}$.

ロンスキー行列式

系

$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1,\dots,n}$ が 1 次独立でなければ，$\eta \equiv 0$ in $\mathcal{K}$.

注：一般には（すなわち，V の列が ODE の解でなければ）逆は成立しない！
例：$x_1(t) = t^2, x_2(t) = |t|t$ は 1 次独立であるが，

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^2 & |t|t \\ 2t & 2|t| \end{vmatrix} = 0 \quad \forall t$$

しかし，$\{\boldsymbol{x}_i\}$ が斉次 ODE (1) の解ならば，次が言える：

$t_0 \in \mathcal{K}$ があって，$\eta(t_0) = 0$ ならば，$\{\boldsymbol{x}_i(t)\}_i$ は $\mathcal{K}$ において 1 次従属である.

証明：$\alpha \neq \boldsymbol{0}$ があって，$\sum \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t_0) = \boldsymbol{0}$ と仮定して，$\boldsymbol{x}(t) = \sum \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t)$ は $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(t_0) = 0$ を満たすので，解の一意性より $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{0}$ in $\mathcal{K}$.

ロンスキー行列式

系

$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1,\dots,n}$ が 1 次独立でなければ，$\eta \equiv 0$ in $\mathcal{K}$.

注：一般には（すなわち，V の列が ODE の解でなければ）逆は成立しない！
例：$x_1(t) = t^2, x_2(t) = |t|t$ は 1 次独立であるが，

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^2 & |t|t \\ 2t & 2|t| \end{vmatrix} = 0 \quad \forall t$$

しかし，$\{\boldsymbol{x}_i\}$ が斉次 ODE (1) の解ならば，次が言える：

$t_0 \in \mathcal{K}$ があって，$\eta(t_0) = 0$ ならば，$\{\boldsymbol{x}_i(t)\}_i$ は $\mathcal{K}$ において 1 次従属である.

証明：$\alpha \neq \mathbf{0}$ があって，$\sum \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t_0) = \mathbf{0}$ と仮定して，$\boldsymbol{x}(t) = \sum \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t)$ は $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(t_0) = 0$ を満たすので，解の一意性より $\boldsymbol{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ in $\mathcal{K}$.

ロンスキー行列式

系

$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1,\dots,n}$ が 1 次独立でなければ，$\eta \equiv 0$ in $\mathcal{K}$.

注：一般には（すなわち，V の列が ODE の解でなければ）逆は成立しない！
例：$x_1(t) = t^2, x_2(t) = |t|t$ は 1 次独立であるが，

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^2 & |t|t \\ 2t & 2|t| \end{vmatrix} = 0 \quad \forall t$$

しかし，$\{\boldsymbol{x}_i\}$ が斉次 ODE (1) の解ならば，次が言える：

$t_0 \in \mathcal{K}$ があって，$\eta(t_0) = 0$ ならば，$\{\boldsymbol{x}_i(t)\}_i$ は $\mathcal{K}$ において 1 次従属である.

証明：$\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$ があって，$\sum \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t_0) = \boldsymbol{0}$ と仮定して，$\boldsymbol{x}(t) = \sum \alpha_i \boldsymbol{x}_i(t)$ は $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(t_0) = 0$ を満たすので，解の一意性より $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{0}$ in $\mathcal{K}$.

ロンスキー行列式

まとめ

$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ が斉次 ODE (1) の解ならば,

- $\eta(t) \equiv 0$ in $\mathcal{K}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\{\boldsymbol{x}_i\}$ は 1 次従属
- $\eta(t) \neq 0\ \forall t \in \mathcal{K}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\{\boldsymbol{x}_i\}$ は 1 次独立

という 2 つの場合しかない.

基本行列

注：$U(t) = (\boldsymbol{u}_1(t) \cdots \boldsymbol{u}_n(t))$ が C^1 級の行列関数ならば

$$U'(t) = A(t)U(t) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{u}_i(t) \text{ が斉次 ODE の解 } \ i = 1, \ldots, n$$

定理 6

$U(t)$ が斉次 ODE (1) の基本行列であることは次の条件と同値である：

(i) $U'(t)$ は連続

(ii) $U'(t) = A(t)U(t)$

(iii) $t \in \mathcal{K}$ があって，$U(t)$ は正則である

基本行列

注：$U(t) = (\boldsymbol{u}_1(t) \cdots \boldsymbol{u}_n(t))$ が C^1 級の行列関数ならば

$$U'(t) = A(t)U(t) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{u}_i(t) \text{ が斉次 ODE の解 } \ i = 1, \ldots, n$$

定理 6

$U(t)$ が斉次 ODE (1) の基本行列であることは次の条件と同値である：

(i) $U'(t)$ は連続

(ii) $U'(t) = A(t)U(t)$

(iii) $t \in \mathcal{K}$ があって，$U(t)$ は正則である

基本行列

定理 7

(a) $V(t)$ が斉次 ODE (1) の基本行列で $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 正則ならば，$V(t)C$ も (1) の基本行列である．

(b) $U(t), V(t)$ が (1) の基本行列ならば，正則な $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在して，$U(t) = V(t)C$.

証明：

(a) $(V(t)C)' = A(t)V(t)C$, $\det(VC) = \det V \cdot \det C \neq 0$

(b) $U(t_0), V(t_0)$ 正則より $C = V^{-1}(t_0)U(t_0)$ 正則

$Z(t) = V(t)C - U(t)$ とおくと，

$$Z' = AZ, \qquad Z(t_0) = O$$

したがって，$Z = O$ in K.

基本行列

定理 7

(a) $V(t)$ が斉次 ODE (1) の基本行列で $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 正則ならば，$V(t)C$ も (1) の基本行列である．

(b) $U(t), V(t)$ が (1) の基本行列ならば，正則な $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在して，$U(t) = V(t)C$.

証明：

(a) $(V(t)C)' = A(t)V(t)C$, $\det(VC) = \det V \cdot \det C \neq 0$

(b) $U(t_0), V(t_0)$ 正則より $C = V^{-1}(t_0)U(t_0)$ 正則
$Z(t) = V(t)C - U(t)$ とおくと，

$$Z' = AZ, \qquad Z(t_0) = O$$

したがって，$Z = O$ in K.

基本行列

定理 7

(a) $V(t)$ が斉次 ODE (1) の基本行列で $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 正則ならば，$V(t)C$ も (1) の基本行列である．

(b) $U(t), V(t)$ が (1) の基本行列ならば，正則な $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在して，$U(t) = V(t)C$.

証明 :

(a) $(V(t)C)' = A(t)V(t)C$, $\det(VC) = \det V \cdot \det C \neq 0$

(b) $U(t_0), V(t_0)$ 正則より $C = V^{-1}(t_0)U(t_0)$ 正則
$Z(t) = V(t)C - U(t)$ とおくと，

$$Z' = AZ, \qquad Z(t_0) = O$$

したがって，$Z = O$ in K.

基本行列

定理 7

(a) $V(t)$ が斉次 ODE (1) の基本行列で $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 正則ならば，$V(t)C$ も (1) の基本行列である．

(b) $U(t), V(t)$ が (1) の基本行列ならば，正則な $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在して，$U(t) = V(t)C$.

証明 :

(a) $(V(t)C)' = A(t)V(t)C$, $\det(VC) = \det V \cdot \det C \neq 0$

(b) $U(t_0), V(t_0)$ 正則より $C = V^{-1}(t_0)U(t_0)$ 正則
$Z(t) = V(t)C - U(t)$ とおくと，

$$Z' = AZ, \qquad Z(t_0) = O$$

したがって，$Z = O$ in $\mathcal{K}$.

基本行列

定理 7

(a) $V(t)$ が斉次 ODE (1) の基本行列で $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 正則ならば，$V(t)C$ も (1) の基本行列である．

(b) $U(t), V(t)$ が (1) の基本行列ならば，正則な $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在して，$U(t) = V(t)C$.

証明 :

(a) $(V(t)C)' = A(t)V(t)C$, $\det(VC) = \det V \cdot \det C \neq 0$

(b) $U(t_0), V(t_0)$ 正則より $C = V^{-1}(t_0)U(t_0)$ 正則
$Z(t) = V(t)C - U(t)$ とおくと，

$$Z' = AZ, \qquad Z(t_0) = O$$

したがって，$Z = O$ in $\mathcal{K}$.

基本行列

定理 7

(a) $V(t)$ が斉次 ODE (1) の基本行列で $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 正則ならば，$V(t)C$ も (1) の基本行列である．

(b) $U(t), V(t)$ が (1) の基本行列ならば，正則な $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在して，$U(t) = V(t)C$.

証明：

(a) $(V(t)C)' = A(t)V(t)C$, $\det(VC) = \det V \cdot \det C \neq 0$

(b) $U(t_0), V(t_0)$ 正則より $C = V^{-1}(t_0)U(t_0)$ 正則
$Z(t) = V(t)C - U(t)$ とおくと，

$$Z' = AZ, \qquad Z(t_0) = O$$

したがって，$Z = O$ in $\mathcal{K}$.

非斉次方程式について

- 全ての解は

$$\boldsymbol{x}(t) = V(t)\left(\boldsymbol{c} + \int_{t_0}^{t} V^{-1}(\tau)\boldsymbol{b}(\tau)\,d\tau\right), \qquad \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$$

  と書ける.

- 定数変化法を用いて解ける.

微分積分学続論 II： 第 11 回

Karel Svadlenka

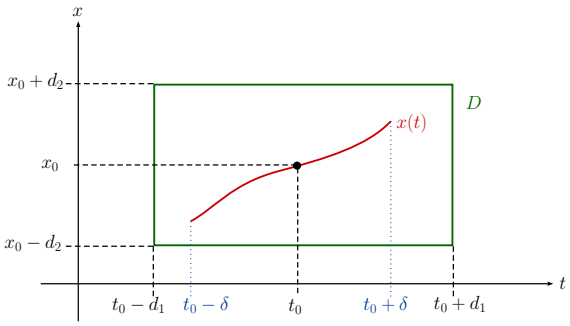
2020 年 6 月 24 日

■存在と一意性の問題

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} & = f(t,x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

(t_0, x_0) を長方形領域 D の内点とする．

$$D = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2;\ |t-t_0| \le d_1,\ |x-x_0| \le d_2\right\}$$



f がある条件を満たせば，点 (t_0, x_0) を通る (P) の解がある区間 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta], \delta > 0$ で一意的に存在することを示す．

■リプシッツ条件

定義（リプシッツ条件）
$f : D \to \mathbb{R}$ が D 上で（x について）リプシッツ条件を満たすとは， $L > 0$ があって，

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le L|x_1 - x_2| \quad \forall (t,x_1), (t,x_2) \in D.$$

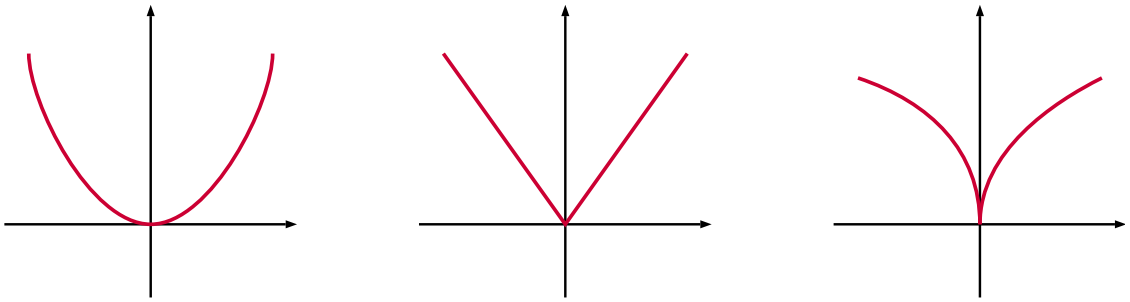
十分条件
$f(t,x)$ が D で x について偏微分可能で，$\frac{\partial f}{\partial x}$ が D において連続ならば，f は D でリプシッツ条件を満たす．

証明：$L = \max_{(t,x)\in D} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|$ とおくと，平均値の定理より，$\xi \in (x_1, x_2)$ があり，

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi)\right| \cdot |x_1 - x_2| \le L|x_1 - x_2|.$$

■リプシッツ条件：例
$x \in [-1, 1]$ で考える．

$f_1(x) = x^2$ $\qquad$ $f_2(x) = |x|$ $\qquad$ $f_3(x) = \sqrt{|x|}$



$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x$, $[-1,1]$ で連続 $\Rightarrow$ 十分条件よりリプシッツ条件を満たす $|f_2(x_1) - f_2(x_2)| = ||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2| \Rightarrow L = 1$ でリプシッツ条件を満たす $x_1 = x, x_2 = 0$ とする．$\frac{|f_3(x) - f_3(0)|}{|x-0|} = \frac{\sqrt{|x|}}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \to \infty$ as $x \to 0+ \Rightarrow$ リプシッツ条件を満たさない

■解の存在と一意性の定理：$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$

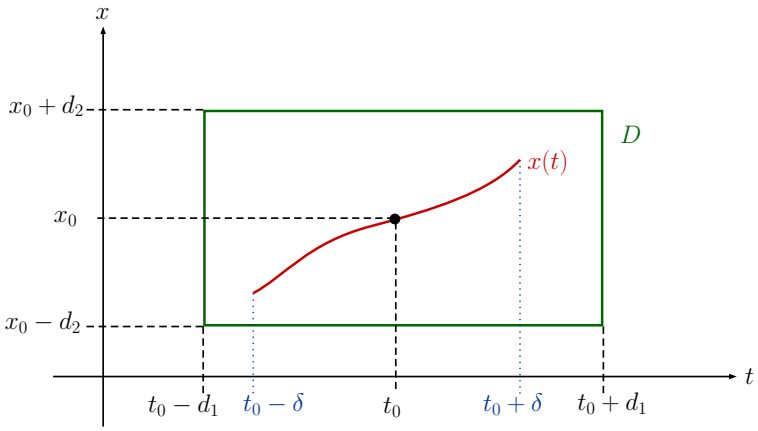
コーシーの定理

仮定：$f(t,x) : D := [t_0 - d_1, t_0 + d_1] \times [x_0 - d_2, x_0 + d_2] \to \mathbb{R}$

(A1) f は D で連続

(A2) f は D で x についてリプシッツ条件を満たす

主張：$\delta > 0$ があって（具体的に，$\delta = \min\{d_1, \frac{d_2}{M}\}$, $M = \max_D |f|$），初期値問題 (P) は $t \in I := [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ で解がただ一つ存在する．



■証明のアイデア

(P) は次の積分方程式と同値： $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$ Picard の逐次近似：

$$x_0(t) = x_0 \qquad \text{（定数関数）}$$
$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0(\tau))\, d\tau$$
$$\vdots$$
$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))\, d\tau$$

$n \to \infty$ のとき，$x_n(t)$ が (P) の解に収束することを期待する．

■逐次近似の具体例

$$\begin{cases} x' & = 2x \\ x(0) & = 1 \end{cases} \qquad t_0 = 0, x_0 = 1, f(t,x) = 2x, \quad \text{解：} x(t) = e^{2t}$$

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= x_0 = 1 \\
x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0(\tau))\, d\tau = 1 + \int_0^t 2x_0(\tau)\, d\tau = 1 + 2t \\
x_2(t) &= 1 + \int_0^t 2x_1(\tau)\, d\tau = 1 + \int_0^t 2(1+2\tau)\, d\tau = 1 + 2t + 2t^2 \\
x_3(t) &= 1 + \int_0^t 2(1+2\tau+2\tau^2)\, d\tau = 1 + 2t + \frac{2^2}{2}t^2 + \frac{2^3}{3!}t^3 \\
&\vdots \\
x_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} \qquad\qquad \to \quad e^{2t} \qquad \text{as } \ n \to \infty
\end{aligned}$$

■証明：ステップ 1

$I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ とおく．

$t \in I$ における $x_n(t)$ のグラフが全ての n で D に収まる．つまり，

$$|x_n(t) - x_0| \le d_2 \qquad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

数学的帰納法：

- $x_0(t) = x_0$ 明らか
- $|x_{n-1}(t) - x_0| < d_2$ と仮定すると，

$$\begin{aligned}
|x_n(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))\, d\tau \right| &\le \left| \int_{t_0}^{t} M\, d\tau \right| \\
&= M|t - t_0| \le M\delta \le d_2
\end{aligned}$$

■証明：ステップ 2

$n \to \infty$ のとき，$\{x_n(t)\}$ の関数列が I において ある関数 $x(t)$ に一様収束する．

$$\begin{cases} z_0(t) = x_0(t) = x_0 \\ z_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t), \ n \ge 1 \end{cases} \qquad \text{と定義する}$$

方針：$x_n(t) = z_0(t) + z_1(t) + \cdots + z_n(t) = \sum_{k=0}^{n} z_k(t)$ この級数の一様収束を言うのに，Weierstrass の優級数定理を適用する．

$$\begin{cases} |z_k(t)| \le c_k \ \ \forall t \in I, \ k = 0, 1, 2, \ldots \\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \text{ は } I \text{ で} \\ \text{絶対一様収束する} \end{array}$$

あとは $|z_k(t)|$ の評価をすればよい．

$$\begin{aligned}
|z_{n+1}(t)| = |x_{n+1}(t) - x_n(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} \left(f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau)) \right) d\tau \right| \\
&\le \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau))|\, d\tau \right| \\
&\le \left| \int_{t_0}^{t} L\, |x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau)|\, d\tau \right| \le L \left| \int_{t_0}^{t} |z_n(\tau)|\, d\tau \right|
\end{aligned}$$

■証明：ステップ 2

示したのは：　$|z_{n+1}(t)| \le L\left|\int_{t_0}^{t} |z_n(\tau)|\,d\tau\right|$

$$|z_1(t)| = |x_1(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0)\,d\tau\right| \le M|t - t_0|$$
$$|z_2(t)| \le L\left|\int_{t_0}^{t} |z_1(\tau)|\,d\tau\right| \le LM\left|\int_{t_0}^{t} |\tau - t_0|\,d\tau\right| = \frac{LM}{2}|t - t_0|^2$$
$$|z_k(t)| \le \frac{L^{k-1}M}{k!}|t - t_0|^k =: c_k \qquad \text{（帰納法より）}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \frac{M}{L}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(L|t - t_0|)^k}{k!} = \frac{M}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right) < \infty$$

Weierstrass の定理より $x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} z_k(t)$ は $t \in I$ において， ある関数 $x(t)$ に一様収束する．

■証明：ステップ 3

収束先の $x(t)$ は (P) の解である．

- $x_n \to x$ 一様収束，x_n 連続 $\Rightarrow$ $x(t)$ も連続
- $\sup_{t\in I} |f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))| \le \sup_{t\in I} L|x_n(t) - x(t)| \to 0$ より $\{f(t, x_n(t))\}$ は I 上で $f(t, x(t))$ に一様収束．

したがって，

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))\,d\tau$$

で $n \to \infty$ をとることができて，

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,d\tau, \qquad t \in I.$$

右辺は C^1-級 $\Rightarrow$ 微分すると， $x'(t) = f(t, x(t))$.

■証明：ステップ 4

一意性を示すとき，Gronwall の補題を用いる．

Gronwall の補題

- $\varphi(t), \psi(t), w(t)$ が区間 $[a, b]$ で連続
- $\psi(t) \ge 0 \quad \forall t \in [a, b]$
- $w(t) \le \varphi(t) + \int_a^t \psi(\tau)w(\tau)\,d\tau \quad \forall t \in [a, b]$

ならば，次が成立する：

$$w(t) \le \varphi(t) + \int_a^t \psi(\tau)\varphi(\tau)e^{\int_\tau^t \psi(s)\,ds}\,d\tau \qquad \forall t \in [a, b].$$

証明：$v(t) = \int_a^t \psi(\tau)w(\tau)\,d\tau$ とおくと，$v'(t) = \psi(t)w(t)$. 不等式の両辺に $\psi(t) \ge 0$ をかけると，

$$\underbrace{w(t)\psi(t)}_{v'(t)} \le \varphi(t)\psi(t) + v(t)\psi(t)$$

■証明：ステップ 4

（Gronwall 補題の証明の続き）

$$v'(t) \le \varphi(t)\psi(t) + v(t)\psi(t)$$

$$\underbrace{(v'(t) - v(t)\psi(t))e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds}}_{\frac{d}{dt}\left(v(t)e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds}\right)} \le \varphi(t)\psi(t)e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds}$$

積分して（$v(a) = 0$），

$$v(t)e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds} \le \int_a^t \varphi(\tau)\psi(\tau)e^{-\int_a^\tau \psi(s)\,ds}\,d\tau$$

$$v(t) \le \int_a^t \varphi(\tau)\psi(\tau)e^{\int_\tau^t \psi(s)\,ds}\,d\tau$$

元の不等式に代入すれば，示せた．

■証明：ステップ 4（一意性）

二つの解 $x(t), y(t)$ があるとする．

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau))\,d\tau$$

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau))\,d\tau \qquad t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

$$\text{差} \quad |x(t) - y(t)| = \left|\int_{t_0}^t (f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau)))\,d\tau\right|$$

$$\le L\left|\int_{t_0}^t |x(\tau) - y(\tau)|\,d\tau\right|$$

- $t > t_0$ のとき，Gronwall の補題で $\varphi(t) = 0, \psi(t) = L, w(t) = |x(t) - y(t)|, a = t_0$ とすれば，

$$|x(t) - y(t)| \le \int_{t_0}^t 0\,d\tau = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = y(t), \ \ t > t_0.$$

■証明：ステップ 4（一意性）

二つの解 $x(t), y(t)$ があるとする．

$$|x(t) - y(t)| \le L\left|\int_{t_0}^t |x(\tau) - y(\tau)|\,d\tau\right|$$

- $t < t_0$ のとき，$\widetilde{x}(t) = x(2t_0 - t), \widetilde{f}(t, x) = -f(2t_0 - t, x)$ とおくと，

$$\begin{cases} \frac{d\widetilde{x}}{dt} & = \widetilde{f}(t, \widetilde{x}) \\ \widetilde{x}(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

が成立する． この問題に対して $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ で解の一意性を上と同じように示す． $\Rightarrow$ $x(t)$ は $t \in [t_0 - \delta, t_0]$ で一意．

微分積分学続論 II： 第 11 回

Karel Svadlenka

京都大学大学院理学研究科 数学教室

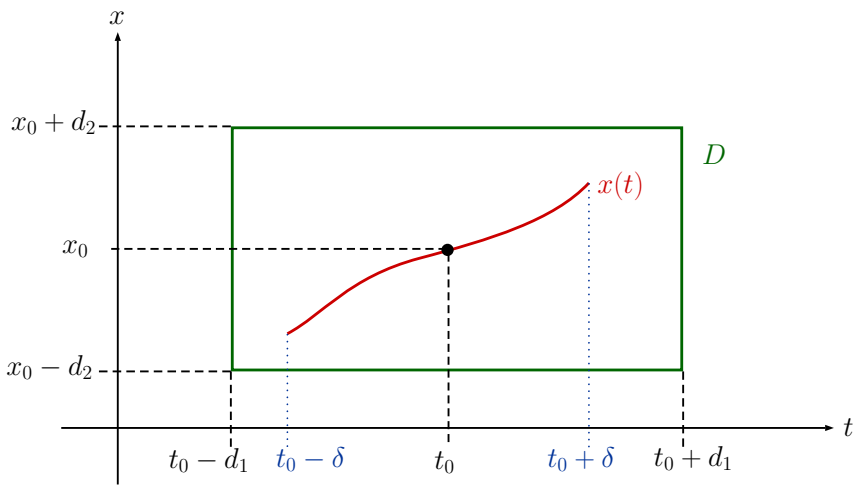
2020 年 6 月 24 日

存在と一意性の問題

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = f(t,x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

(t_0, x_0) を長方形領域 D の内点とする.

$$D = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2;\ |t-t_0| \le d_1,\ |x-x_0| \le d_2\right\}$$



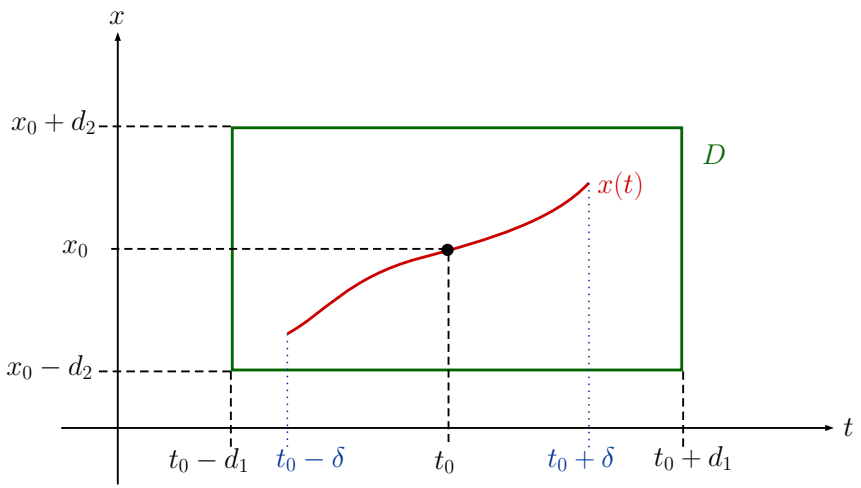
f がある条件を満たせば，点 (t_0, x_0) を通る (P) の解がある区間 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta], \delta > 0$ で一意的に存在することを示す.

存在と一意性の問題

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = f(t,x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

(t_0, x_0) を長方形領域 D の内点とする.

$$D = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2;\ |t-t_0| \le d_1,\ |x-x_0| \le d_2\right\}$$



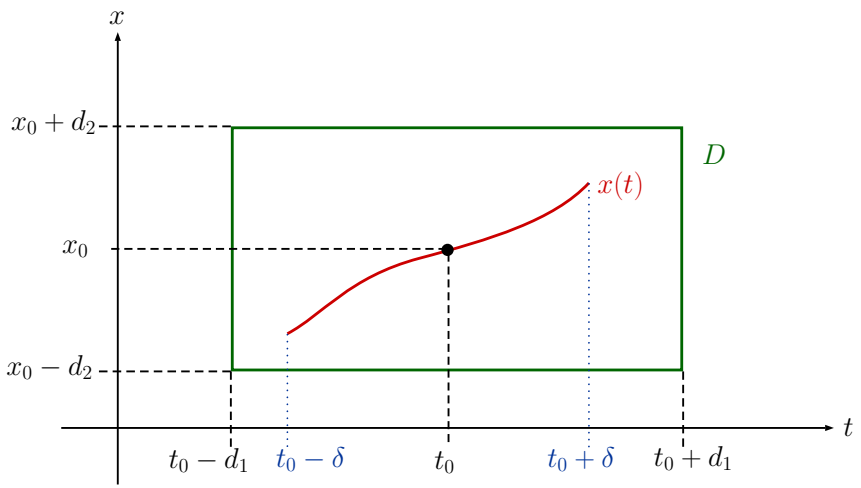
f がある条件を満たせば，点 (t_0, x_0) を通る (P) の解がある区間 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta], \delta > 0$ で一意的に存在することを示す.

存在と一意性の問題

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = f(t,x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

(t_0, x_0) を長方形領域 D の内点とする.

$$D = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2;\ |t-t_0| \le d_1,\ |x-x_0| \le d_2\right\}$$



f がある条件を満たせば，点 (t_0, x_0) を通る (P) の解がある区間 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta], \delta > 0$ で一意的に存在することを示す.

リプシッツ条件

定義（リプシッツ条件）

$f : D \to \mathbb{R}$ が D 上で（x について）リプシッツ条件を満たすとは，
$L > 0$ があって，

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D.$$

十分条件

$f(t, x)$ が D で x について偏微分可能で，$\frac{\partial f}{\partial x}$ が D において連続ならば，
f は D でリプシッツ条件を満たす．

証明 ：$L = \max_{(t,x)\in D} |\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)|$ とおくと，平均値の定理より，
$\xi \in (x_1, x_2)$ があり，

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi)\right| \cdot |x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2|.$$

リプシッツ条件

定義（リプシッツ条件）

$f : D \to \mathbb{R}$ が D 上で（x について）リプシッツ条件を満たすとは，
$L > 0$ があって，

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D.$$

十分条件

$f(t, x)$ が D で x について偏微分可能で，$\frac{\partial f}{\partial x}$ が D において連続ならば，
f は D でリプシッツ条件を満たす．

証明：$L = \max_{(t,x)\in D} |\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)|$ とおくと，平均値の定理より，
$\xi \in (x_1, x_2)$ があり，

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi)\right| \cdot |x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2|.$$

リプシッツ条件

定義（リプシッツ条件）

$f : D \to \mathbb{R}$ が D 上で（x について）リプシッツ条件を満たすとは，
$L > 0$ があって，

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D.$$

十分条件

$f(t, x)$ が D で x について偏微分可能で，$\frac{\partial f}{\partial x}$ が D において連続ならば，
f は D でリプシッツ条件を満たす．

証明：$L = \max_{(t,x)\in D} |\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)|$ とおくと，平均値の定理より，
$\xi \in (x_1, x_2)$ があり，

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi)\right| \cdot |x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2|.$$

リプシッツ条件

定義（リプシッツ条件）

$f : D \to \mathbb{R}$ が D 上で（x について）リプシッツ条件を満たすとは，
$L > 0$ があって，

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D.$$

十分条件

$f(t, x)$ が D で x について偏微分可能で，$\frac{\partial f}{\partial x}$ が D において連続ならば，
f は D でリプシッツ条件を満たす．

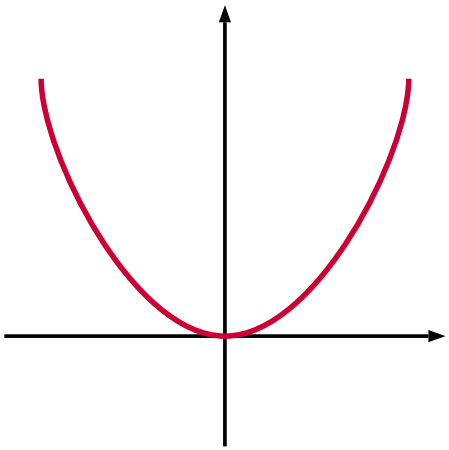
証明：$L = \max_{(t,x)\in D} |\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)|$ とおくと，平均値の定理より，
$\xi \in (x_1, x_2)$ があり，

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi)\right| \cdot |x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2|.$$

リプシッツ条件：例

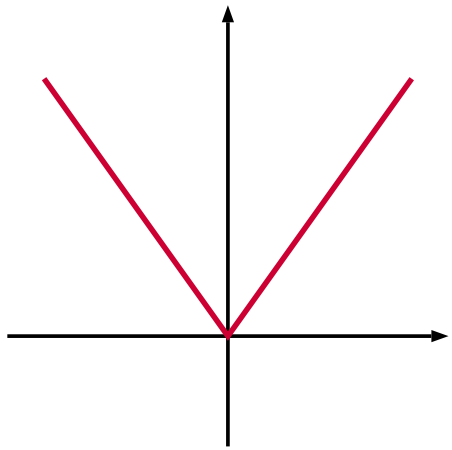
$x \in [-1, 1]$ で考える.

$f_1(x) = x^2$



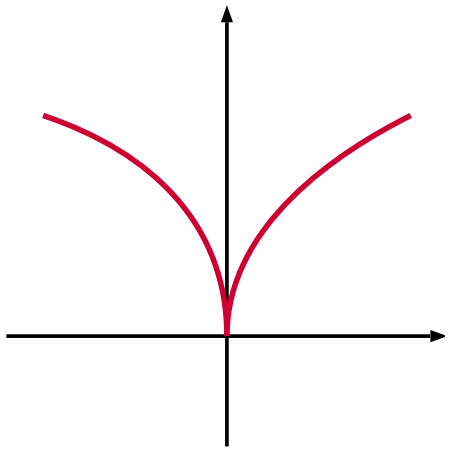
$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x$,
$[-1, 1]$ で連続
$\Rightarrow$ 十分条件より
リプシッツ条件を
満たす

$f_2(x) = |x|$



$|f_2(x_1) - f_2(x_2)| =$
$||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|$
$\Rightarrow$ $L = 1$ で
リプシッツ条件を
満たす

$f_3(x) = \sqrt{|x|}$

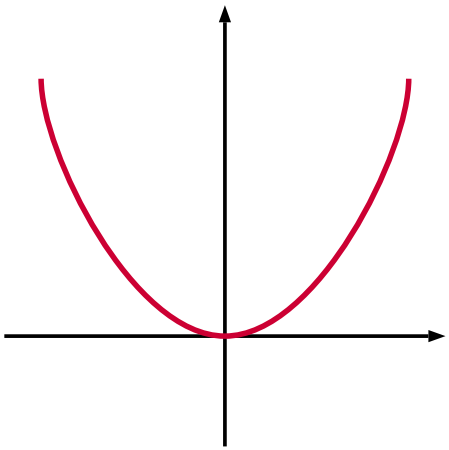


$x_1 = x, x_2 = 0$ とする.
$\frac{|f_3(x) - f_3(0)|}{|x - 0|} = \frac{\sqrt{|x|}}{|x|} =$
$\frac{1}{\sqrt{|x|}} \to \infty$ as $x \to 0+$
$\Rightarrow$ リプシッツ条件を
満たさない

リプシッツ条件：例

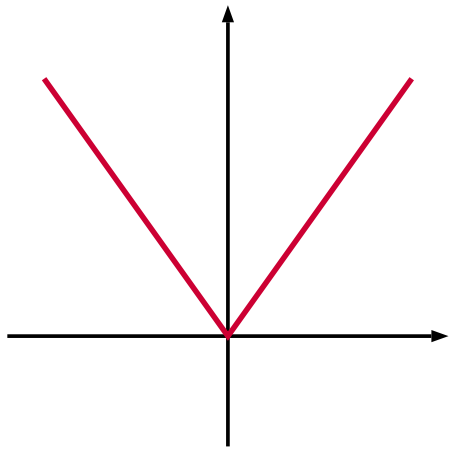
$x \in [-1, 1]$ で考える.

$f_1(x) = x^2$



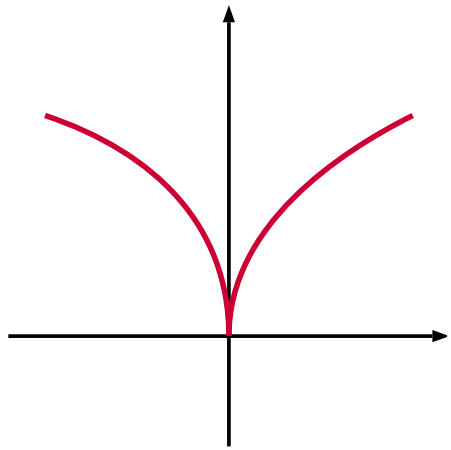
$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x$,
$[-1, 1]$ で連続
$\Rightarrow$ 十分条件より
リプシッツ条件を
満たす

$f_2(x) = |x|$



$|f_2(x_1) - f_2(x_2)| =$
$||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|$
$\Rightarrow$ $L = 1$ で
リプシッツ条件を
満たす

$f_3(x) = \sqrt{|x|}$

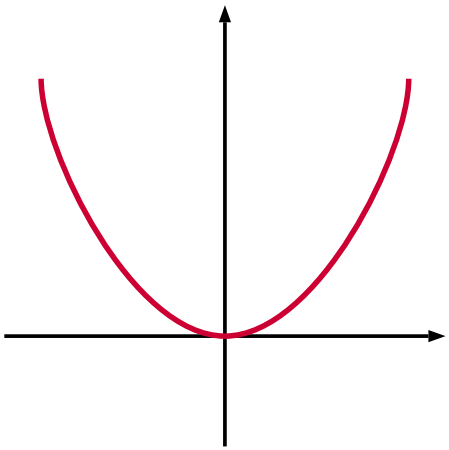


$x_1 = x, x_2 = 0$ とする.
$\frac{|f_3(x) - f_3(0)|}{|x-0|} = \frac{\sqrt{|x|}}{|x|} =$
$\frac{1}{\sqrt{|x|}} \to \infty$ as $x \to 0+$
$\Rightarrow$ リプシッツ条件を
満たさない

リプシッツ条件：例

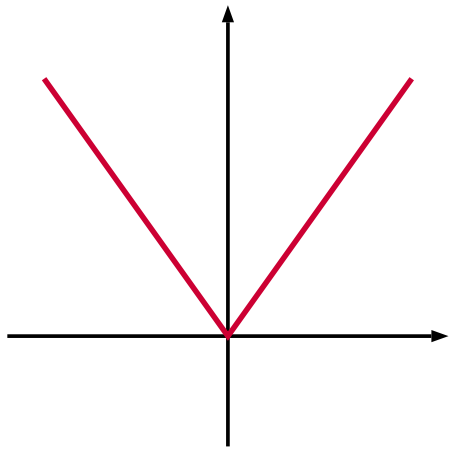
$x \in [-1, 1]$ で考える.

$$f_1(x) = x^2$$



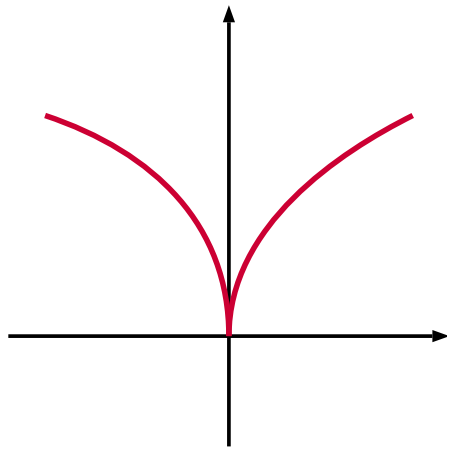
$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x$,
$[-1, 1]$ で連続
$\Rightarrow$ 十分条件より
リプシッツ条件を
満たす

$$f_2(x) = |x|$$



$|f_2(x_1) - f_2(x_2)| =$
$||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|$
$\Rightarrow$ $L = 1$ で
リプシッツ条件を
満たす

$$f_3(x) = \sqrt{|x|}$$

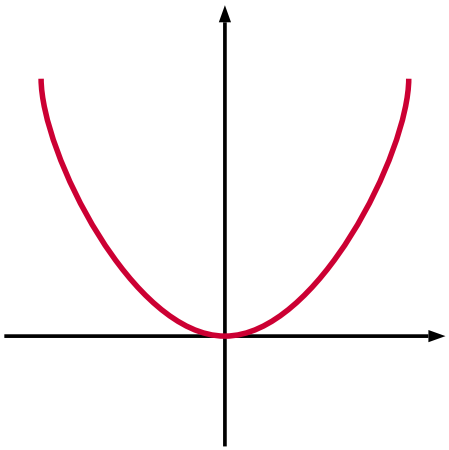


$x_1 = x, x_2 = 0$ とする.
$\frac{|f_3(x) - f_3(0)|}{|x - 0|} = \frac{\sqrt{|x|}}{|x|} =$
$\frac{1}{\sqrt{|x|}} \to \infty$ as $x \to 0+$
$\Rightarrow$ リプシッツ条件を
満たさない

リプシッツ条件：例

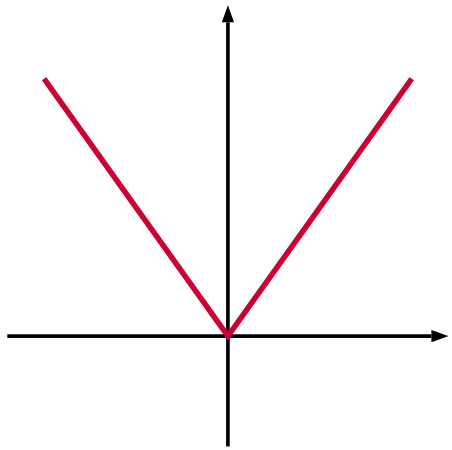
$x \in [-1, 1]$ で考える.

$f_1(x) = x^2$



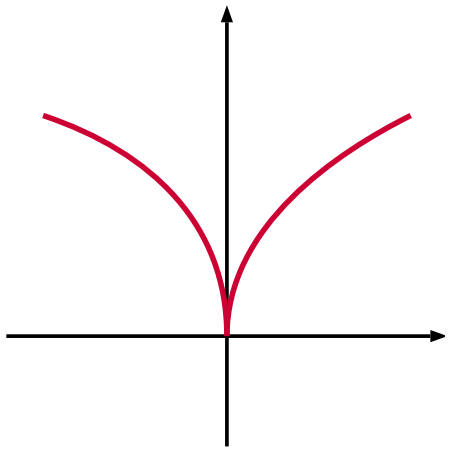
$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x$,
$[-1, 1]$ で連続
$\Rightarrow$ 十分条件より
リプシッツ条件を
満たす

$f_2(x) = |x|$



$|f_2(x_1) - f_2(x_2)| =$
$||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|$
$\Rightarrow$ $L = 1$ で
リプシッツ条件を
満たす

$f_3(x) = \sqrt{|x|}$



$x_1 = x, x_2 = 0$ とする.
$\frac{|f_3(x) - f_3(0)|}{|x - 0|} = \frac{\sqrt{|x|}}{|x|} =$
$\frac{1}{\sqrt{|x|}} \to \infty$ as $x \to 0+$
$\Rightarrow$ リプシッツ条件を
満たさない

解の存在と一意性の定理：$\frac{dx}{dt} = f(t,x)\ ,\ x(t_0) = x_0$

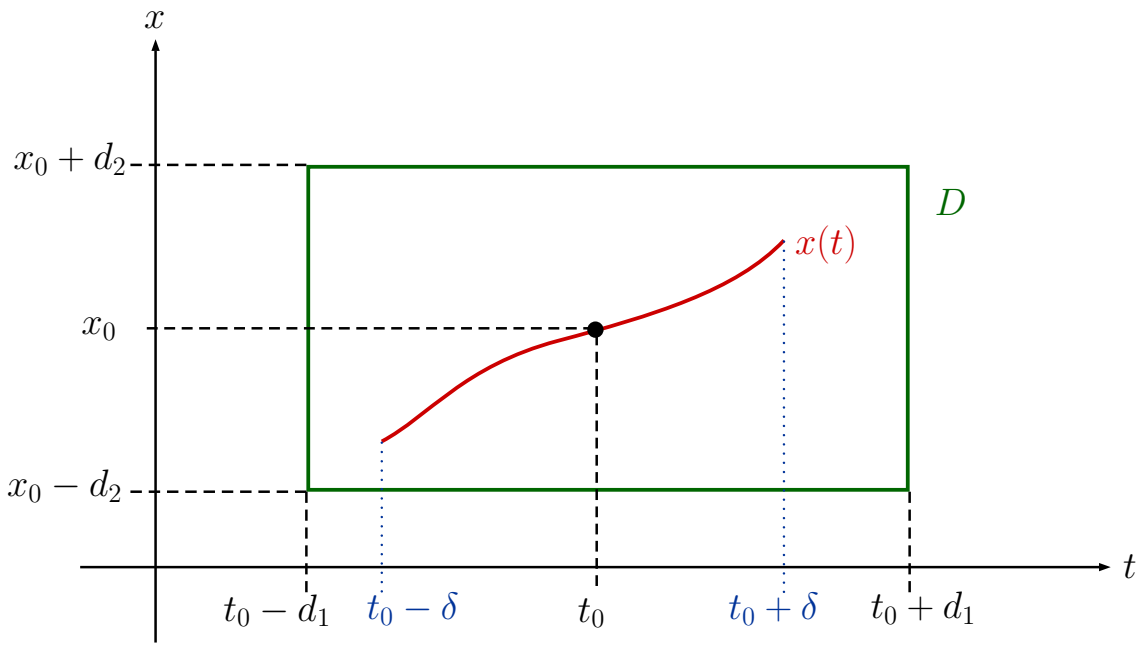
コーシーの定理

仮定：$f(t,x) : D := [t_0 - d_1, t_0 + d_1] \times [x_0 - d_2, x_0 + d_2] \to \mathbb{R}$

(A1) f は D で連続

(A2) f は D で x についてリプシッツ条件を満たす

主張：$\delta > 0$ があって（具体的に，$\delta = \min\{d_1, \frac{d_2}{M}\},\ M = \max_D |f|$），
初期値問題 (P) は $t \in I := [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ で解がただ一つ存在する．



解の存在と一意性の定理：$\frac{dx}{dt} = f(t,x)\ ,\ x(t_0) = x_0$

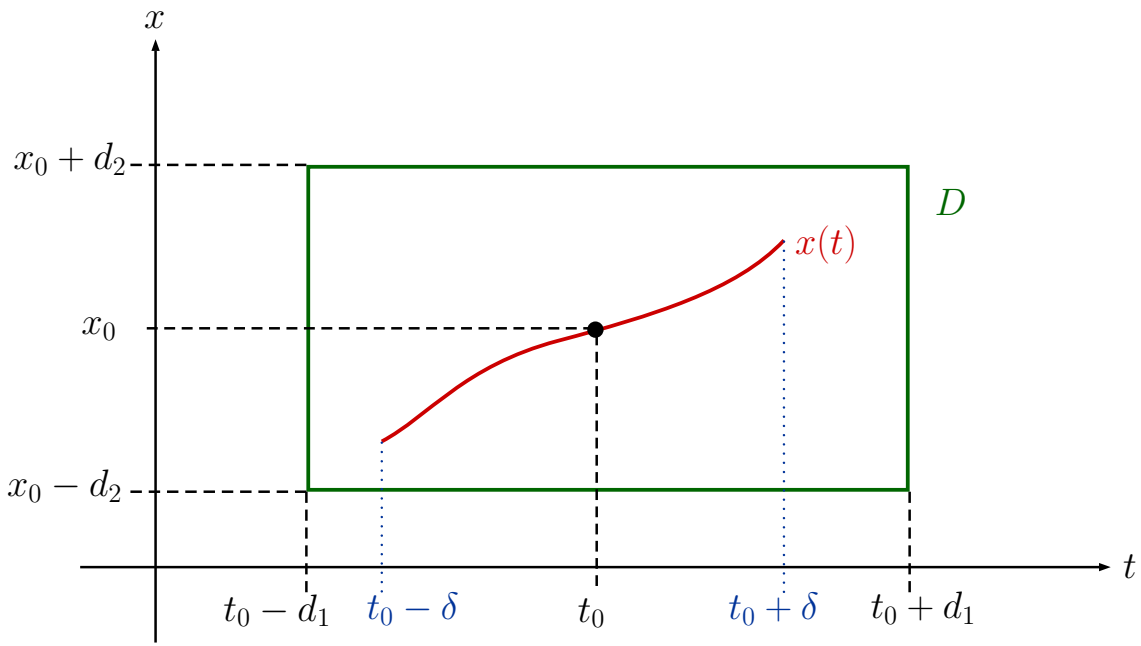
コーシーの定理

仮定：$f(t,x) : D := [t_0 - d_1, t_0 + d_1] \times [x_0 - d_2, x_0 + d_2] \to \mathbb{R}$

(A1) f は D で連続

(A2) f は D で x についてリプシッツ条件を満たす

主張：$\delta > 0$ があって（具体的に，$\delta = \min\{d_1, \frac{d_2}{M}\}$, $M = \max_D |f|$），
初期値問題 (P) は $t \in I := [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ で解がただ一つ存在する．



証明のアイデア

(P) は次の積分方程式と同値： $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$

Picard の逐次近似：

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 \quad \text{（定数関数）} \\ x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0(\tau))\, d\tau \\ &\vdots \\ x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))\, d\tau \end{aligned}$$

$n \to \infty$ のとき，$x_n(t)$ が (P) の解に収束することを期待する．

証明のアイデア

(P) は次の積分方程式と同値： $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$

Picard の逐次近似：

$$
\begin{aligned}
x_0(t) &= x_0 \qquad \text{（定数関数）} \\
x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0(\tau))\, d\tau \\
&\vdots \\
x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))\, d\tau
\end{aligned}
$$

$n \to \infty$ のとき，$x_n(t)$ が (P) の解に収束することを期待する．

証明のアイデア

(P) は次の積分方程式と同値： $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$

Picard の逐次近似：

$$
\begin{aligned}
x_0(t) &= x_0 \qquad \text{（定数関数）} \\
x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0(\tau))\, d\tau \\
&\vdots \\
x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))\, d\tau
\end{aligned}
$$

$n \to \infty$ のとき，$x_n(t)$ が (P) の解に収束することを期待する.

逐次近似の具体例

$$\begin{cases} x' & = 2x \\ x(0) & = 1 \end{cases} \qquad t_0 = 0, x_0 = 1, f(t,x) = 2x, \quad \text{解：} x(t) = e^{2t}$$

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= x_0 = 1 \\
x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0(\tau))\, d\tau = 1 + \int_0^t 2x_0(\tau)\, d\tau = 1 + 2t \\
x_2(t) &= 1 + \int_0^t 2x_1(\tau)\, d\tau = 1 + \int_0^t 2(1 + 2\tau)\, d\tau = 1 + 2t + 2t^2 \\
x_3(t) &= 1 + \int_0^t 2(1 + 2\tau + 2\tau^2)\, d\tau = 1 + 2t + \frac{2^2}{2} t^2 + \frac{2^3}{3!} t^3 \\
&\vdots \\
x_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} \qquad \to \quad e^{2t} \qquad \text{as } n \to \infty
\end{aligned}$$

逐次近似の具体例

$$\begin{cases} x' &= 2x \\ x(0) &= 1 \end{cases} \qquad t_0 = 0, x_0 = 1, f(t,x) = 2x, \quad \text{解：} x(t) = e^{2t}$$

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= x_0 = 1 \\
x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0(\tau))\, d\tau = 1 + \int_0^t 2x_0(\tau)\, d\tau = 1 + 2t \\
x_2(t) &= 1 + \int_0^t 2x_1(\tau)\, d\tau = 1 + \int_0^t 2(1 + 2\tau)\, d\tau = 1 + 2t + 2t^2 \\
x_3(t) &= 1 + \int_0^t 2(1 + 2\tau + 2\tau^2)\, d\tau = 1 + 2t + \frac{2^2}{2} t^2 + \frac{2^3}{3!} t^3 \\
&\vdots \\
x_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} \qquad \to \quad e^{2t} \qquad \text{as} \;\; n \to \infty
\end{aligned}$$

証明：ステップ 1

$I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ とおく．

$t \in I$ における $x_n(t)$ のグラフが全ての n で D に収まる．つまり，

$$|x_n(t) - x_0| \leq d_2 \qquad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

数学的帰納法：

- $x_0(t) = x_0$ 明らか
- $|x_{n-1}(t) - x_0| < d_2$ と仮定すると，

$$|x_n(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))\, d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} M\, d\tau \right|$$
$$= M|t - t_0| \leq M\delta \leq d_2$$

証明：ステップ 1

$I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ とおく．

$t \in I$ における $x_n(t)$ のグラフが全ての n で D に収まる．つまり，

$$|x_n(t) - x_0| \leq d_2 \qquad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

数学的帰納法：

- $x_0(t) = x_0$ 明らか
- $|x_{n-1}(t) - x_0| < d_2$ と仮定すると，

$$|x_n(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))\, d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} M\, d\tau \right|$$
$$= M|t - t_0| \leq M\delta \leq d_2$$

証明：ステップ 1

$I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ とおく．

$t \in I$ における $x_n(t)$ のグラフが全ての n で D に収まる．つまり，

$$|x_n(t) - x_0| \leq d_2 \qquad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

数学的帰納法：

- $x_0(t) = x_0$ 明らか
- $|x_{n-1}(t) - x_0| < d_2$ と仮定すると，

$$|x_n(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))\, d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} M\, d\tau \right|$$
$$= M|t - t_0| \leq M\delta \leq d_2$$

証明：ステップ 1

$I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ とおく.

$t \in I$ における $x_n(t)$ のグラフが全ての n で D に収まる．つまり,

$$|x_n(t) - x_0| \leq d_2 \qquad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

数学的帰納法：

- $x_0(t) = x_0$ 明らか
- $|x_{n-1}(t) - x_0| < d_2$ と仮定すると,

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))\, d\tau \right| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} M\, d\tau \right| \\ &= M|t - t_0| \leq M\delta \leq d_2 \end{aligned}$$

証明：ステップ 2

$n \to \infty$ のとき，$\{x_n(t)\}$ の関数列が I において
ある関数 $x(t)$ に一様収束する.

$$\begin{cases} z_0(t) = x_0(t) = x_0 \\ z_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t), \ n \geq 1 \end{cases}$$ と定義する

方針：$x_n(t) = z_0(t) + z_1(t) + \cdots + z_n(t) = \sum_{k=0}^{n} z_k(t)$
この級数の一様収束を言うのに，Weierstrass の優級数定理を適用する.

$$\begin{cases} |z_k(t)| \leq c_k \ \forall t \in I, \ k = 0, 1, 2, \ldots \\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \text{ は } I \text{ で絶対一様収束する}$$

あとは $|z_k(t)|$ の評価をすればよい.

$$\begin{aligned} |z_{n+1}(t)| &= |x_{n+1}(t) - x_n(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} \left(f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau)) \right) d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau))| \, d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} L|x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau)| \, d\tau \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |z_n(\tau)| \, d\tau \right| \end{aligned}$$

証明：ステップ 2

$n \to \infty$ のとき，$\{x_n(t)\}$ の関数列が I において
ある関数 $x(t)$ に一様収束する．

$$\begin{cases} z_0(t) = x_0(t) = x_0 \\ z_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t), \ n \geq 1 \end{cases}$$ と定義する

方針：$x_n(t) = z_0(t) + z_1(t) + \cdots + z_n(t) = \sum_{k=0}^{n} z_k(t)$
この級数の一様収束を言うのに，Weierstrass の優級数定理を適用する．

$$\begin{cases} |z_k(t)| \leq c_k \ \ \forall t \in I, \ k = 0, 1, 2, \ldots \\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty \end{cases} \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \text{ は } I \text{ で 絶対一様収束する}$$

あとは $|z_k(t)|$ の評価をすればよい．

$$\begin{aligned} |z_{n+1}(t)| &= |x_{n+1}(t) - x_n(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} \left(f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau)) \right) d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau))| \, d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} L|x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau)| \, d\tau \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |z_n(\tau)| \, d\tau \right| \end{aligned}$$

証明：ステップ 2

$n \to \infty$ のとき，$\{x_n(t)\}$ の関数列が I において
ある関数 $x(t)$ に一様収束する.

$$\begin{cases} z_0(t) = x_0(t) = x_0 \\ z_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t), \ n \geq 1 \end{cases}$$ と定義する

方針：$x_n(t) = z_0(t) + z_1(t) + \cdots + z_n(t) = \sum_{k=0}^{n} z_k(t)$

この級数の一様収束を言うのに，Weierstrass の優級数定理を適用する.

$$\begin{cases} |z_k(t)| \leq c_k \ \ \forall t \in I, \ k = 0, 1, 2, \ldots \\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty \end{cases} \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \text{ は } I \text{ で 絶対一様収束する}$$

あとは $|z_k(t)|$ の評価をすればよい.

$$\begin{aligned} |z_{n+1}(t)| &= |x_{n+1}(t) - x_n(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} \left(f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau)) \right) d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau))| \, d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} L|x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau)| \, d\tau \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |z_n(\tau)| \, d\tau \right| \end{aligned}$$

証明：ステップ 2

$n \to \infty$ のとき，$\{x_n(t)\}$ の関数列が I において
ある関数 $x(t)$ に一様収束する．

$$\begin{cases} z_0(t) = x_0(t) = x_0 \\ z_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t), \ n \geq 1 \end{cases}$$ と定義する

方針：$x_n(t) = z_0(t) + z_1(t) + \cdots + z_n(t) = \sum_{k=0}^{n} z_k(t)$
この級数の一様収束を言うのに，Weierstrass の優級数定理を適用する．

$$\begin{cases} |z_k(t)| \leq c_k \ \ \forall t \in I, \ k = 0, 1, 2, \ldots \\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty \end{cases} \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \text{ は } I \text{ で 絶対一様収束する}$$

あとは $|z_k(t)|$ の評価をすればよい．

$$\begin{aligned} |z_{n+1}(t)| &= |x_{n+1}(t) - x_n(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau))) \, d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau))| \, d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} L|x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau)| \, d\tau \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |z_n(\tau)| \, d\tau \right| \end{aligned}$$

証明：ステップ 2

$n \to \infty$ のとき，$\{x_n(t)\}$ の関数列が I において
ある関数 $x(t)$ に一様収束する．

$$\begin{cases} z_0(t) = x_0(t) = x_0 \\ z_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t),\ n \geq 1 \end{cases}$$ と定義する

方針：$x_n(t) = z_0(t) + z_1(t) + \cdots + z_n(t) = \sum_{k=0}^{n} z_k(t)$
この級数の一様収束を言うのに，Weierstrass の優級数定理を適用する．

$$\begin{cases} |z_k(t)| \leq c_k \quad \forall t \in I,\ k = 0, 1, 2, \ldots \\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty \end{cases} \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \text{ は } I \text{ で 絶対一様収束する}$$

あとは $|z_k(t)|$ の評価をすればよい．

$$\begin{aligned} |z_{n+1}(t)| &= |x_{n+1}(t) - x_n(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau)))\, d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau))|\, d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} L\,|x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau)|\, d\tau \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |z_n(\tau)|\, d\tau \right| \end{aligned}$$

証明：ステップ 2

$n \to \infty$ のとき，$\{x_n(t)\}$ の関数列が I において
ある関数 $x(t)$ に一様収束する．

$$\begin{cases} z_0(t) = x_0(t) = x_0 \\ z_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t), \ n \geq 1 \end{cases}$$ と定義する

方針：$x_n(t) = z_0(t) + z_1(t) + \cdots + z_n(t) = \sum_{k=0}^{n} z_k(t)$
この級数の一様収束を言うのに，Weierstrass の優級数定理を適用する．

$$\begin{cases} |z_k(t)| \leq c_k \ \ \forall t \in I, \ k = 0, 1, 2, \ldots \\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty \end{cases} \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \text{ は } I \text{ で 絶対一様収束する}$$

あとは $|z_k(t)|$ の評価をすればよい．

$$\begin{aligned} |z_{n+1}(t)| &= |x_{n+1}(t) - x_n(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau))) \, d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau))| \, d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} L \, |x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau)| \, d\tau \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |z_n(\tau)| \, d\tau \right| \end{aligned}$$

証明：ステップ 2

$n \to \infty$ のとき，$\{x_n(t)\}$ の関数列が I において
ある関数 $x(t)$ に一様収束する．

$$\begin{cases} z_0(t) = x_0(t) = x_0 \\ z_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t), \ n \geq 1 \end{cases}$$ と定義する

方針：$x_n(t) = z_0(t) + z_1(t) + \cdots + z_n(t) = \sum_{k=0}^{n} z_k(t)$
この級数の一様収束を言うのに，Weierstrass の優級数定理を適用する．

$$\begin{cases} |z_k(t)| \leq c_k \ \ \forall t \in I, \ k = 0, 1, 2, \ldots \\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty \end{cases} \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \text{ は } I \text{ で 絶対一様収束する}$$

あとは $|z_k(t)|$ の評価をすればよい．

$$\begin{aligned} |z_{n+1}(t)| &= |x_{n+1}(t) - x_n(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau))) \, d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau))| \, d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} L \, |x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau)| \, d\tau \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |z_n(\tau)| \, d\tau \right| \end{aligned}$$

証明：ステップ 2

示したのは：　$|z_{n+1}(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |z_n(\tau)|\, d\tau \right|$

$$
\begin{aligned}
|z_1(t)| &= |x_1(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0)\, d\tau \right| \leq M|t - t_0| \\
|z_2(t)| &\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |z_1(\tau)|\, d\tau \right| \leq LM \left| \int_{t_0}^{t} |\tau - t_0|\, d\tau \right| = \frac{LM}{2}|t - t_0|^2 \\
|z_k(t)| &\leq \frac{L^{k-1}M}{k!}|t - t_0|^k =: c_k \qquad \text{（帰納法より）}
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \frac{M}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(L|t - t_0|)^k}{k!} = \frac{M}{L} \left(e^{L|t-t_0|} - 1 \right) < \infty
$$

Weierstrass の定理より $x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} z_k(t)$ は $t \in I$ において，
ある関数 $x(t)$ に一様収束する．

証明：ステップ 2

示したのは： $|z_{n+1}(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |z_n(\tau)| \, d\tau \right|$

$$
\begin{aligned}
|z_1(t)| &= |x_1(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0) \, d\tau \right| \leq M|t - t_0| \\
|z_2(t)| &\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |z_1(\tau)| \, d\tau \right| \leq LM \left| \int_{t_0}^{t} |\tau - t_0| \, d\tau \right| = \frac{LM}{2}|t - t_0|^2 \\
|z_k(t)| &\leq \frac{L^{k-1}M}{k!}|t - t_0|^k =: c_k \qquad \text{（帰納法より）}
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \frac{M}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(L|t - t_0|)^k}{k!} = \frac{M}{L} \left(e^{L|t-t_0|} - 1 \right) < \infty
$$

Weierstrass の定理より $x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} z_k(t)$ は $t \in I$ において，
ある関数 $x(t)$ に一様収束する．

証明：ステップ 2

示したのは： $|z_{n+1}(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |z_n(\tau)|\, d\tau \right|$

$$
\begin{aligned}
|z_1(t)| &= |x_1(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0)\, d\tau \right| \leq M|t - t_0| \\
|z_2(t)| &\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |z_1(\tau)|\, d\tau \right| \leq LM \left| \int_{t_0}^{t} |\tau - t_0|\, d\tau \right| = \frac{LM}{2}|t - t_0|^2 \\
|z_k(t)| &\leq \frac{L^{k-1}M}{k!}|t - t_0|^k =: c_k \qquad \text{（帰納法より）}
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \frac{M}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(L|t - t_0|)^k}{k!} = \frac{M}{L} \left(e^{L|t-t_0|} - 1 \right) < \infty
$$

Weierstrass の定理より $x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} z_k(t)$ は $t \in I$ において，
ある関数 $x(t)$ に一様収束する．

証明：ステップ 2

示したのは： $|z_{n+1}(t)| \le L \left| \int_{t_0}^{t} |z_n(\tau)|\, d\tau \right|$

$$
\begin{aligned}
|z_1(t)| &= |x_1(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0)\, d\tau \right| \le M|t - t_0| \\
|z_2(t)| &\le L \left| \int_{t_0}^{t} |z_1(\tau)|\, d\tau \right| \le LM \left| \int_{t_0}^{t} |\tau - t_0|\, d\tau \right| = \frac{LM}{2}|t - t_0|^2 \\
|z_k(t)| &\le \frac{L^{k-1}M}{k!}|t - t_0|^k =: c_k \qquad \text{（帰納法より）}
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \frac{M}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(L|t - t_0|)^k}{k!} = \frac{M}{L} \left(e^{L|t-t_0|} - 1 \right) < \infty
$$

Weierstrass の定理より $x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} z_k(t)$ は $t \in I$ において，
ある関数 $x(t)$ に一様収束する．

証明：ステップ 3

収束先の $x(t)$ は (P) の解である.

- $x_n \to x$ 一様収束，x_n 連続 $\Rightarrow$ $x(t)$ も連続
- $\sup_{t\in I} |f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))| \le \sup_{t\in I} L|x_n(t) - x(t)| \to 0$ より $\{f(t, x_n(t))\}$ は I 上で $f(t, x(t))$ に一様収束.

したがって，

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))\, d\tau$$

で $n \to \infty$ をとることができて，

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \qquad t \in I.$$

右辺は C^1-級 $\Rightarrow$ 微分すると，$x'(t) = f(t, x(t))$.

証明：ステップ 3

収束先の $x(t)$ は (P) の解である.

- $x_n \to x$ 一様収束，x_n 連続 $\Rightarrow$ $x(t)$ も連続
- $\sup_{t\in I} |f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))| \le \sup_{t\in I} L|x_n(t) - x(t)| \to 0$ より $\{f(t, x_n(t))\}$ は I 上で $f(t, x(t))$ に一様収束.

したがって,

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))\, d\tau$$

で $n \to \infty$ をとることができて,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \qquad t \in I.$$

右辺は C^1-級 $\Rightarrow$ 微分すると, $x'(t) = f(t, x(t))$.

証明：ステップ 3

収束先の $x(t)$ は (P) の解である.

- $x_n \to x$ 一様収束，x_n 連続 $\Rightarrow$ $x(t)$ も連続
- $\sup_{t\in I} |f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))| \le \sup_{t\in I} L|x_n(t) - x(t)| \to 0$ より $\{f(t, x_n(t))\}$ は I 上で $f(t, x(t))$ に一様収束.

したがって,

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))\, d\tau$$

で $n \to \infty$ をとることができて,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \qquad t \in I.$$

右辺は C^1-級 $\Rightarrow$ 微分すると，$x'(t) = f(t, x(t))$.

証明：ステップ 3

収束先の $x(t)$ は (P) の解である.

- $x_n \to x$ 一様収束，x_n 連続 $\Rightarrow$ $x(t)$ も連続
- $\sup_{t\in I} |f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))| \le \sup_{t\in I} L|x_n(t) - x(t)| \to 0$ より $\{f(t, x_n(t))\}$ は I 上で $f(t, x(t))$ に一様収束.

したがって,

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))\, d\tau$$

で $n \to \infty$ をとることができて,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \qquad t \in I.$$

右辺は C^1-級 $\Rightarrow$ 微分すると，$x'(t) = f(t, x(t))$.

証明：ステップ 3

収束先の $x(t)$ は (P) の解である.

- $x_n \to x$ 一様収束，x_n 連続 $\Rightarrow$ $x(t)$ も連続
- $\sup_{t\in I} |f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))| \le \sup_{t\in I} L|x_n(t) - x(t)| \to 0$ より $\{f(t, x_n(t))\}$ は I 上で $f(t, x(t))$ に一様収束.

したがって,

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))\, d\tau$$

で $n \to \infty$ をとることができて,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \qquad t \in I.$$

右辺は C^1-級 $\Rightarrow$ 微分すると， $x'(t) = f(t, x(t))$.

証明：ステップ 3

収束先の $x(t)$ は (P) の解である.

- $x_n \to x$ 一様収束，x_n 連続 $\Rightarrow$ $x(t)$ も連続
- $\sup_{t\in I} |f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))| \le \sup_{t\in I} L|x_n(t) - x(t)| \to 0$ より $\{f(t, x_n(t))\}$ は I 上で $f(t, x(t))$ に一様収束.

したがって,

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))\, d\tau$$

で $n \to \infty$ をとることができて,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \qquad t \in I.$$

右辺は C^1-級 $\Rightarrow$ 微分すると， $x'(t) = f(t, x(t))$.

証明：ステップ 3

収束先の $x(t)$ は (P) の解である.

- $x_n \to x$ 一様収束，x_n 連続 $\Rightarrow$ $x(t)$ も連続
- $\sup_{t\in I} |f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))| \le \sup_{t\in I} L|x_n(t) - x(t)| \to 0$ より $\{f(t, x_n(t))\}$ は I 上で $f(t, x(t))$ に一様収束.

したがって,

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))\, d\tau$$

で $n \to \infty$ をとることができて,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \qquad t \in I.$$

右辺は C^1-級 $\Rightarrow$ 微分すると， $x'(t) = f(t, x(t))$.

証明：ステップ 4

一意性を示すとき，Gronwall の補題を用いる．

Gronwall の補題

- $\varphi(t), \psi(t), w(t)$ が区間 $[a, b]$ で連続
- $\psi(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$
- $w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(\tau) w(\tau)\, d\tau \quad \forall t \in [a, b]$

ならば，次が成立する：

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(\tau)\varphi(\tau) e^{\int_\tau^t \psi(s)\, ds}\, d\tau \qquad \forall t \in [a, b].$$

証明：$v(t) := \int_a^t \psi(\tau) w(\tau)\, d\tau$ とおくと，$v'(t) = \psi(t) w(t)$.
不等式の両辺に $\psi(t) \geq 0$ をかけると，

$$\underbrace{w(t)\psi(t)}_{v'(t)} \leq \varphi(t)\psi(t) + v(t)\psi(t)$$

証明：ステップ 4

一意性を示すとき，Gronwall の補題を用いる．

Gronwall の補題

- $\varphi(t), \psi(t), w(t)$ が区間 $[a, b]$ で連続
- $\psi(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$
- $w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(\tau) w(\tau)\, d\tau \quad \forall t \in [a, b]$

ならば，次が成立する：

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(\tau)\varphi(\tau) e^{\int_\tau^t \psi(s)\, ds}\, d\tau \qquad \forall t \in [a, b].$$

証明：$v(t) = \int_a^t \psi(\tau) w(\tau)\, d\tau$ とおくと，$v'(t) = \psi(t) w(t)$.
不等式の両辺に $\psi(t) \geq 0$ をかけると，

$$\underbrace{w(t)\psi(t)}_{v'(t)} \leq \varphi(t)\psi(t) + v(t)\psi(t)$$

証明：ステップ 4

一意性を示すとき，Gronwall の補題を用いる．

Gronwall の補題

- $\varphi(t), \psi(t), w(t)$ が区間 $[a, b]$ で連続
- $\psi(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$
- $w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(\tau) w(\tau)\, d\tau \quad \forall t \in [a, b]$

ならば，次が成立する：

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(\tau)\varphi(\tau) e^{\int_\tau^t \psi(s)\, ds}\, d\tau \qquad \forall t \in [a, b].$$

証明：$v(t) = \int_a^t \psi(\tau) w(\tau)\, d\tau$ とおくと，$v'(t) = \psi(t) w(t)$.
不等式の両辺に $\psi(t) \geq 0$ をかけると，

$$\underbrace{w(t)\psi(t)}_{v'(t)} \leq \varphi(t)\psi(t) + v(t)\psi(t)$$

証明：ステップ 4

一意性を示すとき，Gronwall の補題を用いる．

Gronwall の補題

- $\varphi(t), \psi(t), w(t)$ が区間 $[a, b]$ で連続
- $\psi(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$
- $w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(\tau) w(\tau)\, d\tau \quad \forall t \in [a, b]$

ならば，次が成立する：

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(\tau)\varphi(\tau) e^{\int_\tau^t \psi(s)\, ds}\, d\tau \qquad \forall t \in [a, b].$$

証明：$v(t) = \int_a^t \psi(\tau) w(\tau)\, d\tau$ とおくと，$v'(t) = \psi(t) w(t)$.
不等式の両辺に $\psi(t) \geq 0$ をかけると，

$$\underbrace{w(t)\psi(t)}_{v'(t)} \leq \varphi(t)\psi(t) + v(t)\psi(t)$$

証明：ステップ 4

一意性を示すとき，Gronwall の補題を用いる．

Gronwall の補題

- $\varphi(t), \psi(t), w(t)$ が区間 $[a, b]$ で連続
- $\psi(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$
- $w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(\tau) w(\tau)\, d\tau \quad \forall t \in [a, b]$

ならば，次が成立する：

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(\tau)\varphi(\tau) e^{\int_\tau^t \psi(s)\, ds}\, d\tau \qquad \forall t \in [a, b].$$

証明：$v(t) = \int_a^t \psi(\tau) w(\tau)\, d\tau$ とおくと，$v'(t) = \psi(t) w(t)$.
不等式の両辺に $\psi(t) \geq 0$ をかけると，

$$\underbrace{w(t)\psi(t)}_{v'(t)} \leq \varphi(t)\psi(t) + v(t)\psi(t)$$

証明：ステップ 4

一意性を示すとき，Gronwall の補題を用いる．

Gronwall の補題

- $\varphi(t), \psi(t), w(t)$ が区間 $[a, b]$ で連続
- $\psi(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$
- $w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(\tau) w(\tau)\, d\tau \quad \forall t \in [a, b]$

ならば，次が成立する：

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(\tau)\varphi(\tau) e^{\int_\tau^t \psi(s)\, ds}\, d\tau \qquad \forall t \in [a, b].$$

証明：$v(t) = \int_a^t \psi(\tau) w(\tau)\, d\tau$ とおくと，$v'(t) = \psi(t) w(t)$.

不等式の両辺に $\psi(t) \geq 0$ をかけると，

$$\underbrace{w(t)\psi(t)}_{v'(t)} \leq \varphi(t)\psi(t) + v(t)\psi(t)$$

証明：ステップ 4

一意性を示すとき，Gronwall の補題を用いる．

Gronwall の補題

- $\varphi(t), \psi(t), w(t)$ が区間 $[a, b]$ で連続
- $\psi(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$
- $w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(\tau) w(\tau)\, d\tau \quad \forall t \in [a, b]$

ならば，次が成立する：

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(\tau)\varphi(\tau) e^{\int_\tau^t \psi(s)\, ds}\, d\tau \qquad \forall t \in [a, b].$$

証明：$v(t) = \int_a^t \psi(\tau) w(\tau)\, d\tau$ とおくと，$v'(t) = \psi(t) w(t)$.
不等式の両辺に $\psi(t) \geq 0$ をかけると，

$$\underbrace{w(t)\psi(t)}_{v'(t)} \leq \varphi(t)\psi(t) + v(t)\psi(t)$$

証明：ステップ 4

（Gronwall 補題の証明の続き）

$$v'(t) \leq \varphi(t)\psi(t) + v(t)\psi(t)$$

$$\underbrace{(v'(t) - v(t)\psi(t))e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds}}_{\frac{d}{dt}\left(v(t)e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds}\right)} \leq \varphi(t)\psi(t)e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds}$$

積分して（$v(a) = 0$），

$$v(t)e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds} \leq \int_a^t \varphi(\tau)\psi(\tau)e^{-\int_a^\tau \psi(s)\,ds}\,d\tau$$

$$v(t) \leq \int_a^t \varphi(\tau)\psi(\tau)e^{\int_\tau^t \psi(s)\,ds}\,d\tau$$

元の不等式に代入すれば，示せた．

証明：ステップ 4

（Gronwall 補題の証明の続き）

$$v'(t) \leq \varphi(t)\psi(t) + v(t)\psi(t)$$

$$\underbrace{(v'(t) - v(t)\psi(t))e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds}}_{\frac{d}{dt}\left(v(t)e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds}\right)} \leq \varphi(t)\psi(t)e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds}$$

積分して（$v(a) = 0$），

$$v(t)e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds} \leq \int_a^t \varphi(\tau)\psi(\tau)e^{-\int_a^\tau \psi(s)\,ds}\,d\tau$$

$$v(t) \leq \int_a^t \varphi(\tau)\psi(\tau)e^{\int_\tau^t \psi(s)\,ds}\,d\tau$$

元の不等式に代入すれば，示せた．

証明：ステップ 4

（Gronwall 補題の証明の続き）

$$v'(t) \leq \varphi(t)\psi(t) + v(t)\psi(t)$$

$$\underbrace{(v'(t) - v(t)\psi(t))e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds}}_{\frac{d}{dt}\left(v(t)e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds}\right)} \leq \varphi(t)\psi(t)e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds}$$

積分して（$v(a) = 0$），

$$\begin{aligned} v(t)e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds} &\leq \int_a^t \varphi(\tau)\psi(\tau)e^{-\int_a^\tau \psi(s)\,ds}\,d\tau \\ v(t) &\leq \int_a^t \varphi(\tau)\psi(\tau)e^{\int_\tau^t \psi(s)\,ds}\,d\tau \end{aligned}$$

元の不等式に代入すれば，示せた．

証明：ステップ 4

（Gronwall 補題の証明の続き）

$$v'(t) \leq \varphi(t)\psi(t) + v(t)\psi(t)$$

$$\underbrace{(v'(t) - v(t)\psi(t))e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds}}_{\frac{d}{dt}\left(v(t)e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds}\right)} \leq \varphi(t)\psi(t)e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds}$$

積分して（$v(a) = 0$），

$$\begin{aligned} v(t)e^{-\int_a^t \psi(s)\,ds} &\leq \int_a^t \varphi(\tau)\psi(\tau)e^{-\int_a^\tau \psi(s)\,ds}\,d\tau \\ v(t) &\leq \int_a^t \varphi(\tau)\psi(\tau)e^{\int_\tau^t \psi(s)\,ds}\,d\tau \end{aligned}$$

元の不等式に代入すれば，示せた．

証明：ステップ 4（一意性）

二つの解 $x(t), y(t)$ があるとする.

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau \qquad t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

$$\text{差} \quad |x(t) - y(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau)))\, d\tau \right|$$

$$\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau \right|$$

- $t > t_0$ のとき，Gronwall の補題で
  $\varphi(t) = 0, \psi(t) = L, w(t) = |x(t) - y(t)|, a = t_0$ とすれば,

$$|x(t) - y(t)| \leq \int_{t_0}^{t} 0\, d\tau = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = y(t), \quad t > t_0.$$

証明：ステップ 4（一意性）

二つの解 $x(t), y(t)$ があるとする.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \\ y(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau \qquad t \in [t_0, t_0 + \delta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{差} \quad |x(t) - y(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau)))\, d\tau \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau \right| \end{aligned}$$

- $t > t_0$ のとき，Gronwall の補題で
  $\varphi(t) = 0, \psi(t) = L, w(t) = |x(t) - y(t)|, a = t_0$ とすれば,

$$|x(t) - y(t)| \leq \int_{t_0}^{t} 0\, d\tau = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = y(t), \quad t > t_0.$$

証明：ステップ 4（一意性）

二つの解 $x(t), y(t)$ があるとする.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \\
y(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau \qquad t \in [t_0, t_0 + \delta]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{差} \quad |x(t) - y(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau)))\, d\tau \right| \\
&\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau \right|
\end{aligned}
$$

- $t > t_0$ のとき，Gronwall の補題で
  $\varphi(t) = 0, \psi(t) = L, w(t) = |x(t) - y(t)|, a = t_0$ とすれば,

$$
|x(t) - y(t)| \leq \int_{t_0}^{t} 0\, d\tau = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = y(t), \quad t > t_0.
$$

証明：ステップ 4（一意性）

二つの解 $x(t), y(t)$ があるとする.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \\ y(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau \qquad t \in [t_0, t_0 + \delta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{差} \quad |x(t) - y(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau)))\, d\tau \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau \right| \end{aligned}$$

- $t > t_0$ のとき，Gronwall の補題で
  $\varphi(t) = 0, \psi(t) = L, w(t) = |x(t) - y(t)|, a = t_0$ とすれば,

$$|x(t) - y(t)| \leq \int_{t_0}^{t} 0\, d\tau = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = y(t), \quad t > t_0.$$

証明：ステップ 4（一意性）

二つの解 $x(t), y(t)$ があるとする.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \\
y(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau \qquad t \in [t_0, t_0 + \delta]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{差} \quad |x(t) - y(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau)))\ d\tau \right| \\
&\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau \right|
\end{aligned}
$$

- $t > t_0$ のとき，Gronwall の補題で
  $\varphi(t) = 0, \psi(t) = L, w(t) = |x(t) - y(t)|, a = t_0$ とすれば,

$$
|x(t) - y(t)| \leq \int_{t_0}^{t} 0\, d\tau = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = y(t), \quad t > t_0.
$$

証明：ステップ 4（一意性）

二つの解 $x(t), y(t)$ があるとする.

$$|x(t) - y(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |x(\tau) - y(\tau)| \, d\tau \right|$$

- $t < t_0$ のとき，$\widetilde{x}(t) = x(2t_0 - t), \widetilde{f}(t, x) = -f(2t_0 - t, x)$ とおくと，

$$\begin{cases} \frac{d\widetilde{x}}{dt} & = \widetilde{f}(t, \widetilde{x}) \\ \widetilde{x}(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

が成立する.
この問題に対して $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ で解の一意性を上と同じように示す.
$\Rightarrow$ $x(t)$ は $t \in [t_0 - \delta, t_0]$ で一意.

証明：ステップ 4（一意性）

二つの解 $x(t), y(t)$ があるとする.

$$|x(t) - y(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |x(\tau) - y(\tau)| \, d\tau \right|$$

- $t < t_0$ のとき，$\widetilde{x}(t) = x(2t_0 - t), \widetilde{f}(t, x) = -f(2t_0 - t, x)$ とおくと，

$$\begin{cases} \frac{d\widetilde{x}}{dt} & = \widetilde{f}(t, \widetilde{x}) \\ \widetilde{x}(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

が成立する.

この問題に対して $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ で解の一意性を上と同じように示す.

$\Rightarrow$ $x(t)$ は $t \in [t_0 - \delta, t_0]$ で一意.

証明：ステップ 4（一意性）

二つの解 $x(t), y(t)$ があるとする.

$$|x(t) - y(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |x(\tau) - y(\tau)| \, d\tau \right|$$

- $t < t_0$ のとき，$\widetilde{x}(t) = x(2t_0 - t), \widetilde{f}(t, x) = -f(2t_0 - t, x)$ とおくと，

$$\begin{cases} \frac{d\widetilde{x}}{dt} & = \widetilde{f}(t, \widetilde{x}) \\ \widetilde{x}(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

  が成立する.
  この問題に対して $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ で解の一意性を上と同じように示す.
  $\Rightarrow$ $x(t)$ は $t \in [t_0 - \delta, t_0]$ で一意.

微分積分学続論 II： 第 12 回

Karel Svadlenka

2020 年 7 月 1 日

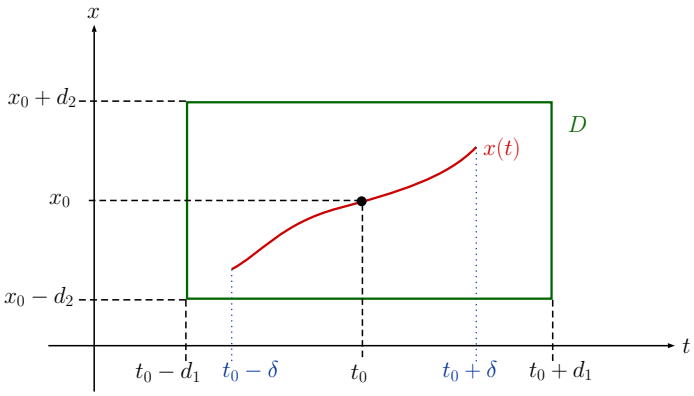
■コーシーの定理

コーシーの定理（**1** 変数版）

$D = [t_0 - d_1, t_0 + d_1] \times [x_0 - d_2, x_0 + d_2]$ において $f(t,x)$ は連続で， x についてリプシッツ条件を満たすならば，$\delta > 0$ があって （具体的には $\delta = \min\{d_1, \frac{d_2}{M}\}$, $M = \max_D |f|$），初期値問題

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

は $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ で解がただ一つ存在する．



■コーシーの定理：ベクトル版

コーシーの定理（多変数版）

$D = [t_0 - d_1, t_0 + d_1] \times \Omega$（$\Omega$ は開集合）において $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) : D \to \mathbb{R}^n$ は連続で，$\boldsymbol{x}$ についてリプシッツ条件を満たすとする：

$$\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_2)\| \le L\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\| \qquad \forall (t,\boldsymbol{x}_1), (t,\boldsymbol{x}_2) \in D.$$

このとき，$(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in D^\circ$ に対して $\delta > 0$ があって，初期値問題

$$\text{(PV)} \qquad \begin{cases} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

の解は $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ においてただ一つ存在する．

証明は，$|\cdot|$ をノルム $\|\cdot\|$ で置き換えるだけで，そのまま正しい．

■コーシーの定理：ベクトル版

$$\text{(PV)} \quad \begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \text{＋初期条件} \end{cases}$$

という形だから， 高階方程式にも使える．

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$$

を 1 階化すれば，

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_n' = f(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

となるから．

■コーシーの定理：線型方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

で $A(t), \boldsymbol{b}(t)$ がある区間 I で連続ならば，解 $\boldsymbol{x}(t)$ は区間 I で一意的に存在する，という定理を紹介した．

コーシーの定理より局所的な存在が言える： $f(t, \boldsymbol{x}) = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ とおくと，

- f は $I \times \mathbb{R}^n$ で連続
- リプシッツ条件：任意の $(t, \boldsymbol{x}_1), (t, \boldsymbol{x}_2) \in I \times \mathbb{R}^n$ について，

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2)\| = \|A(t)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\| \leq \max_{t \in I} \|A(t)\| \, \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|$$

$L = \max_{t \in I} \|A(t)\|$ とおけばよい．

よって，どの $t \in I$ をとっても，その近傍 $[t - \delta_t, t + \delta_t]$ で解がただ一つ存在する．区間 I 全体に対して言うには，解を延長する必要がある．

■コーシーの定理：正則性

$f \in C^m(D)$ ならば，解は $x \in C^{m+1}(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ である．

実際，

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

数学的帰納法：

- $f(t, x), x(t)$ 連続 $\Rightarrow$ $f(t, x(t))$ 連続 $\Rightarrow$ $x \in C^1$
- $x(t)$ が C^k-級（$k \leq m$）ならば，$f \in C^k$ より $f(t, x(t)) \in C^k \quad \Rightarrow \; x \in C^{k+1}$

とくに，$f \in C^\infty$ ならば，$x \in C^\infty$．

■より一般的な存在定理

- ペアノの定理
- Carathéodory の定理

■ペアノの定理

Peano の定理

$f(t, x)$ が D において連続ならば，(P) の解 $x(t) : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ が存在するような $\delta > 0$ がある．

注：一意性は成り立たない（例えば，$f(t,x)=\sqrt{|x|}$）.

■Carathéodory の定理

目標：さらに弱い仮定で解の存在を言う.

ただし，連続性を外すと，解 $x(t)$ は C^1-級でなくなるので，解の概念を広げる必要がある． そこで，解 $x(t)$ に対して，絶対連続性を要求する：

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta>0\ \text{ so that }\quad \sum_{k=1}^{n}(t_k-s_k)<\delta\ \ \Rightarrow\ \ \sum_{k=1}^{n}|x(t_k)-x(s_k)|<\varepsilon.$$

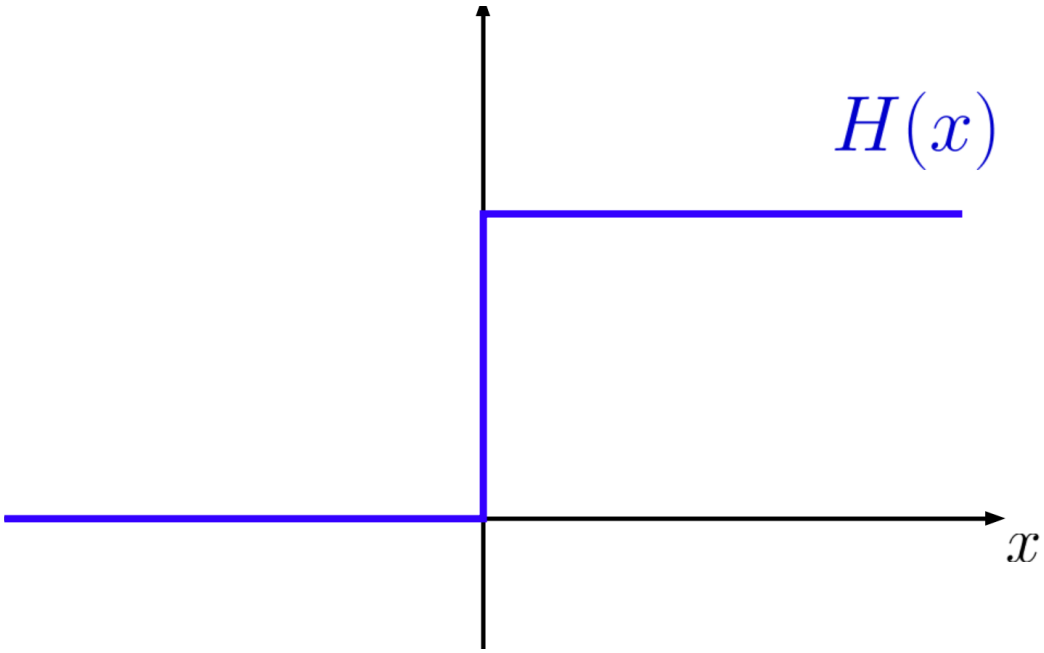
そうすると，$x'(t)$ はほとんどすべての t に対して存在し，$x'(t)$ が存在する t で微分方程式を満たすものを解とする.

注：C^1 $\Rightarrow$ リプシッツ $\Rightarrow$ 絶対連続 $\Rightarrow$ 有界変動 $\Rightarrow$ a.e. 微分可能

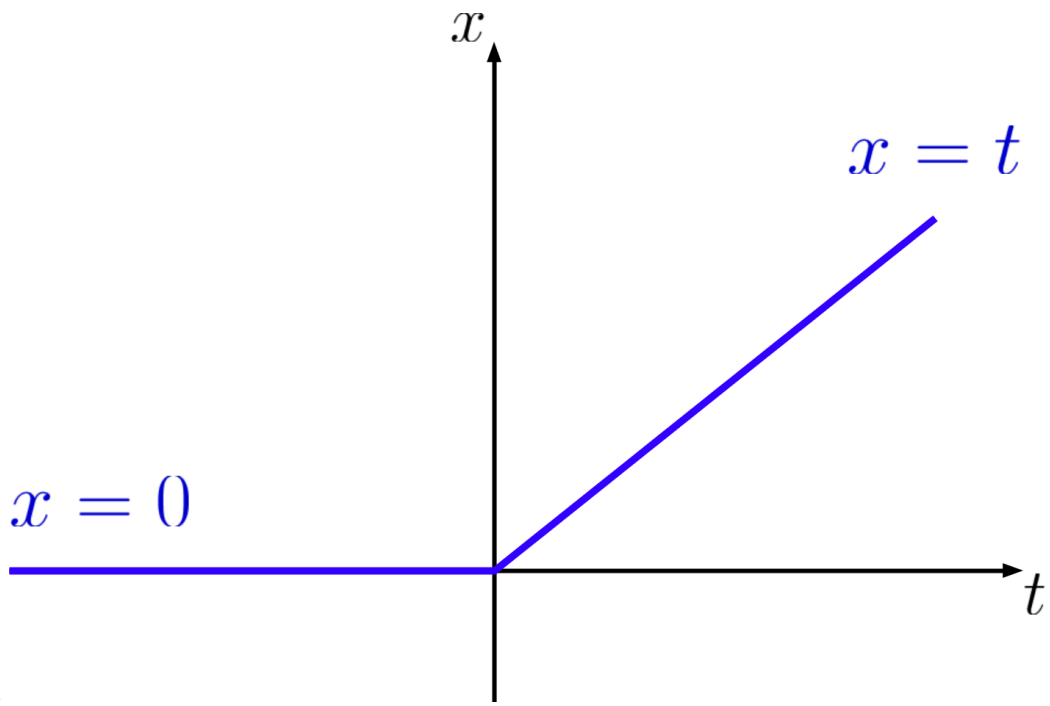
■Carathéodory の定理

例：Heaviside 関数

$$H(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ 1, & t>0\end{cases}$$



$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=H(t)\\ x(0)=0\end{cases}$$



解は $t = 0$ で微分できない

■Carathéodory の定理

Carathéodory の定理

- $f(t,x)$ は（固定した t に対して）x について連続
- $f(t,x)$ は（固定した x に対して）t について可測
- $|f(t,x)| \leq m(t)\ \ \forall (t,x) \in D,\ \int_{t_0-d_1}^{t_0+d_1} |m(t)|\,dt < \infty$ を満たす $m(t)$ がある．

という条件が満たされるならば，広義解はある区間 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ において存在する．

注：f が可測とは，任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\{f > \alpha\}$ が可測集合であるという意味である．

■一意性が成り立たない例

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$f(t,x) = \sqrt{|x|}$ はリプシッツ条件をみたさないが， それは解の存在と一意性について何も教えてくれない．

変数分離で解く：

$$x \neq 0 \text{ のとき} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = \int dt$$

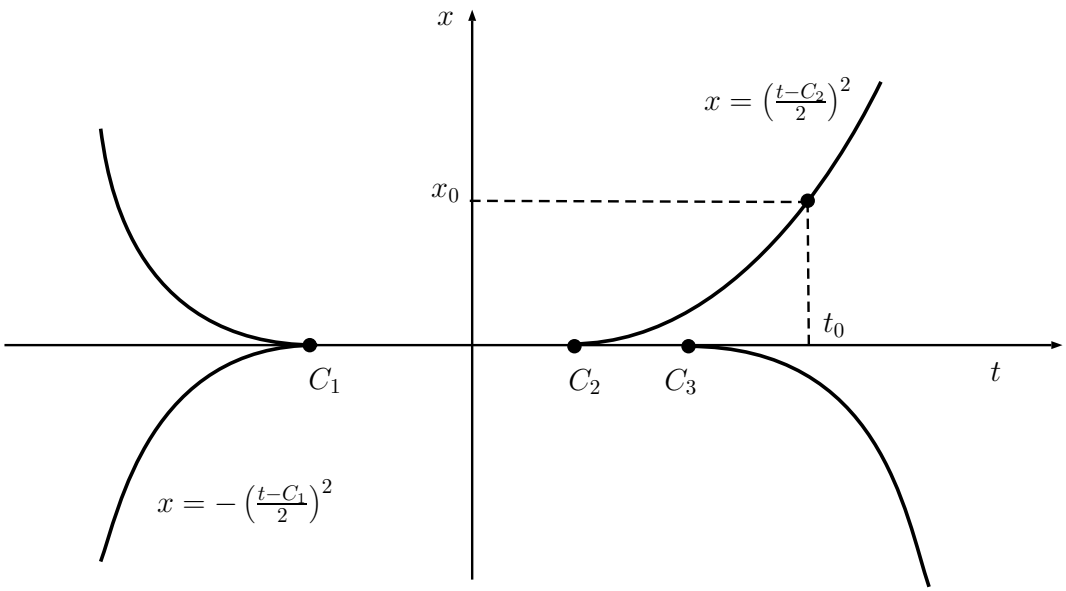
$$x > 0 \text{ のとき} \qquad 2\sqrt{x} = t + C$$

$$x(t) = \left(\frac{t+C}{2}\right)^2, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$x < 0 \text{ のとき} \qquad x(t) = -\left(\frac{t+C}{2}\right)^2$$

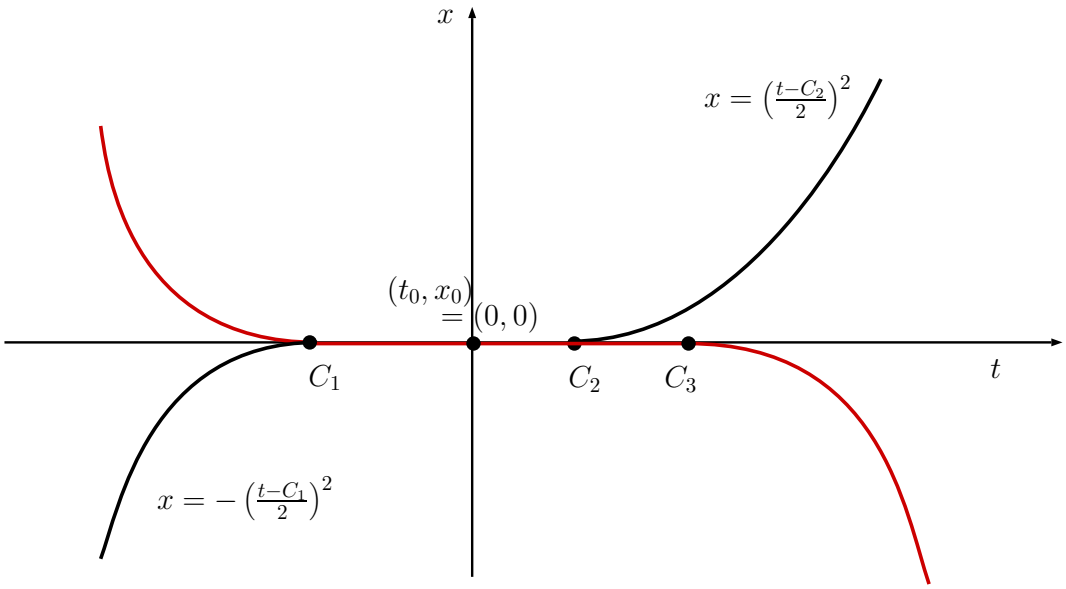
$x(t) \equiv 0$ も解．

■一意性が成り立たない例

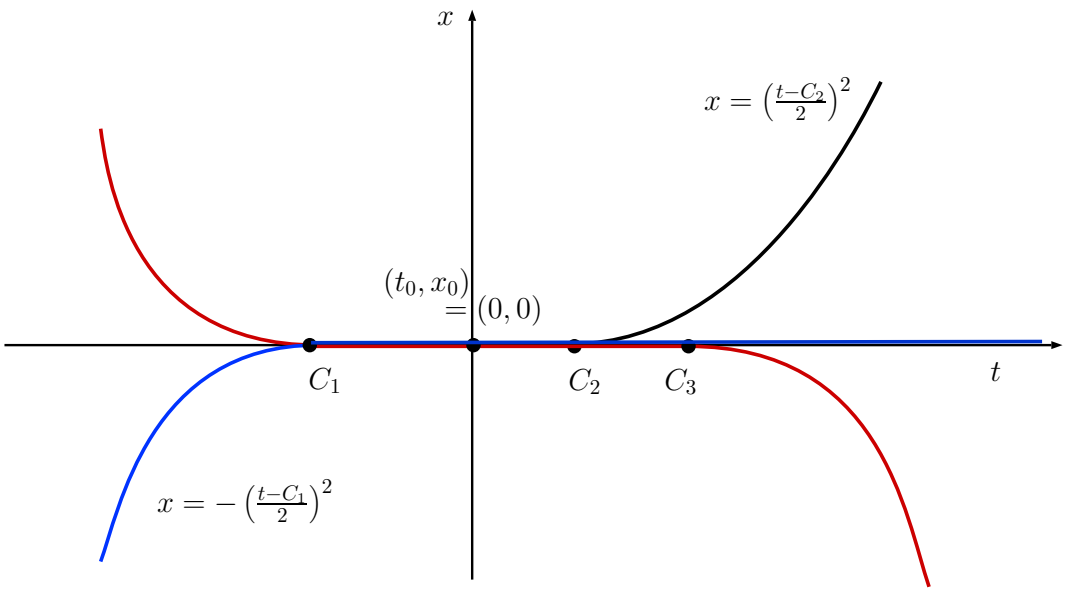


つなげることで無限個の解が得られる.

■一意性が成り立たない例

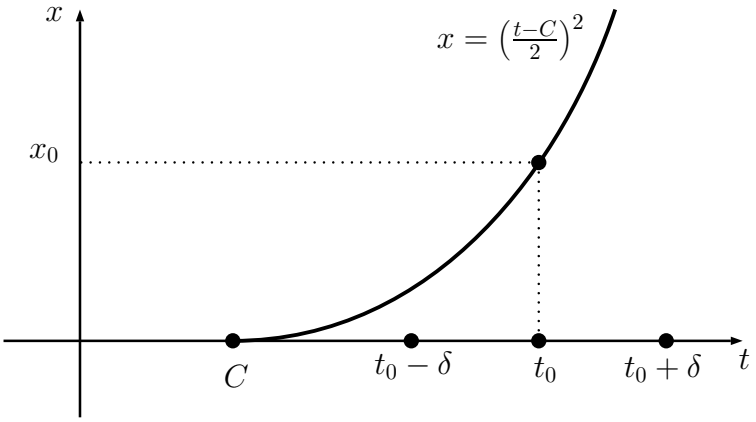


■一意性が成り立たない例



■一意性が成り立たない例

t-軸を含まない領域では，$f(t,x) = \sqrt{|x|}$ はリプシッツ条件をみたすので，$x(t_0) = x_0,\ x_0 \neq 0$ の初期条件をみたす解が一意的に存在するような区間 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ がある．



$t_0 - \delta = C$ より左に拡張できない．

■一意性

リプシッツ条件は一意性のための必要条件ではない．

一意性のためのより一般的な条件：

Osgood の条件

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq \varphi(|x_1 - x_2|) \qquad \forall (t,x_1), (t,x_2) \in D,$$

ただし，$\varphi(r)$ は $r > 0$ で連続，$\displaystyle\int_0^R \frac{1}{\varphi(r)}\, dr = \infty$ を満たす

注：南雲・岡村の結果

■一意性に関する例

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \qquad \text{ただし，} \quad f(x) = \begin{cases} -x \log|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

f は

- $x \neq 0$ ではリプシッツ条件を満たす（任意の D で）
- $x = 0$ で連続だが，この近傍でリプシッツ条件を満たさない（$x_1 = x, x_2 = 0$ とする）：

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{|x| \left|\log |x|\right|}{|x|} = \left|\log |x|\right| \to \infty \quad \text{as } x \to 0.$$

一方では，Osgood の条件を満たす：$x_2 = 0$ として，$\varphi(r) = r \log r$, $r > 0$ とすると，

$$\int_0^R \frac{1}{r \log r}\, dr = \log(|\log r|)\Big|_{r=0}^{R} = +\infty.$$

■一意性に関する例

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \qquad \text{ただし，} \quad f(x) = \begin{cases} -x \log |x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

変数分離で解く：

$$-\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x \log |x|} = \int_{t_0}^{t} dt$$

$$-\left(\log \left|\log |x|\right| - \log \left|\log |x_0|\right|\right) = t - t_0$$

$$\log \left|\frac{\log |x|}{\log |x_0|}\right| = -(t - t_0)$$

$$\left|\log |x|\right| = \left|\log |x_0|\right| e^{-(t-t_0)}$$

$$x(t) = \pm |x_0|^{e^{-(t-t_0)}}$$

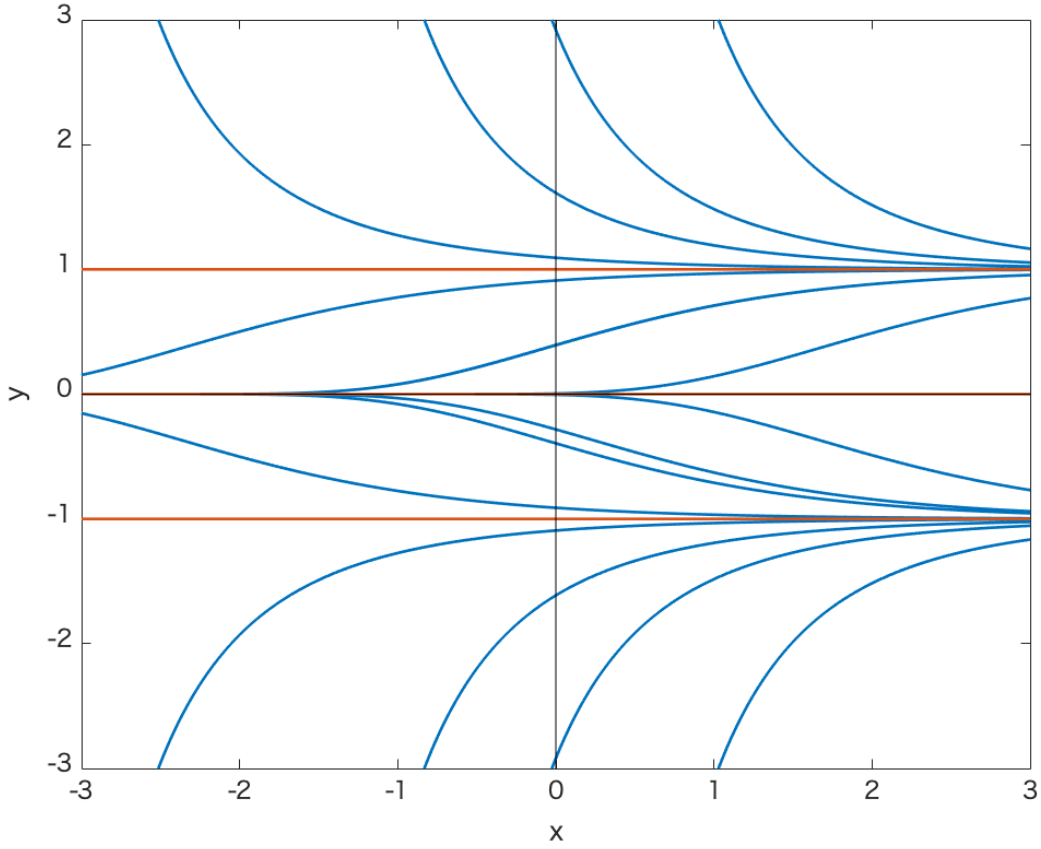
■一意性に関する例

$$x(t) = \pm |x_0|^{e^{-(t-t_0)}}$$

- $x_0 \in (0, 1)$ のとき：
$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t \to -\infty} x(t) = 0$$
- $x_0 \in (1, \infty)$ のとき：
$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t \to -\infty} x(t) = +\infty$$
- $x_0 = 1$ のとき：$x(t) = 1$
- $x_0 = 0$ のとき：$x(t) = 0$
- $x_0 < 0$ のとき，t-軸に対して対称

■一意性に関する例

$$x(t) = \pm |x_0|^{e^{-(t-t_0)}}$$



どの (t_0, x_0) でも解の存在と一意性が成立

- $x_0 \in (0,1)$ のとき：
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$$
- $x_0 \in (1,\infty)$ のとき：
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t\to-\infty} x(t) = +\infty$$
- $x_0 = 1$ のとき：$x(t) = 1$
- $x_0 = 0$ のとき：$x(t) = 0$
- $x_0 < 0$ のとき，t-軸に対して対称

微分積分学続論 II： 第 12 回

Karel Svadlenka

京都大学大学院理学研究科 数学教室

2020 年 7 月 1 日

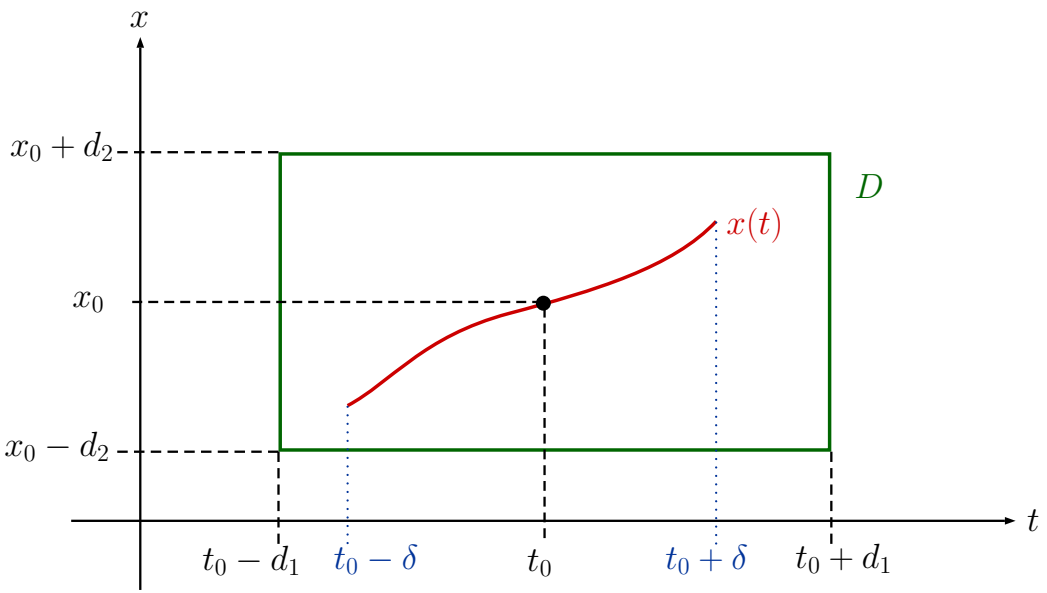
コーシーの定理

コーシーの定理（1 変数版）

$D = [t_0 - d_1, t_0 + d_1] \times [x_0 - d_2, x_0 + d_2]$ において $f(t, x)$ は連続で，x についてリプシッツ条件を満たすならば，$\delta > 0$ があって（具体的には $\delta = \min\{d_1, \frac{d_2}{M}\}$, $M = \max_D |f|$），初期値問題

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

は $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ で解がただ一つ存在する．



コーシーの定理：ベクトル版

コーシーの定理（多変数版）

$D = [t_0 - d_1, t_0 + d_1] \times \Omega$（$\Omega$ は開集合）において $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) : D \to \mathbb{R}^n$ は連続で，$\boldsymbol{x}$ についてリプシッツ条件を満たすとする：

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2)\| \leq L\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\| \qquad \forall (t, \boldsymbol{x}_1), (t, \boldsymbol{x}_2) \in D.$$

このとき，$(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in D^\circ$ に対して $\delta > 0$ があって，初期値問題

$$\text{(PV)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

の解は $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ においてただ一つ存在する．

証明は，$|\cdot|$ をノルム $\|\cdot\|$ で置き換えるだけで，そのまま正しい．

コーシーの定理：ベクトル版

コーシーの定理（多変数版）

$D = [t_0 - d_1, t_0 + d_1] \times \Omega$（$\Omega$ は開集合）において $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) : D \to \mathbb{R}^n$ は連続で，$\boldsymbol{x}$ についてリプシッツ条件を満たすとする：

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2)\| \leq L\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\| \qquad \forall (t, \boldsymbol{x}_1), (t, \boldsymbol{x}_2) \in D.$$

このとき，$(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in D^\circ$ に対して $\delta > 0$ があって，初期値問題

$$\text{(PV)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

の解は $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ においてただ一つ存在する.

証明は，$|\cdot|$ をノルム $\|\cdot\|$ で置き換えるだけで，そのまま正しい.

コーシーの定理：ベクトル版

$$\text{(PV)} \quad \begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \text{＋初期条件} \end{cases}$$

という形だから，
高階方程式にも使える．

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$$

を 1 階化すれば，

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_n' = f(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

となるから．

コーシーの定理：ベクトル版

$$\text{(PV)} \quad \begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \text{＋初期条件} \end{cases}$$

という形だから，
高階方程式にも使える．

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$$

を 1 階化すれば，

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_n' = f(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

となるから．

コーシーの定理：ベクトル版

$$\text{(PV)} \quad \begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \text{＋初期条件} \end{cases}$$

という形だから，
高階方程式にも使える．

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$$

を 1 階化すれば，

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_n' = f(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

となるから．

コーシーの定理：線型方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

で $A(t), \boldsymbol{b}(t)$ がある区間 I で連続ならば，解 $\boldsymbol{x}(t)$ は区間 I で一意的に存在する，という定理を紹介した.

コーシーの定理より局所的な存在が言える：

$f(t, \boldsymbol{x}) = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ とおくと，

- f は $I \times \mathbb{R}^n$ で連続
- リプシッツ条件：任意の $(t, \boldsymbol{x}_1), (t, \boldsymbol{x}_2) \in I \times \mathbb{R}^n$ について，

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2)\| = \|A(t)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\| \leq \max_{t \in I} \|A(t)\| \, \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|$$

$L = \max_{t \in I} \|A(t)\|$ とおけばよい.

よって，どの $t \in I$ をとっても，その近傍 $[t - \delta_t, t + \delta_t]$ で解がただ一つ存在する．区間 I 全体に対して言うには，解を延長する必要がある.

コーシーの定理：線型方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

で $A(t), \boldsymbol{b}(t)$ がある区間 I で連続ならば，解 $\boldsymbol{x}(t)$ は区間 I で一意的に存在する，という定理を紹介した.

コーシーの定理より局所的な存在が言える：

$f(t, \boldsymbol{x}) = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ とおくと，

- f は $I \times \mathbb{R}^n$ で連続
- リプシッツ条件：任意の $(t, \boldsymbol{x}_1), (t, \boldsymbol{x}_2) \in I \times \mathbb{R}^n$ について，

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2)\| = \|A(t)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\| \leq \max_{t \in I} \|A(t)\| \, \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|$$

$L = \max_{t \in I} \|A(t)\|$ とおけばよい.

よって，どの $t \in I$ をとっても，その近傍 $[t - \delta_t, t + \delta_t]$ で解がただ一つ存在する．区間 I 全体に対して言うには，解を延長する必要がある.

コーシーの定理：線型方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

で $A(t), \boldsymbol{b}(t)$ がある区間 I で連続ならば，解 $\boldsymbol{x}(t)$ は区間 I で一意的に存在する，という定理を紹介した.
コーシーの定理より局所的な存在が言える：
$f(t, \boldsymbol{x}) = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ とおくと，

- f は $I \times \mathbb{R}^n$ で連続
- リプシッツ条件：任意の $(t, \boldsymbol{x}_1), (t, \boldsymbol{x}_2) \in I \times \mathbb{R}^n$ について，

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2)\| = \|A(t)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\| \leq \max_{t \in I} \|A(t)\| \, \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|$$

$L = \max_{t \in I} \|A(t)\|$ とおけばよい.

よって，どの $t \in I$ をとっても，その近傍 $[t - \delta_t, t + \delta_t]$ で解がただ一つ存在する．区間 I 全体に対して言うには，解を延長する必要がある.

コーシーの定理：線型方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

で $A(t), \boldsymbol{b}(t)$ がある区間 I で連続ならば，解 $\boldsymbol{x}(t)$ は区間 I で一意的に存在する，という定理を紹介した.
コーシーの定理より局所的な存在が言える：
$f(t, \boldsymbol{x}) = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ とおくと，

- f は $I \times \mathbb{R}^n$ で連続
- リプシッツ条件：任意の $(t, \boldsymbol{x}_1), (t, \boldsymbol{x}_2) \in I \times \mathbb{R}^n$ について，

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2)\| = \|A(t)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\| \leq \max_{t \in I} \|A(t)\| \, \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|$$

$L = \max_{t \in I} \|A(t)\|$ とおけばよい.

よって，どの $t \in I$ をとっても，その近傍 $[t - \delta_t, t + \delta_t]$ で解がただ一つ存在する．区間 I 全体に対して言うには，解を延長する必要がある.

コーシーの定理：線型方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

で $A(t), \boldsymbol{b}(t)$ がある区間 I で連続ならば，解 $\boldsymbol{x}(t)$ は区間 I で一意的に存在する，という定理を紹介した.
コーシーの定理より局所的な存在が言える：
$f(t, \boldsymbol{x}) = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ とおくと，

- f は $I \times \mathbb{R}^n$ で連続
- リプシッツ条件：任意の $(t, \boldsymbol{x}_1), (t, \boldsymbol{x}_2) \in I \times \mathbb{R}^n$ について，

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2)\| = \|A(t)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\| \leq \max_{t \in I} \|A(t)\| \, \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|$$

$L = \max_{t \in I} \|A(t)\|$ とおけばよい.

よって，どの $t \in I$ をとっても，その近傍 $[t - \delta_t, t + \delta_t]$ で解がただ一つ存在する. 区間 I 全体に対して言うには，解を延長する必要がある.

コーシーの定理：線型方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

で $A(t), \boldsymbol{b}(t)$ がある区間 I で連続ならば，解 $\boldsymbol{x}(t)$ は区間 I で一意的に存在する，という定理を紹介した.
コーシーの定理より局所的な存在が言える：
$f(t, \boldsymbol{x}) = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ とおくと，

- f は $I \times \mathbb{R}^n$ で連続
- リプシッツ条件：任意の $(t, \boldsymbol{x}_1), (t, \boldsymbol{x}_2) \in I \times \mathbb{R}^n$ について，

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2)\| = \|A(t)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\| \leq \max_{t \in I} \|A(t)\| \, \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|$$

$L = \max_{t \in I} \|A(t)\|$ とおけばよい.

よって，どの $t \in I$ をとっても，その近傍 $[t - \delta_t, t + \delta_t]$ で解がただ一つ存在する．区間 I 全体に対して言うには，解を延長する必要がある.

コーシーの定理：正則性

$f \in C^m(D)$ ならば，解は $x \in C^{m+1}(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ である．

実際，

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

数学的帰納法：

- $f(t,x), x(t)$ 連続 $\Rightarrow$ $f(t, x(t))$ 連続 $\Rightarrow$ $x \in C^1$
- $x(t)$ が C^k-級（$k \leq m$）ならば，$f \in C^k$ より $f(t, x(t)) \in C^k$
  $\Rightarrow$ $x \in C^{k+1}$

とくに，$f \in C^\infty$ ならば，$x \in C^\infty$.

コーシーの定理：正則性

$f \in C^m(D)$ ならば，解は $x \in C^{m+1}(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ である．

実際，

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

数学的帰納法：

- $f(t,x), x(t)$ 連続 $\Rightarrow$ $f(t, x(t))$ 連続 $\Rightarrow$ $x \in C^1$
- $x(t)$ が C^k-級（$k \leq m$）ならば，$f \in C^k$ より $f(t, x(t)) \in C^k$ $\Rightarrow$ $x \in C^{k+1}$

とくに，$f \in C^\infty$ ならば，$x \in C^\infty$.

コーシーの定理：正則性

$f \in C^m(D)$ ならば，解は $x \in C^{m+1}(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ である．

実際，

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

数学的帰納法：

- $f(t,x), x(t)$ 連続 $\Rightarrow$ $f(t, x(t))$ 連続 $\Rightarrow$ $x \in C^1$
- $x(t)$ が C^k-級（$k \leq m$）ならば，$f \in C^k$ より $f(t, x(t)) \in C^k$ $\Rightarrow$ $x \in C^{k+1}$

とくに，$f \in C^\infty$ ならば，$x \in C^\infty$.

コーシーの定理：正則性

$f \in C^m(D)$ ならば，解は $x \in C^{m+1}(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ である．

実際，

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

数学的帰納法：

- $f(t,x), x(t)$ 連続 $\Rightarrow$ $f(t, x(t))$ 連続 $\Rightarrow$ $x \in C^1$
- $x(t)$ が C^k-級（$k \leq m$）ならば，$f \in C^k$ より $f(t, x(t)) \in C^k$ $\Rightarrow$ $x \in C^{k+1}$

とくに，$f \in C^\infty$ ならば，$x \in C^\infty$.

より一般的な存在定理

- ペアノの定理
- Carathéodory の定理

ペアノの定理

Peano の定理

$f(t,x)$ が D において連続ならば，(P) の解 $x(t) : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ が存在するような $\delta > 0$ がある．

注：一意性は成り立たない（例えば，$f(t,x) = \sqrt{|x|}$）．

ペアノの定理

Peano の定理

$f(t,x)$ が D において連続ならば，(P) の解 $x(t) : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ が存在するような $\delta > 0$ がある．

注：一意性は成り立たない（例えば，$f(t,x) = \sqrt{|x|}$）．

Carathéodory の定理

目標：さらに弱い仮定で解の存在を言う.

ただし，連続性を外すと，解 $x(t)$ は C^1-級でなくなるので，
解の概念を広げる必要がある.
そこで，解 $x(t)$ に対して，絶対連続性を要求する：

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0 \ \text{ so that } \ \sum_{k=1}^{n} (t_k - s_k) < \delta \ \Rightarrow \ \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(s_k)| < \varepsilon.$$

そうすると，$x'(t)$ はほとんどすべての t に対して存在し，$x'(t)$ が存在する t で微分方程式を満たすものを解とする.

注：$C^1 \ \Rightarrow$ リプシッツ $\ \Rightarrow$ 絶対連続 $\ \Rightarrow$ 有界変動 $\ \Rightarrow$ a.e. 微分可能

Carathéodory の定理

目標：さらに弱い仮定で解の存在を言う.

ただし，連続性を外すと，解 $x(t)$ は C^1-級でなくなるので，
解の概念を広げる必要がある.

そこで，解 $x(t)$ に対して，絶対連続性を要求する：

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0 \ \text{ so that } \ \sum_{k=1}^{n} (t_k - s_k) < \delta \ \Rightarrow \ \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(s_k)| < \varepsilon.$$

そうすると，$x'(t)$ はほとんどすべての t に対して存在し，$x'(t)$ が存在する t で微分方程式を満たすものを解とする.

注：$C^1 \ \Rightarrow$ リプシッツ $\Rightarrow$ 絶対連続 $\Rightarrow$ 有界変動 $\Rightarrow$ a.e. 微分可能

Carathéodory の定理

目標：さらに弱い仮定で解の存在を言う.

ただし，連続性を外すと，解 $x(t)$ は C^1-級でなくなるので，
解の概念を広げる必要がある.
そこで，解 $x(t)$ に対して，絶対連続性を要求する：

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0 \ \text{ so that } \quad \sum_{k=1}^{n} (t_k - s_k) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(s_k)| < \varepsilon.$$

そうすると，$x'(t)$ はほとんどすべての t に対して存在し，$x'(t)$ が存在する t で微分方程式を満たすものを解とする.

注：C^1 $\Rightarrow$ リプシッツ $\Rightarrow$ 絶対連続 $\Rightarrow$ 有界変動 $\Rightarrow$ a.e. 微分可能

Carathéodory の定理

目標：さらに弱い仮定で解の存在を言う.

ただし，連続性を外すと，解 $x(t)$ は C^1-級でなくなるので，
解の概念を広げる必要がある.
そこで，解 $x(t)$ に対して，絶対連続性を要求する：

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0 \ \text{ so that } \quad \sum_{k=1}^{n} (t_k - s_k) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(s_k)| < \varepsilon.$$

そうすると，$x'(t)$ はほとんどすべての t に対して存在し，$x'(t)$ が存在する t で微分方程式を満たすものを解とする.

注：C^1 $\Rightarrow$ リプシッツ $\Rightarrow$ 絶対連続 $\Rightarrow$ 有界変動 $\Rightarrow$ a.e. 微分可能

Carathéodory の定理

目標：さらに弱い仮定で解の存在を言う.

ただし，連続性を外すと，解 $x(t)$ は C^1-級でなくなるので，
解の概念を広げる必要がある.
そこで，解 $x(t)$ に対して，絶対連続性を要求する：

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0 \ \text{ so that } \quad \sum_{k=1}^{n} (t_k - s_k) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(s_k)| < \varepsilon.$$

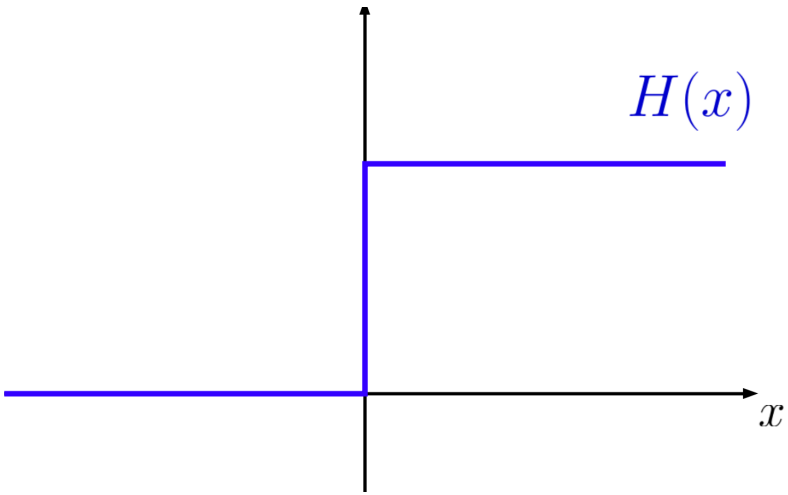
そうすると，$x'(t)$ はほとんどすべての t に対して存在し，$x'(t)$ が存在する t で微分方程式を満たすものを解とする.

注：C^1 $\Rightarrow$ リプシッツ $\Rightarrow$ 絶対連続 $\Rightarrow$ 有界変動 $\Rightarrow$ a.e. 微分可能

Carathéodory の定理

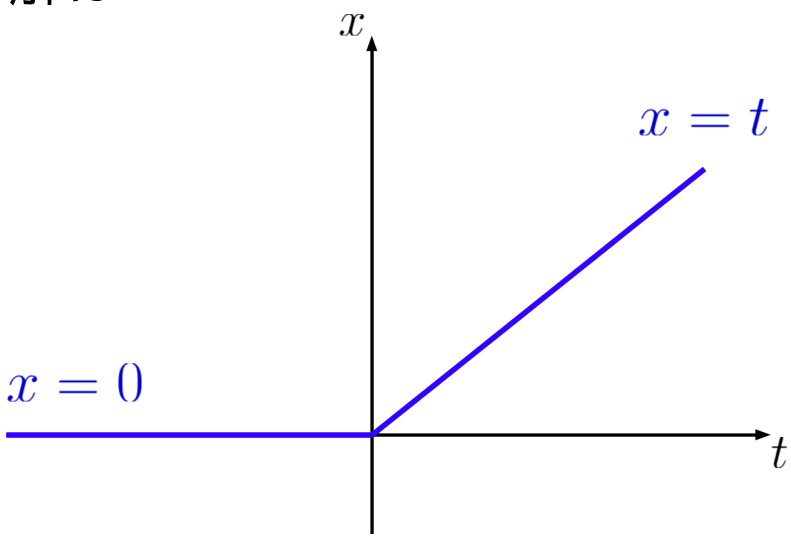
例：Heaviside 関数

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = H(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

解は



$t = 0$ で微分できない

Carathéodory の定理

Carathéodory の定理

- $f(t,x)$ は（固定した t に対して）x について連続
- $f(t,x)$ は（固定した x に対して）t について可測
- $|f(t,x)| \leq m(t)\ \forall (t,x) \in D$, $\int_{t_0-d_1}^{t_0+d_1} |m(t)|\,dt < \infty$ を満たす $m(t)$ がある.

という条件が満たされるならば，広義解はある区間 $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ において存在する.

注：f が可測とは，任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\{f > \alpha\}$ が可測集合であるという意味である.

Carathéodory の定理

Carathéodory の定理

- $f(t,x)$ は（固定した t に対して）x について連続
- $f(t,x)$ は（固定した x に対して）t について可測
- $|f(t,x)| \leq m(t)\ \forall (t,x) \in D$, $\int_{t_0-d_1}^{t_0+d_1} |m(t)|\,dt < \infty$ を満たす $m(t)$ がある.

という条件が満たされるならば，広義解はある区間 $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ において存在する.

注：f が可測とは，任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\{f > \alpha\}$ が可測集合であるという意味である.

Carathéodory の定理

Carathéodory の定理

- $f(t,x)$ は（固定した t に対して）x について連続
- $f(t,x)$ は（固定した x に対して）t について可測
- $|f(t,x)| \leq m(t)\ \forall (t,x) \in D$, $\int_{t_0-d_1}^{t_0+d_1} |m(t)|\,dt < \infty$ を満たす $m(t)$ がある.

という条件が満たされるならば，広義解はある区間 $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ において存在する.

注：f が可測とは，任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\{f > \alpha\}$ が可測集合であるという意味である.

Carathéodory の定理

Carathéodory の定理

- $f(t,x)$ は（固定した t に対して）x について連続
- $f(t,x)$ は（固定した x に対して）t について可測
- $|f(t,x)| \leq m(t)\ \ \forall (t,x) \in D,\ \ \displaystyle\int_{t_0-d_1}^{t_0+d_1} |m(t)|\,dt < \infty$ を満たす $m(t)$ がある.

という条件が満たされるならば，広義解はある区間 $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ において存在する.

注：f が可測とは，任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\{f > \alpha\}$ が可測集合であるという意味である.

Carathéodory の定理

Carathéodory の定理

- $f(t,x)$ は（固定した t に対して）x について連続
- $f(t,x)$ は（固定した x に対して）t について可測
- $|f(t,x)| \leq m(t)\ \forall (t,x) \in D$, $\int_{t_0-d_1}^{t_0+d_1} |m(t)|\,dt < \infty$ を満たす $m(t)$ がある.

という条件が満たされるならば，広義解はある区間 $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ において存在する.

注：f が可測とは，任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\{f > \alpha\}$ が可測集合であるという意味である.

一意性が成り立たない例

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$f(t,x) = \sqrt{|x|}$ はリプシッツ条件をみたさないが,
それは解の存在と一意性について何も教えてくれない.
変数分離で解く：

$$x \neq 0 \text{ のとき} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx = \int dt$$

$$x > 0 \text{ のとき} \qquad 2\sqrt{x} = t + C$$

$$x(t) = \left(\frac{t+C}{2}\right)^2, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$x < 0 \text{ のとき} \qquad x(t) = -\left(\frac{t+C}{2}\right)^2$$

$x(t) \equiv 0$ も解.

一意性が成り立たない例

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$f(t,x) = \sqrt{|x|}$ はリプシッツ条件をみたさないが,
それは解の存在と一意性について何も教えてくれない.

変数分離で解く：

$$x \neq 0 \text{ のとき} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx = \int dt$$

$$x > 0 \text{ のとき} \qquad 2\sqrt{x} = t + C$$

$$x(t) = \left(\frac{t+C}{2}\right)^2, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$x < 0 \text{ のとき} \qquad x(t) = -\left(\frac{t+C}{2}\right)^2$$

$x(t) \equiv 0$ も解.

一意性が成り立たない例

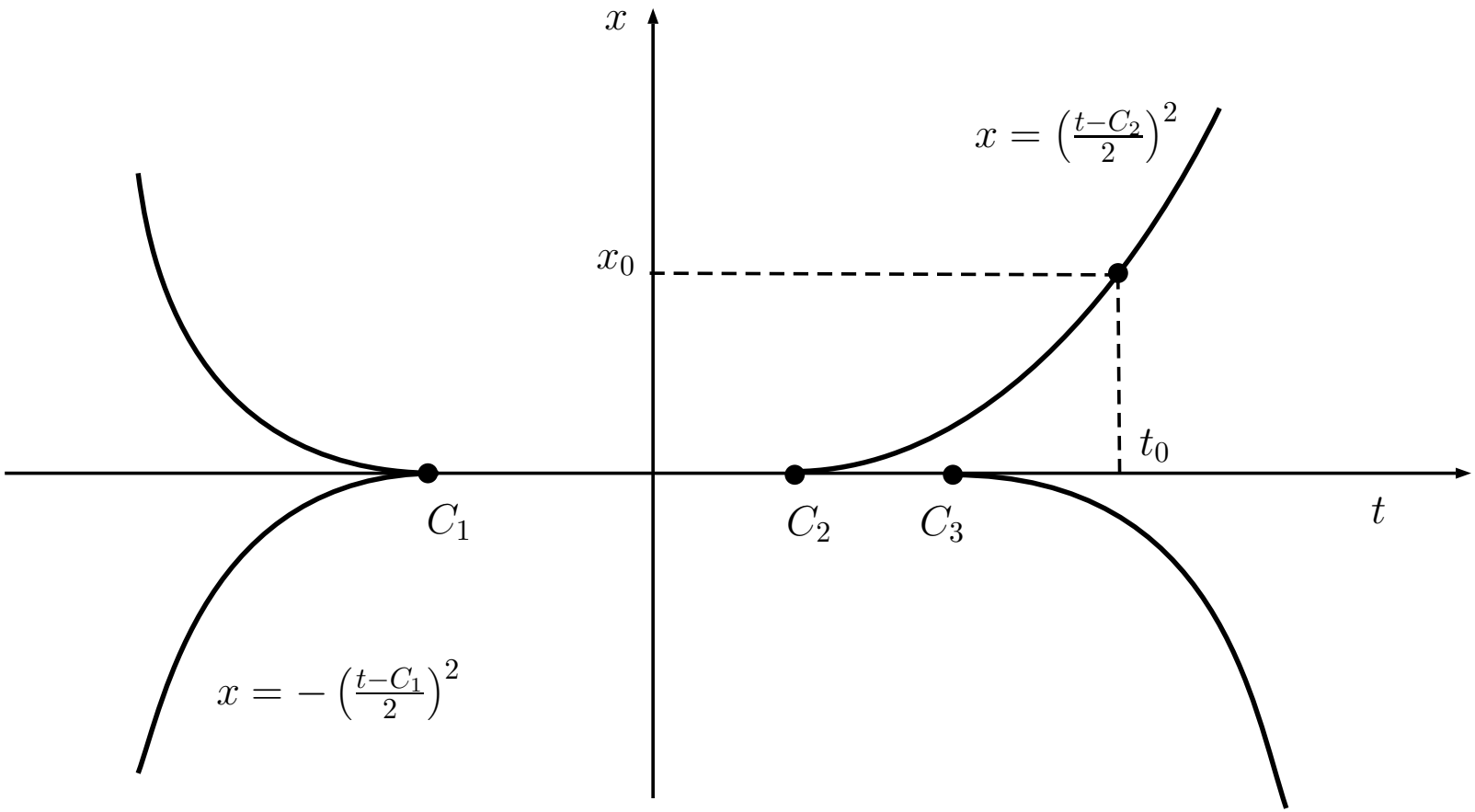
$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$f(t,x) = \sqrt{|x|}$ はリプシッツ条件をみたさないが,
それは解の存在と一意性について何も教えてくれない.
変数分離で解く：

$$\begin{aligned} x \neq 0 \text{ のとき} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx &= \int dt \\ x > 0 \text{ のとき} \qquad 2\sqrt{x} &= t + C \\ x(t) &= \left(\frac{t+C}{2}\right)^2, \quad C \in \mathbb{R} \\ x < 0 \text{ のとき} \qquad x(t) &= -\left(\frac{t+C}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

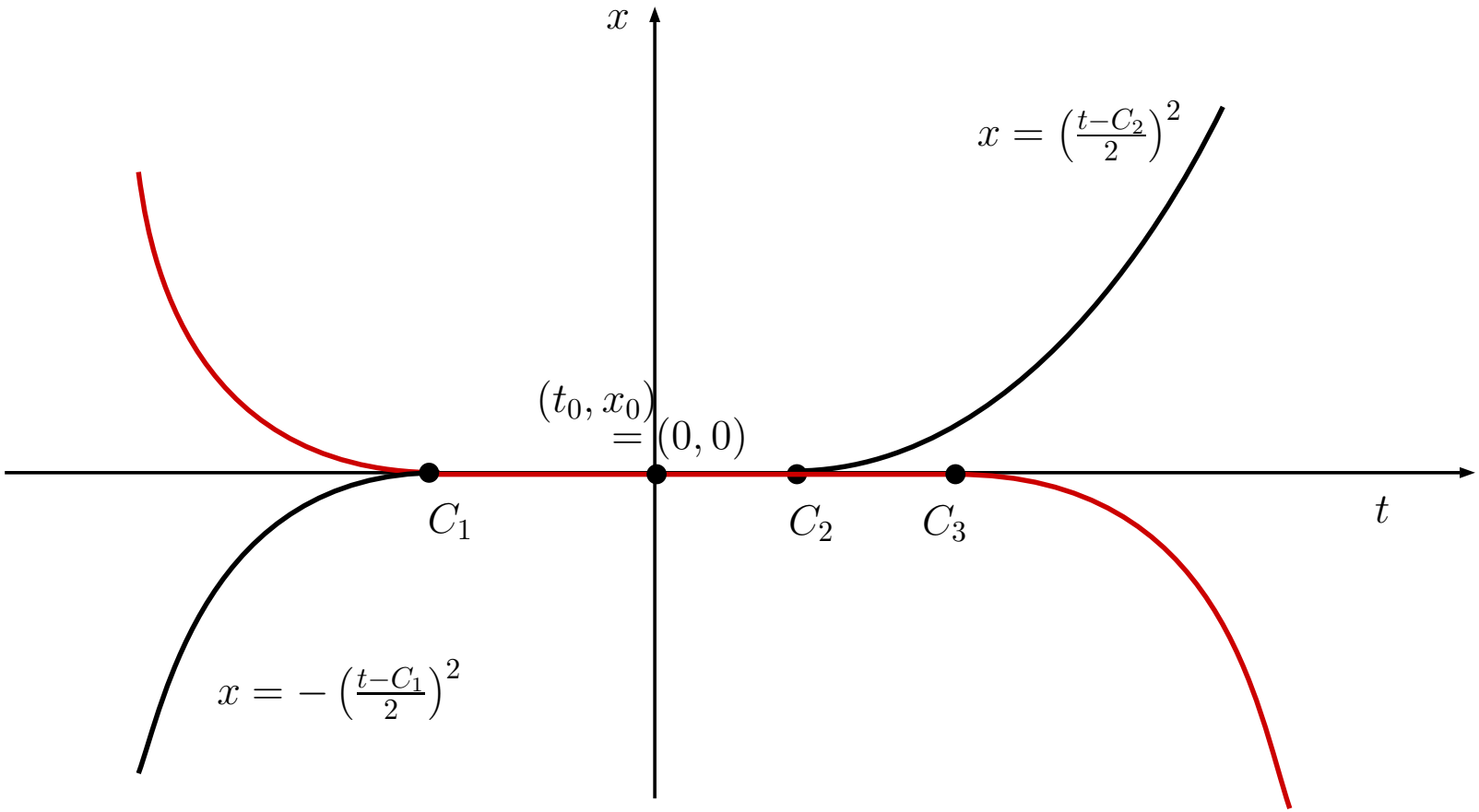
$x(t) \equiv 0$ も解.

一意性が成り立たない例

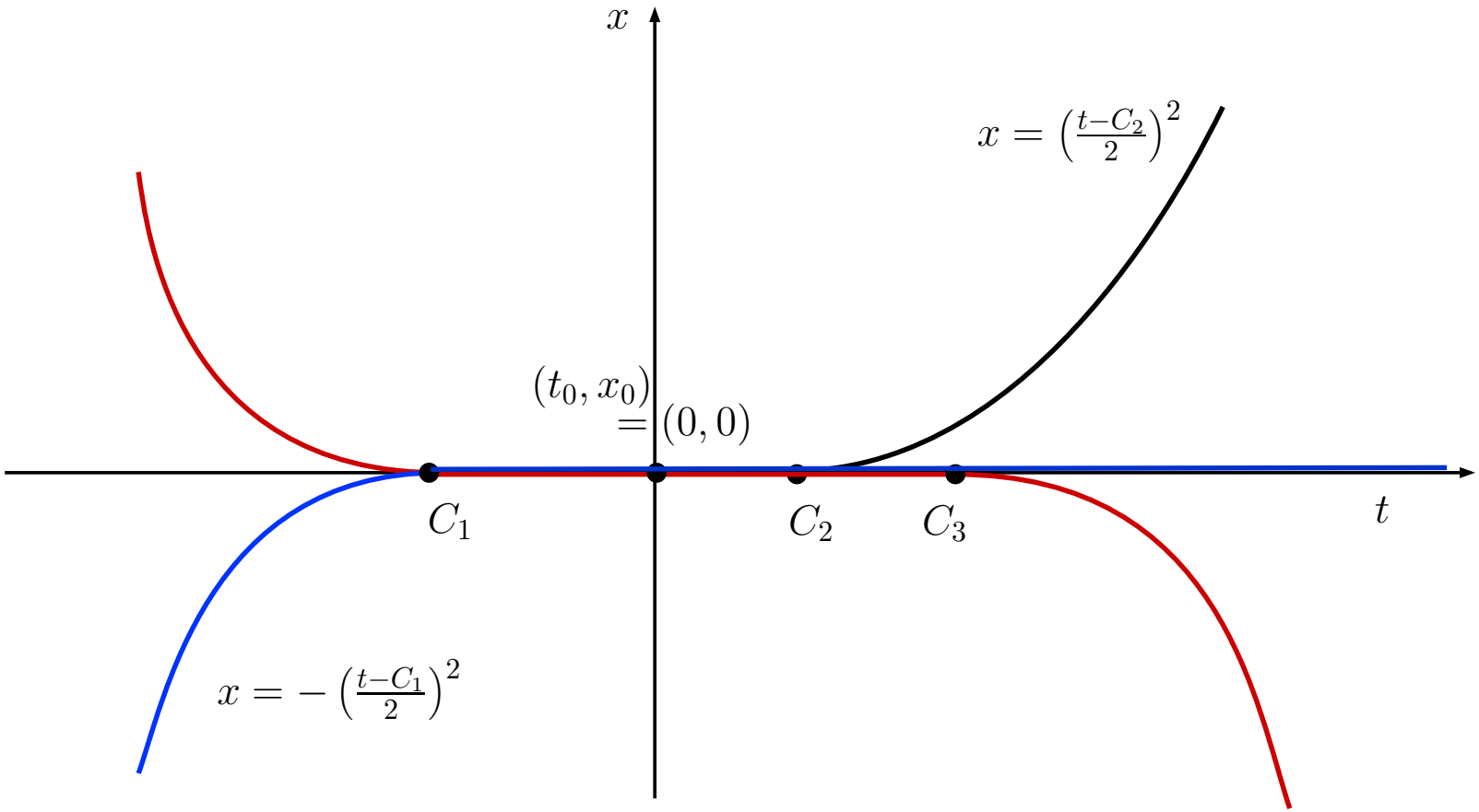


つなげることで無限個の解が得られる.

一意性が成り立たない例

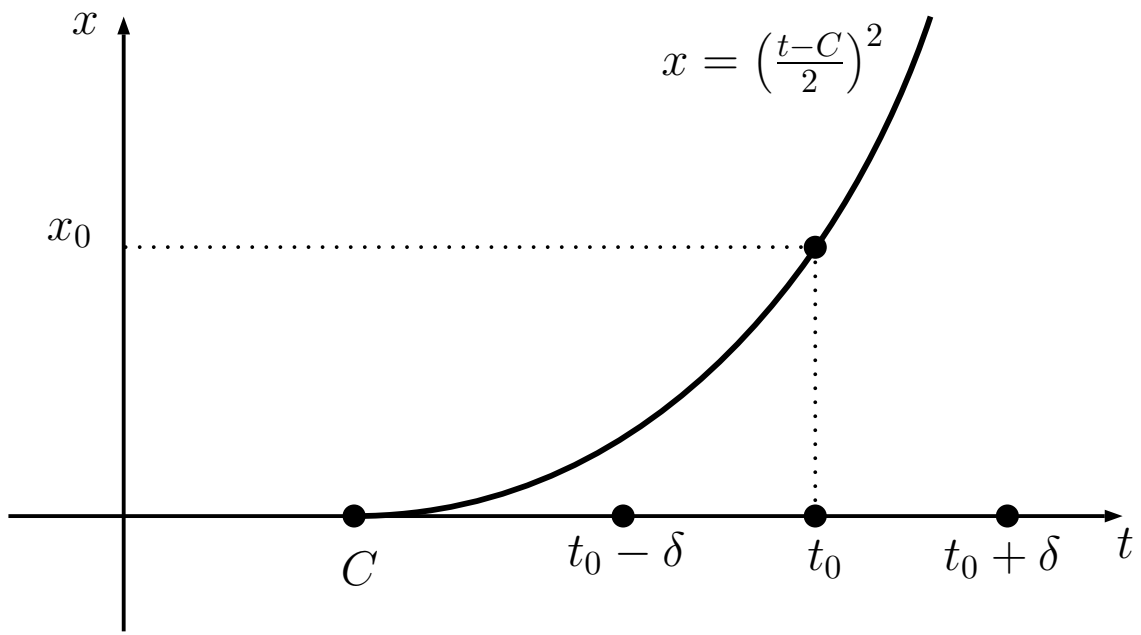


一意性が成り立たない例



一意性が成り立たない例

t-軸を含まない領域では，$f(t,x)=\sqrt{|x|}$ はリプシッツ条件をみたすので，$x(t_0)=x_0$, $x_0\neq 0$ の初期条件をみたす解が一意的に存在するような区間 $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ がある．



$t_0-\delta=C$ より左に拡張できない．

一意性

リプシッツ条件は一意性のための必要条件ではない.

一意性のためのより一般的な条件：

Osgood の条件

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)| \le \varphi(|x_1-x_2|) \qquad \forall (t,x_1),(t,x_2) \in D,$$

ただし，$\varphi(r)$ は $r>0$ で連続，$\displaystyle\int_0^R \frac{1}{\varphi(r)}\,dr = \infty$ を満たす

注：南雲・岡村の結果

一意性

リプシッツ条件は一意性のための必要条件ではない.

一意性のためのより一般的な条件：

Osgood の条件

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)| \le \varphi(|x_1-x_2|) \qquad \forall (t,x_1),(t,x_2) \in D,$$

ただし，$\varphi(r)$ は $r>0$ で連続，$\displaystyle\int_0^R \frac{1}{\varphi(r)}\,dr=\infty$ を満たす

注：南雲・岡村の結果

一意性

リプシッツ条件は一意性のための必要条件ではない.

一意性のためのより一般的な条件：

Osgood の条件

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)| \le \varphi(|x_1-x_2|) \qquad \forall (t,x_1),(t,x_2) \in D,$$

ただし，$\varphi(r)$ は $r>0$ で連続，$\displaystyle\int_0^R \frac{1}{\varphi(r)}\,dr=\infty$ を満たす

注：南雲・岡村の結果

一意性に関する例

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \qquad \text{ただし，} \quad f(x) = \begin{cases} -x \log|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

f は

- $x \neq 0$ ではリプシッツ条件を満たす（任意の D で）
- $x = 0$ で連続だが，この近傍でリプシッツ条件を満たさない（$x_1 = x, x_2 = 0$ とする）：

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{|x| \left|\log|x|\right|}{|x|} = \left|\log|x|\right| \to \infty \quad \text{as } x \to 0.$$

一方では，Osgood の条件を満たす：$x_2 = 0$ として，$\varphi(r) = r \log r$, $r > 0$ とすると，

$$\int_0^R \frac{1}{r \log r}\, dr = \log(|\log r|)\Big|_{r=0}^{R} = +\infty.$$

一意性に関する例

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \qquad \text{ただし，} \quad f(x) = \begin{cases} -x \log|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

f は

- $x \neq 0$ ではリプシッツ条件を満たす（任意の D で）
- $x = 0$ で連続だが，この近傍でリプシッツ条件を満たさない（$x_1 = x, x_2 = 0$ とする）：

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{|x| \left|\log|x|\right|}{|x|} = \left|\log|x|\right| \to \infty \quad \text{as } x \to 0.$$

一方では，Osgood の条件を満たす：$x_2 = 0$ として，$\varphi(r) = r \log r$, $r > 0$ とすると，

$$\int_0^R \frac{1}{r \log r}\, dr = \log(|\log r|)\Big|_{r=0}^{R} = +\infty.$$

一意性に関する例

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \qquad \text{ただし，} \quad f(x) = \begin{cases} -x \log|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

f は

- $x \neq 0$ ではリプシッツ条件を満たす（任意の D で）
- $x = 0$ で連続だが，この近傍でリプシッツ条件を満たさない（$x_1 = x, x_2 = 0$ とする）：

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{|x| \left|\log|x|\right|}{|x|} = \left|\log|x|\right| \to \infty \quad \text{as } x \to 0.$$

一方では，Osgood の条件を満たす：$x_2 = 0$ として，$\varphi(r) = r \log r$, $r > 0$ とすると，

$$\int_0^R \frac{1}{r \log r}\, dr = \log(|\log r|)\Big|_{r=0}^{R} = +\infty.$$

一意性に関する例

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \qquad \text{ただし，} \quad f(x) = \begin{cases} -x \log|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

f は

- $x \neq 0$ ではリプシッツ条件を満たす（任意の D で）
- $x = 0$ で連続だが，この近傍でリプシッツ条件を満たさない（$x_1 = x, x_2 = 0$ とする）：

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{|x| \left|\log|x|\right|}{|x|} = \left|\log|x|\right| \to \infty \quad \text{as } x \to 0.$$

一方では，Osgood の条件を満たす：$x_2 = 0$ として，$\varphi(r) = r \log r$, $r > 0$ とすると，

$$\int_0^R \frac{1}{r \log r}\, dr = \log(|\log r|)\Big|_{r=0}^{R} = +\infty.$$

一意性に関する例

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \qquad \text{ただし，} \quad f(x) = \begin{cases} -x \log|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

変数分離で解く：

$$-\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x \log|x|} = \int_{t_0}^{t} dt$$

$$-\left(\log\left|\log|x|\right| - \log\left|\log|x_0|\right|\right) = t - t_0$$

$$\log\left|\frac{\log|x|}{\log|x_0|}\right| = -(t - t_0)$$

$$\left|\log|x|\right| = \left|\log|x_0|\right| e^{-(t-t_0)}$$

$$x(t) = \pm|x_0|^{e^{-(t-t_0)}}$$

一意性に関する例

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \qquad \text{ただし，} \quad f(x) = \begin{cases} -x \log|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

変数分離で解く：

$$-\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x \log|x|} = \int_{t_0}^{t} dt$$

$$-\left(\log\left|\log|x|\right| - \log\left|\log|x_0|\right|\right) = t - t_0$$

$$\log\left|\frac{\log|x|}{\log|x_0|}\right| = -(t - t_0)$$

$$\left|\log|x|\right| = \left|\log|x_0|\right| e^{-(t-t_0)}$$

$$x(t) = \pm |x_0|^{e^{-(t-t_0)}}$$

一意性に関する例

$$x(t) = \pm |x_0|^{e^{-(t-t_0)}}$$

- $x_0 \in (0,1)$ のとき：

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$$

- $x_0 \in (1,\infty)$ のとき：

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t\to-\infty} x(t) = +\infty$$

- $x_0 = 1$ のとき：$x(t) = 1$
- $x_0 = 0$ のとき：$x(t) = 0$
- $x_0 < 0$ のとき，t-軸に対して対称

一意性に関する例

$$x(t) = \pm |x_0|^{e^{-(t-t_0)}}$$

- $x_0 \in (0,1)$ のとき：

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$$

- $x_0 \in (1,\infty)$ のとき：

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t\to-\infty} x(t) = +\infty$$

- $x_0 = 1$ のとき：$x(t) = 1$
- $x_0 = 0$ のとき：$x(t) = 0$
- $x_0 < 0$ のとき，t-軸に対して対称

一意性に関する例

$$x(t) = \pm |x_0|^{e^{-(t-t_0)}}$$

- $x_0 \in (0,1)$ のとき：

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$$

- $x_0 \in (1,\infty)$ のとき：

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t\to-\infty} x(t) = +\infty$$

- $x_0 = 1$ のとき：$x(t) = 1$
- $x_0 = 0$ のとき：$x(t) = 0$
- $x_0 < 0$ のとき，t-軸に対して対称

一意性に関する例

$$x(t) = \pm |x_0|^{e^{-(t-t_0)}}$$

- $x_0 \in (0,1)$ のとき：

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$$

- $x_0 \in (1,\infty)$ のとき：

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t\to-\infty} x(t) = +\infty$$

- $x_0 = 1$ のとき：$x(t) = 1$
- $x_0 = 0$ のとき：$x(t) = 0$
- $x_0 < 0$ のとき，t-軸に対して対称

一意性に関する例

$$x(t) = \pm |x_0|^{e^{-(t-t_0)}}$$

- $x_0 \in (0,1)$ のとき：

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$$

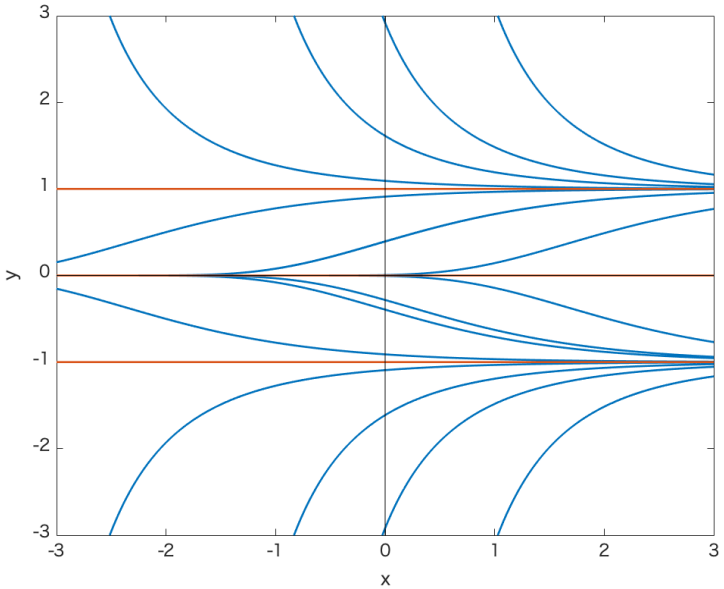
- $x_0 \in (1,\infty)$ のとき：

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t\to-\infty} x(t) = +\infty$$

- $x_0 = 1$ のとき：$x(t) = 1$
- $x_0 = 0$ のとき：$x(t) = 0$
- $x_0 < 0$ のとき，t-軸に対して対称

一意性に関する例

$$x(t) = \pm |x_0|^{e^{-(t-t_0)}}$$



どの (t_0, x_0) でも解の存在と一意性が成立

- $x_0 \in (0,1)$ のとき：

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$$

- $x_0 \in (1,\infty)$ のとき：

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t\to-\infty} x(t) = +\infty$$

- $x_0 = 1$ のとき：$x(t) = 1$
- $x_0 = 0$ のとき：$x(t) = 0$
- $x_0 < 0$ のとき，t-軸に対して対称

微分積分学続論 II： 第 13 回

Karel Svadlenka

2020 年 7 月 8 日

■一意的な ODE

これからは，ODE $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$ が一意的である状況を考える．

定義（一意的な方程式）

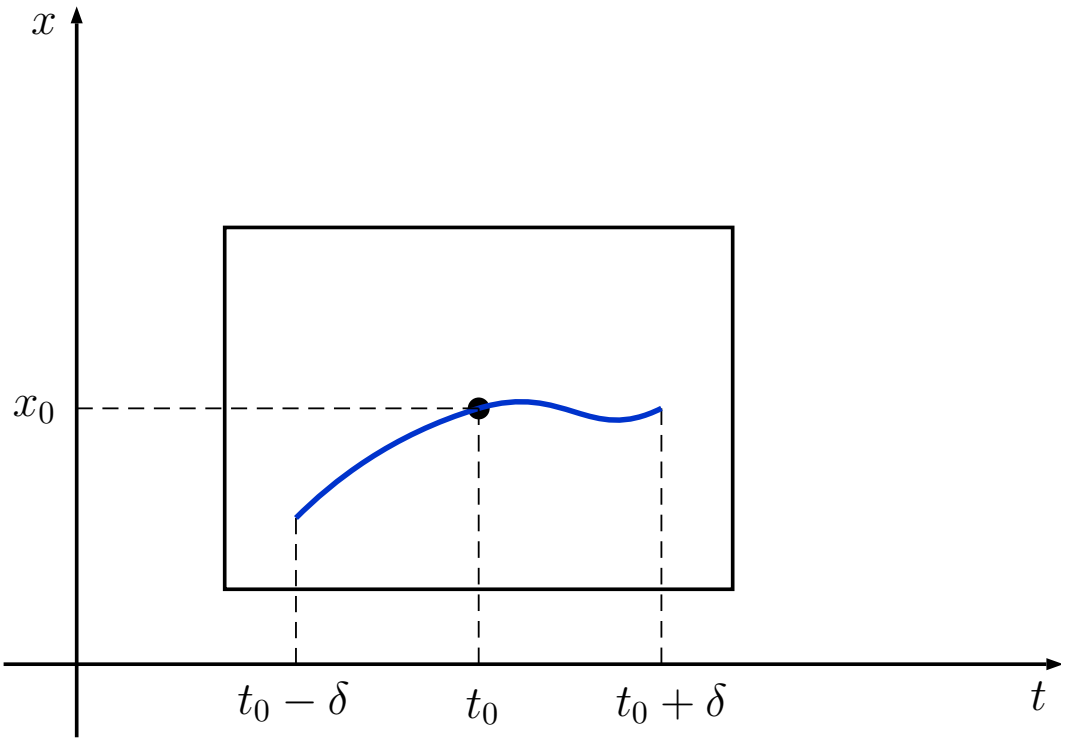
ODE $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$ が 一意的 であるとは，$x_1 : I_1 \to \mathbb{R}$, $x_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ が二つの解で，$x_1(t_0) = x_2(t_0)$ となる点 $t_0 \in I_1 \cap I_2$ があれば，必ず $x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in I_1 \cap I_2$.

言い換えれば，”二つの異なる解は交わることがない”． このための十分条件は例えば，

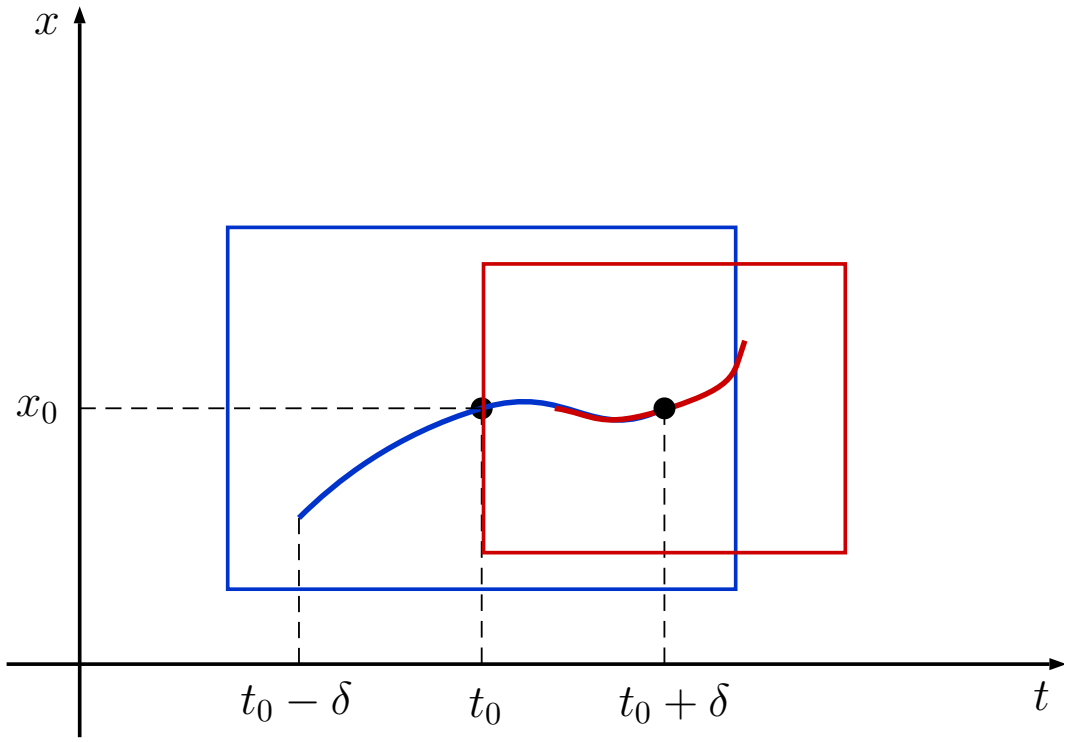
$f(t,x)$ は任意の長方形領域 $D = [a,b] \times [c,d]$ で連続で，リプシッツ条件を満たす．

証明：$x(t_0) = x_1(t_0) = x_2(t_0)$ という初期条件にコーシーの定理を適用すればよい（D を $(t_0, x_1(t_0))$ を中心とする長方形領域とする）．

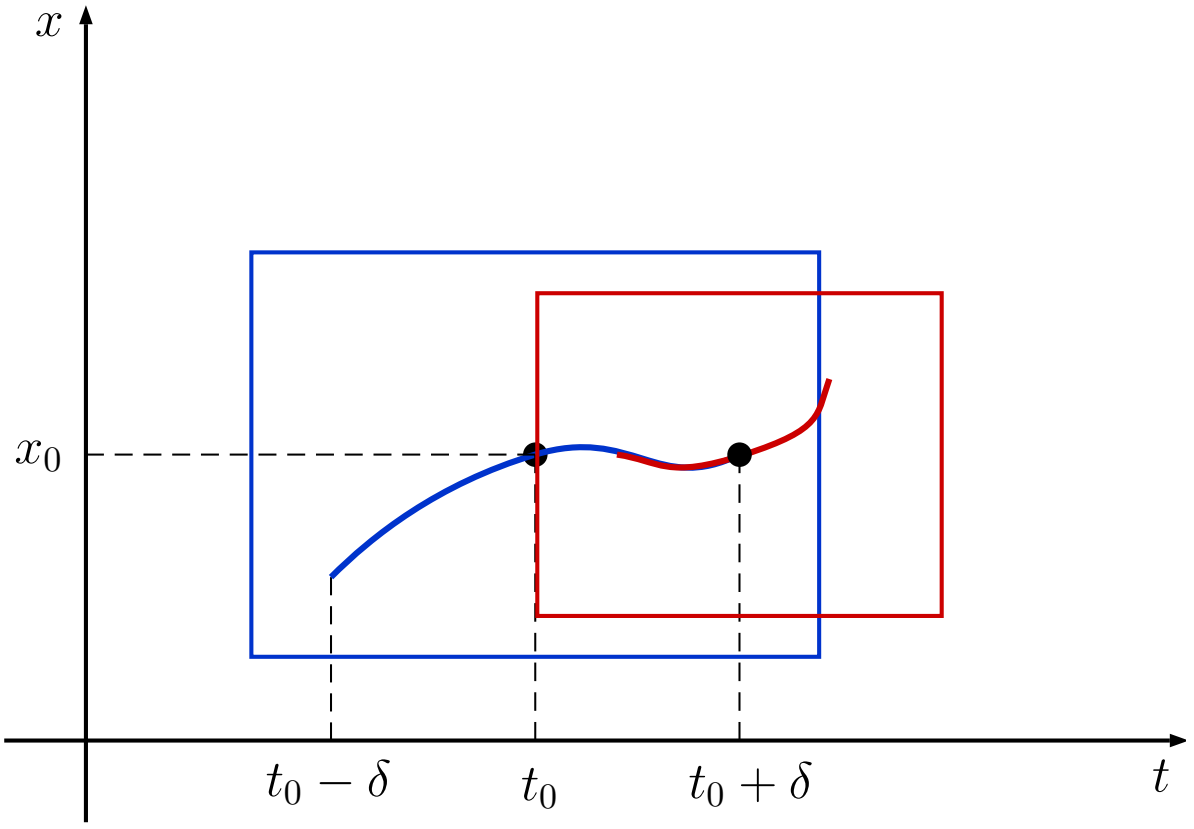
■解の延長のアイデア



■アイデア



■解の延長のアイデア



1. コーシーの定理より解 $x(t)$ は $I_1 = [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ で存在
2. 点 $(t_0 + \delta_1, x(t_0 + \delta_1))$ を初期値として再びコーシーの定理を適用 $\Rightarrow$ 解は $I_2 = [t_0 + \delta_1 - \delta_2, t_0 + \delta_1 + \delta_2]$ で存在． 一意性より $[t_0 + \delta_1 - \delta_2, t_0 + \delta_1]$ では最初の解と一致．

これを繰り返す．

2 つの場合が考えられる（$t \to -\infty$ も同じ）

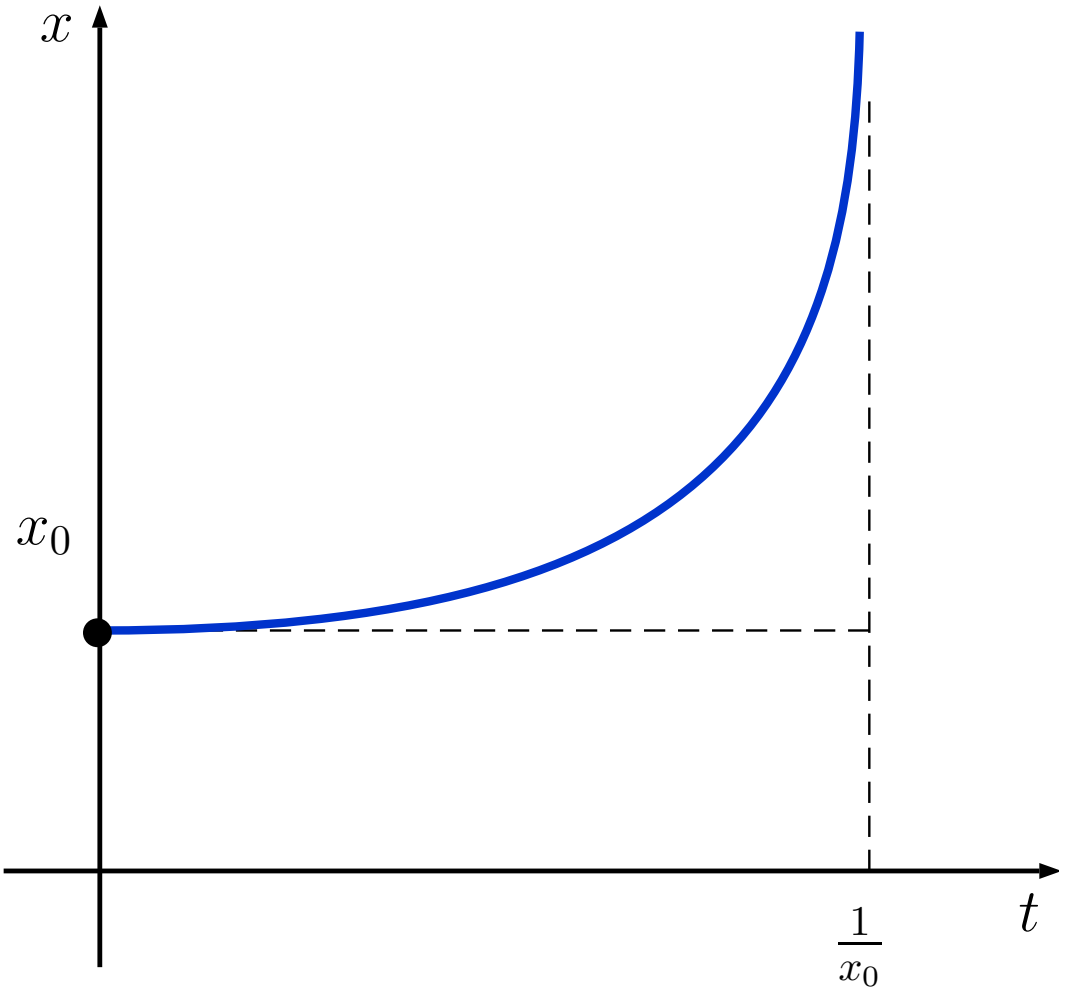
- 解を延長できる幅（δ_n のこと）が短くなり，合計で有限な値に収束し，解は $\pm\infty$ に発散する
- 解を $t \to \infty$ まで延長できる

■例

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$
$$x(0) = x_0$$

解は

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$



■最大解

定義

$\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^n$ は $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ の解で，延長できないとき，$\boldsymbol{x}$ は 最大解（maximal solution）であるという．つまり，I より広い区間で定義され，I 上で $\boldsymbol{x}(t)$ と一致するような解は存在しない．

定理（最大解の存在）

$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ は開集合，$\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ は連続関数，$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ は一意的であるとする．このとき，$(t_0, x_0) \in D$ に対して，次を満たす区間 $I \subset \mathbb{R}$ と関数 $\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^n$ が存在する：

- $t_0 \in I$
- $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$
- $\boldsymbol{x}(t)$ は $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, x)$ の最大解である．

この I と $\boldsymbol{x}(t)$ は一意である．

■最大解の存在の証明

以下では単独 ODE（$n = 1$）について示すが，$n > 1$ の場合は全く同じ．

(1) 一意性　$x_1 : I_1 \to \mathbb{R}, x_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ が $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ の二つの最大解であるとする．$I = I_1 \cup I_2$ とおく． ODE の一意性より，$x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$（$t_0$ を含む）． よって，$x : I \to \mathbb{R}$ を

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in I_1 \\ x_2(t), & t \in I_2 \end{cases}$$

で定義できる． このとき，$x'(t) = f(t, x(t))\ \forall t \in I$． x_1, x_2 は最大解より，$I_1 = I_2 = I,\ x_1(t) = x_2(t) = x(t)\ \forall t \in I$．

■最大解の存在の証明

(2) 存在　解 $x(t)$ に対して，I_x をその定義域とする．全ての解の集合：

$$V = \{x : I_x \to \mathbb{R};\ \ x'(t) = f(t, x(t))\ \ \forall t \in I_x,\ x(t_0) = x_0\}$$

ペアノの定理より，V は空ではない．$I = \bigcup_{x \in V} I_x$ とおく． ODE の一意性より，もし $t \in I_{x_1} \cap I_{x_2}$（$x_1, x_2 \in V$）があれば，$x_1(t) = x_2(t)$ が成立． よって，$y : I \to \mathbb{R}$ を

$$y(t) = x(t), \qquad \text{ただし，} x \text{ は } t \in I_x \text{ となる } V \text{ の元である}$$

と定義できる． 作り方より，$y(t)$ は最大解．

■最大解の存在の証明

注：上の定理の区間 I は開区間である．

証明：$\widetilde{t} \in I$ のとき，$\widetilde{t}$ のある近傍が I に含まれることを示す． 定理の最大解 x に対して $x(\widetilde{t}) = \widetilde{x}$ とすると，

$$\begin{cases} x'(t) & = f(t, x) \\ x(\widetilde{t}) & = \widetilde{x} \end{cases}$$

の解 $y(t)$ は $(\widetilde{t} - \delta, \widetilde{t} + \delta)$ で存在する（ペアノ）．

D 開集合，$(\widetilde{t}, \widetilde{x}) \in D \ \Rightarrow$ その近傍も $\subset D$．

一意性よりこの区間で $x = y$．

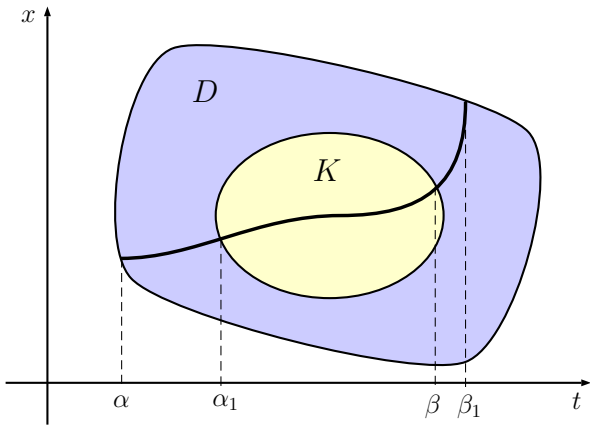
最大解の定義より $(\widetilde{t} - \delta, \widetilde{t} + \delta) \subset I \ \Rightarrow\ I$ は開区間．

■コンパクト集合との関係

定理（最大解とコンパクト集合の関係）

$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ は開集合，$\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ は連続関数，$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ は一意的であるとする．$K \subset D$ をコンパクト集合（有界閉集合）とする． このとき，任意の最大解 $\boldsymbol{x} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}, \qquad \alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$$
が存在し，次が成り立つ： $\qquad (t, \boldsymbol{x}(t)) \notin K \quad \forall t \in (\alpha, \alpha_1) \cup (\beta_1, \beta).$



■証明

背理法：最大解 $x(t)$ と実数列 $\{t_k\} \subset (\alpha, \beta)$ が存在して，

$$(t_k, x(t_k)) \in K \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{k \to \infty} t_k = \beta \quad （または\ \alpha）$$

- K コンパクト $\Rightarrow$ $\{x(t_k)\}$ は有界 $\Rightarrow$ 収束する部分列がある：$\lim_{m \to \infty} x(t_{k_m}) = z$
- $\{t_{k_m}\}$ 有界 $\Rightarrow$ $\beta < \infty$
- $(\beta, z) \in K$

$(\beta, z) \in K \subset D$ を初期値としてペアノの定理を用いる $\Rightarrow$ $\widetilde{x}(t) : (\beta - \delta, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ の解が存在（$\delta > 0$）．この解は $(\beta - \delta, \beta)$ では $x(t)$ と一致する（一意性より）．$y : (\alpha, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ を

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (\alpha, \beta) \\ \widetilde{x}(t) & t \in [\beta, \beta + \delta) \end{cases}$$

で定義できる．この $y(t)$ は $x(t)$ の真の延長 $\Rightarrow$ $x(t)$ の最大性に矛盾．

■証明

注 :「この解は $(\beta - \delta, \beta)$ では $x(t)$ と一致する」というのは すぐには言えない（x は β を込めて定義されない可能性がある）ので，

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists j : \quad |x(t_j) - z| < \varepsilon$$

を考慮して，ペアノの定理の精密化を $(t_j, x(t_j))$ に対して用いる $\Rightarrow$ 同じように $(\beta - \delta, \beta + \delta)$ での解の存在が言える．

微分積分学続論 II： 第 13 回

Karel Svadlenka

京都大学大学院理学研究科 数学教室

2020 年 7 月 8 日

一意的な ODE

これからは，ODE $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$ が一意的である状況を考える．

定義（一意的な方程式）

ODE $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$ が **一意的** であるとは，$x_1 : I_1 \to \mathbb{R}$, $x_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ が二つの解で，$x_1(t_0) = x_2(t_0)$ となる点 $t_0 \in I_1 \cap I_2$ があれば，必ず $x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in I_1 \cap I_2$.

言い換えれば，”二つの異なる解は交わることがない”．
このための十分条件は例えば，

$f(t,x)$ は任意の長方形領域 $D = [a,b] \times [c,d]$ で連続で，リプシッツ条件を満たす．

証明：$x(t_0) = x_1(t_0) = x_2(t_0)$ という初期条件にコーシーの定理を適用すればよい（D を $(t_0, x_1(t_0))$ を中心とする長方形領域とする）．

一意的な ODE

これからは，ODE $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$ が一意的である状況を考える．

定義（一意的な方程式）

ODE $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$ が **一意的** であるとは，$x_1 : I_1 \to \mathbb{R}$, $x_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ が二つの解で，$x_1(t_0) = x_2(t_0)$ となる点 $t_0 \in I_1 \cap I_2$ があれば，必ず $x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in I_1 \cap I_2$．

言い換えれば，”二つの異なる解は交わることがない”．
このための十分条件は例えば，

$f(t,x)$ は任意の長方形領域 $D = [a,b] \times [c,d]$ で連続で，リプシッツ条件を満たす．

証明：$x(t_0) = x_1(t_0) = x_2(t_0)$ という初期条件にコーシーの定理を適用すればよい（D を $(t_0, x_1(t_0))$ を中心とする長方形領域とする）．

一意的な ODE

これからは，ODE $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$ が一意的である状況を考える．

定義（一意的な方程式）

ODE $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$ が **一意的** であるとは，$x_1 : I_1 \to \mathbb{R}$, $x_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ が二つの解で，$x_1(t_0) = x_2(t_0)$ となる点 $t_0 \in I_1 \cap I_2$ があれば，必ず $x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in I_1 \cap I_2$.

言い換えれば，” 二つの異なる解は交わることがない ”.

このための十分条件は例えば，

$f(t,x)$ は任意の長方形領域 $D = [a,b] \times [c,d]$ で連続で，リプシッツ条件を満たす．

証明：$x(t_0) = x_1(t_0) = x_2(t_0)$ という初期条件にコーシーの定理を適用すればよい（D を $(t_0, x_1(t_0))$ を中心とする長方形領域とする）．

一意的な ODE

これからは，ODE $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$ が一意的である状況を考える．

定義（一意的な方程式）

ODE $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$ が **一意的** であるとは，$x_1 : I_1 \to \mathbb{R}$, $x_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ が二つの解で，$x_1(t_0) = x_2(t_0)$ となる点 $t_0 \in I_1 \cap I_2$ があれば，必ず $x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in I_1 \cap I_2$.

言い換えれば，” 二つの異なる解は交わることがない ”.
このための十分条件は例えば，

$f(t,x)$ は任意の長方形領域 $D = [a,b] \times [c,d]$ で連続で，リプシッツ条件を満たす．

証明：$x(t_0) = x_1(t_0) = x_2(t_0)$ という初期条件にコーシーの定理を適用すればよい（D を $(t_0, x_1(t_0))$ を中心とする長方形領域とする）．

一意的な ODE

これからは，ODE $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$ が一意的である状況を考える．

定義（一意的な方程式）

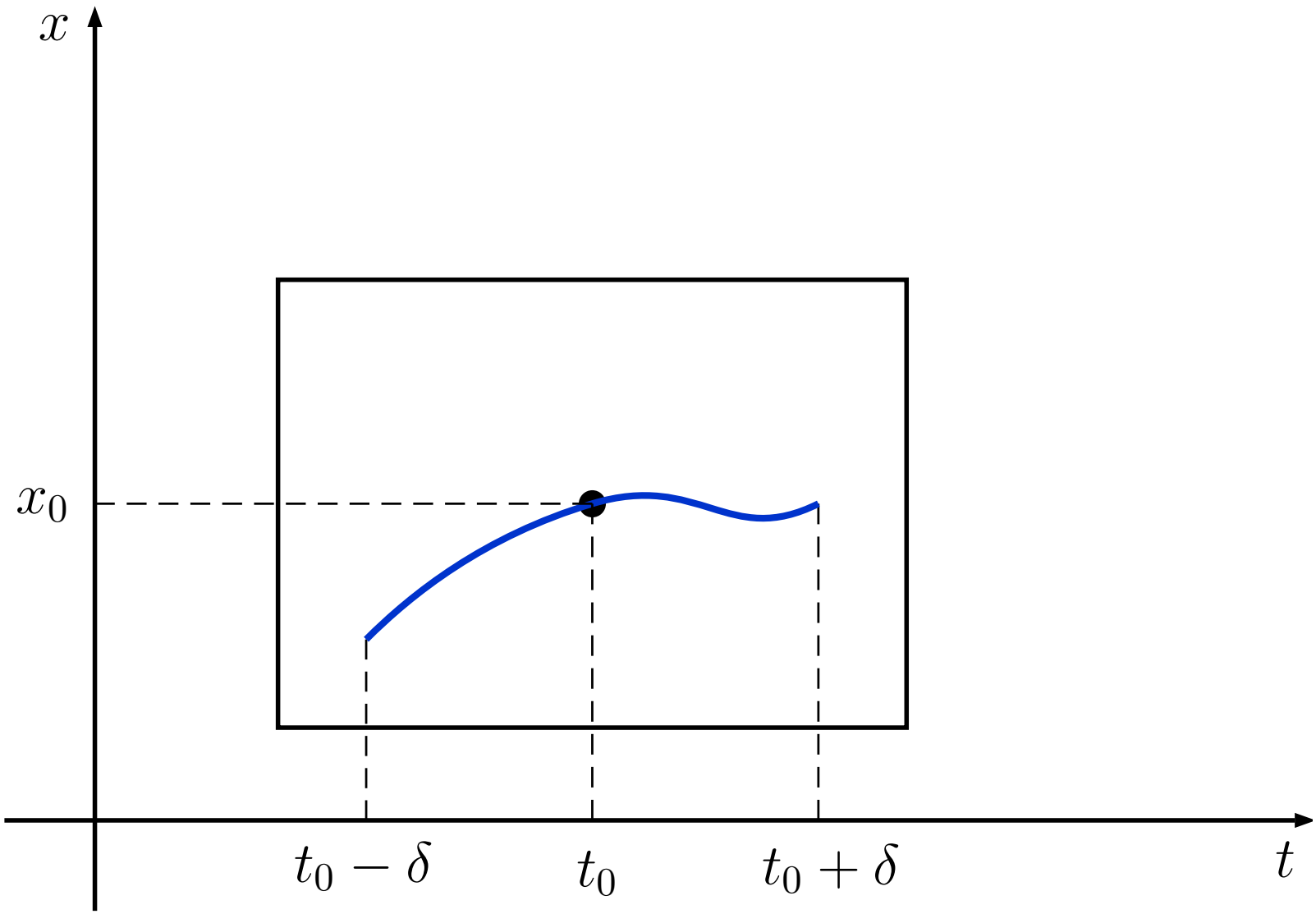
ODE $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$ が **一意的** であるとは，$x_1 : I_1 \to \mathbb{R}$, $x_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ が二つの解で，$x_1(t_0) = x_2(t_0)$ となる点 $t_0 \in I_1 \cap I_2$ があれば，必ず $x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in I_1 \cap I_2$.

言い換えれば，” 二つの異なる解は交わることがない ”.
このための十分条件は例えば，

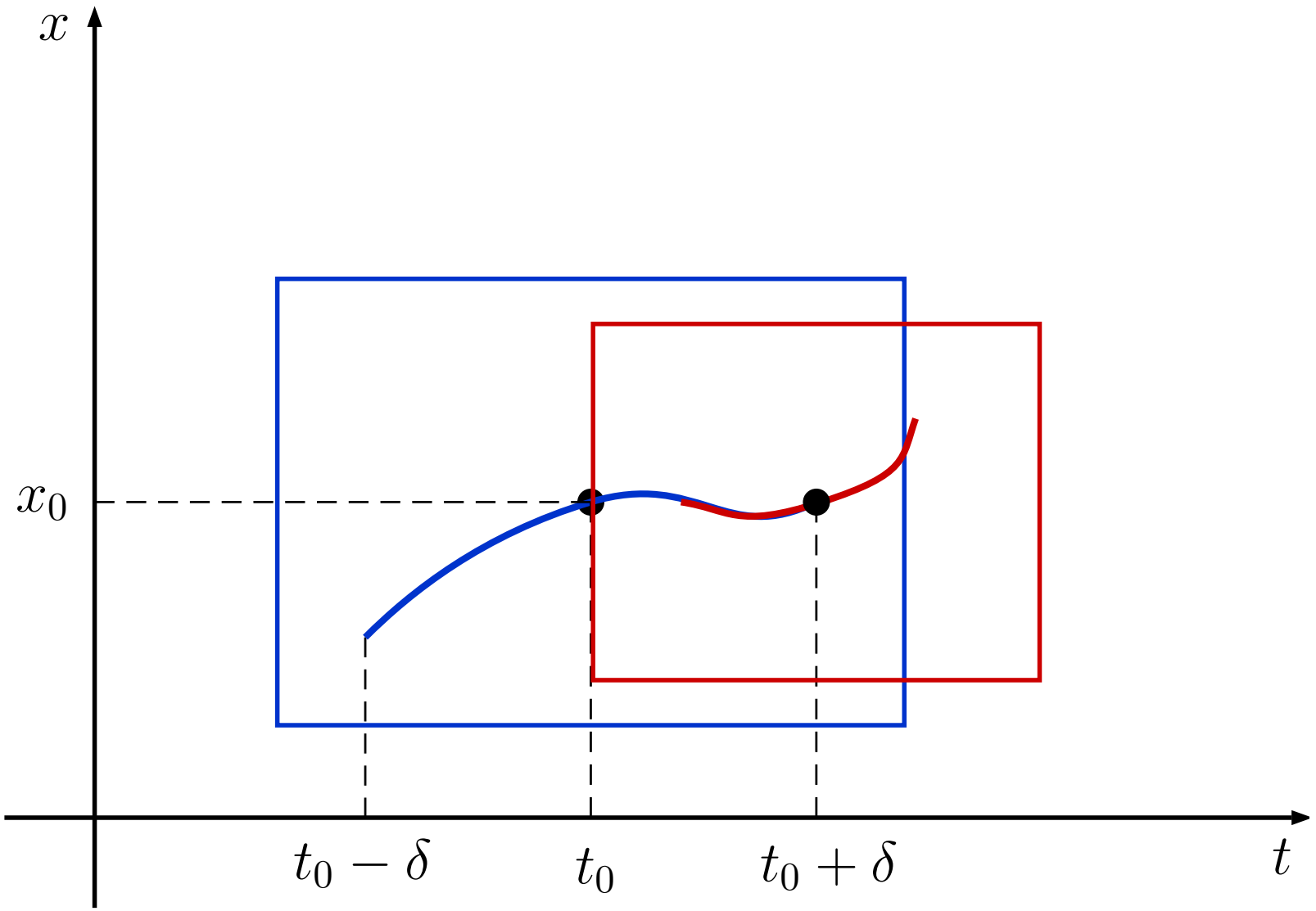
$f(t,x)$ は任意の長方形領域 $D = [a,b] \times [c,d]$ で連続で，リプシッツ条件を満たす．

証明：$x(t_0) = x_1(t_0) = x_2(t_0)$ という初期条件にコーシーの定理を適用すればよい（D を $(t_0, x_1(t_0))$ を中心とする長方形領域とする）．

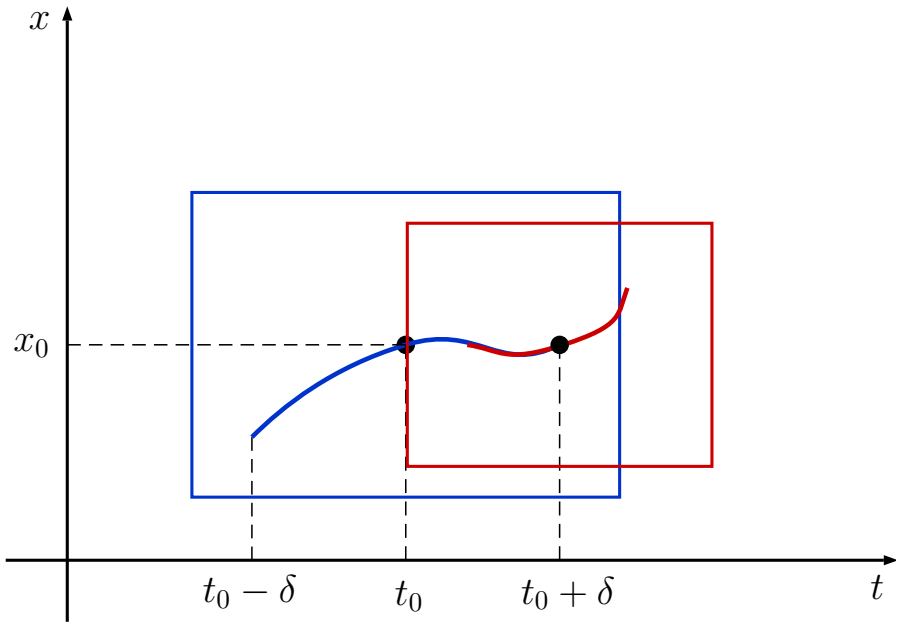
解の延長のアイデア



アイデア



解の延長のアイデア



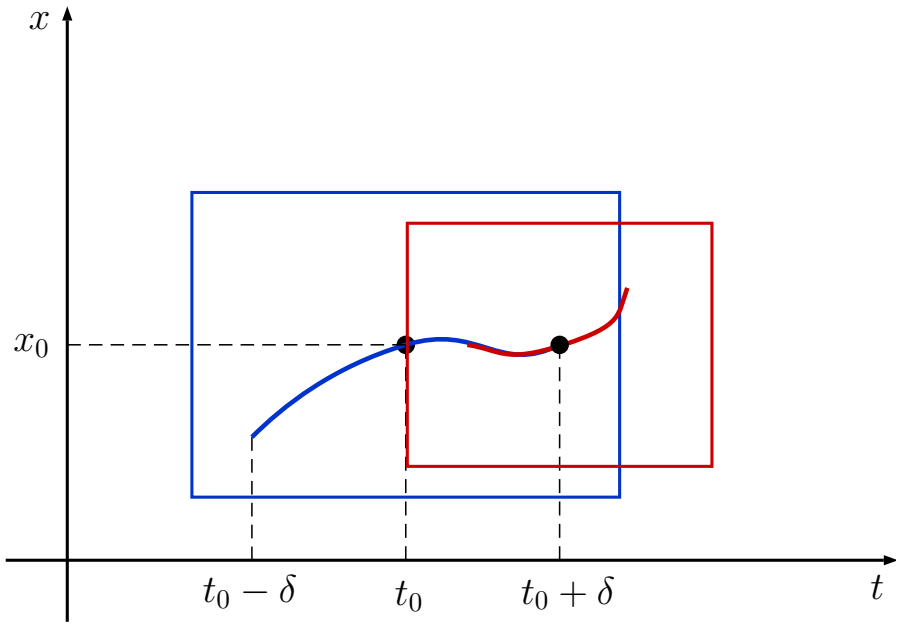
1. コーシーの定理より解 $x(t)$ は $I_1 = [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ で存在
2. 点 $(t_0 + \delta_1, x(t_0 + \delta_1))$ を初期値として再びコーシーの定理を適用 $\Rightarrow$ 解は $I_2 = [t_0 + \delta_1 - \delta_2, t_0 + \delta_1 + \delta_2]$ で存在.
   一意性より $[t_0 + \delta_1 - \delta_2, t_0 + \delta_1]$ では最初の解と一致.

これを繰り返す.

2 つの場合が考えられる（$t \to -\infty$ も同じ）

- 解を延長できる幅（δ_n のこと）が短くなり，合計で有限な値に収束し，解は $\pm\infty$ に発散する
- 解を $t \to \infty$ まで延長できる

解の延長のアイデア



1. コーシーの定理より解 $x(t)$ は $I_1 = [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ で存在
2. 点 $(t_0 + \delta_1, x(t_0 + \delta_1))$ を初期値として再びコーシーの定理を適用 $\Rightarrow$ 解は $I_2 = [t_0 + \delta_1 - \delta_2, t_0 + \delta_1 + \delta_2]$ で存在.

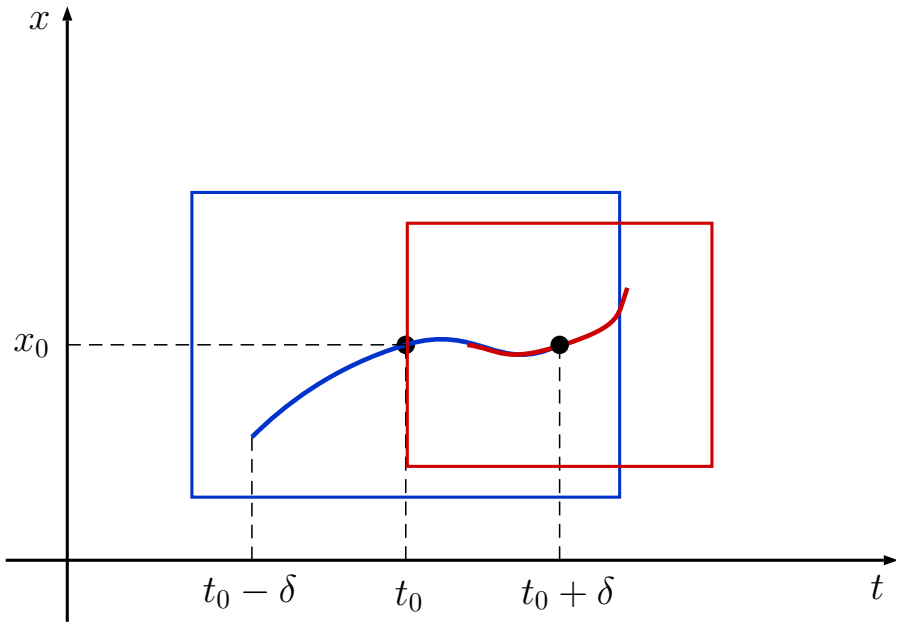
一意性より $[t_0 + \delta_1 - \delta_2, t_0 + \delta_1]$ では最初の解と一致.

これを繰り返す.

2 つの場合が考えられる（$t \to -\infty$ も同じ）

- 解を延長できる幅（δ_n のこと）が短くなり，合計で有限な値に収束し，解は $\pm\infty$ に発散する
- 解を $t \to \infty$ まで延長できる

解の延長のアイデア



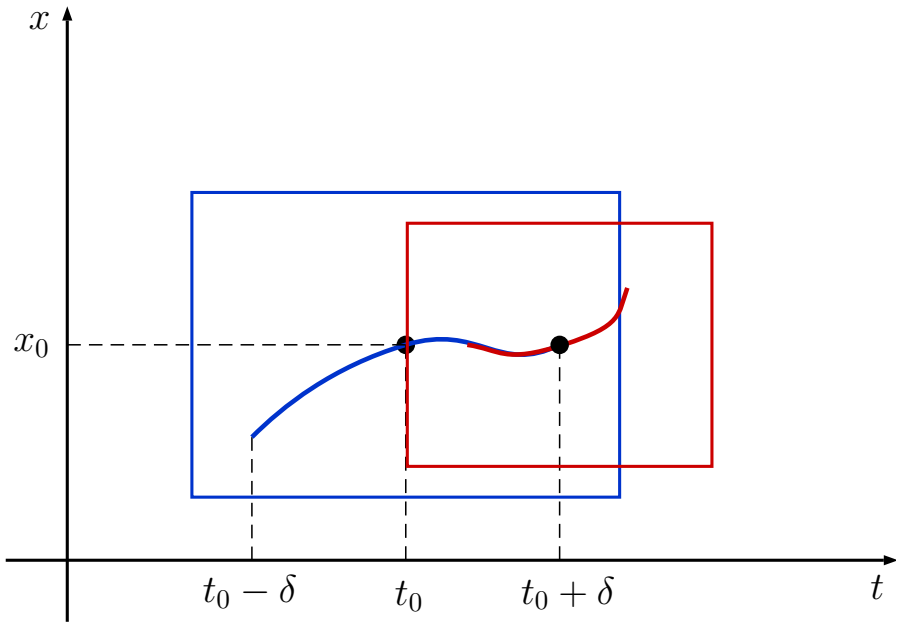
1. コーシーの定理より解 $x(t)$ は $I_1 = [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ で存在
2. 点 $(t_0 + \delta_1, x(t_0 + \delta_1))$ を初期値として再びコーシーの定理を適用 $\Rightarrow$ 解は $I_2 = [t_0 + \delta_1 - \delta_2, t_0 + \delta_1 + \delta_2]$ で存在.
   一意性より $[t_0 + \delta_1 - \delta_2, t_0 + \delta_1]$ では最初の解と一致.

これを繰り返す.

2 つの場合が考えられる（$t \to -\infty$ も同じ）

- 解を延長できる幅（δ_n のこと）が短くなり，合計で有限な値に収束し，解は $\pm\infty$ に発散する
- 解を $t \to \infty$ まで延長できる

解の延長のアイデア



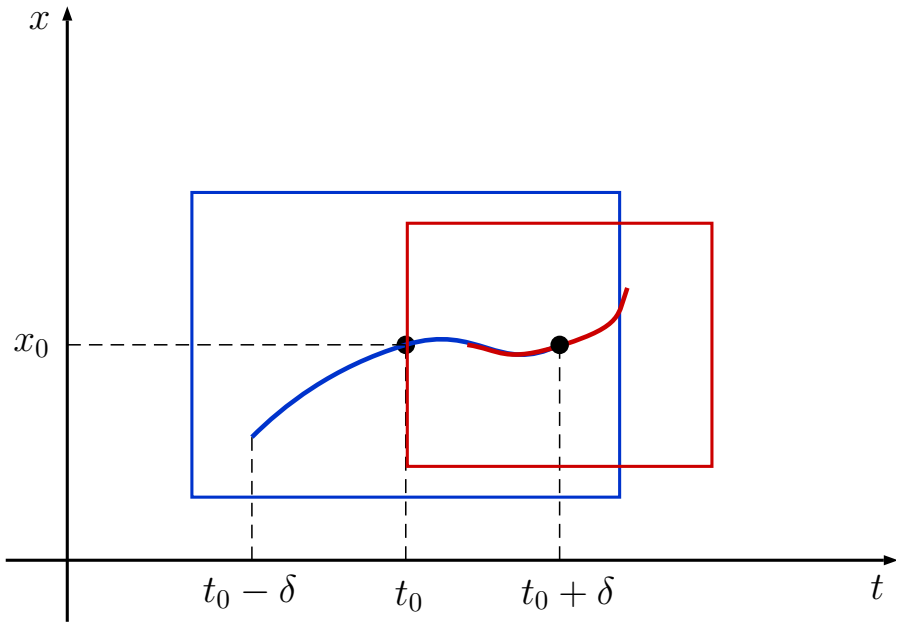
1. コーシーの定理より解 $x(t)$ は $I_1 = [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ で存在
2. 点 $(t_0 + \delta_1, x(t_0 + \delta_1))$ を初期値として再びコーシーの定理を適用 $\Rightarrow$ 解は $I_2 = [t_0 + \delta_1 - \delta_2, t_0 + \delta_1 + \delta_2]$ で存在.
   一意性より $[t_0 + \delta_1 - \delta_2, t_0 + \delta_1]$ では最初の解と一致.

これを繰り返す.

2 つの場合が考えられる（$t \to -\infty$ も同じ）

- 解を延長できる幅（δ_n のこと）が短くなり，合計で有限な値に収束し，解は $\pm\infty$ に発散する
- 解を $t \to \infty$ まで延長できる

解の延長のアイデア



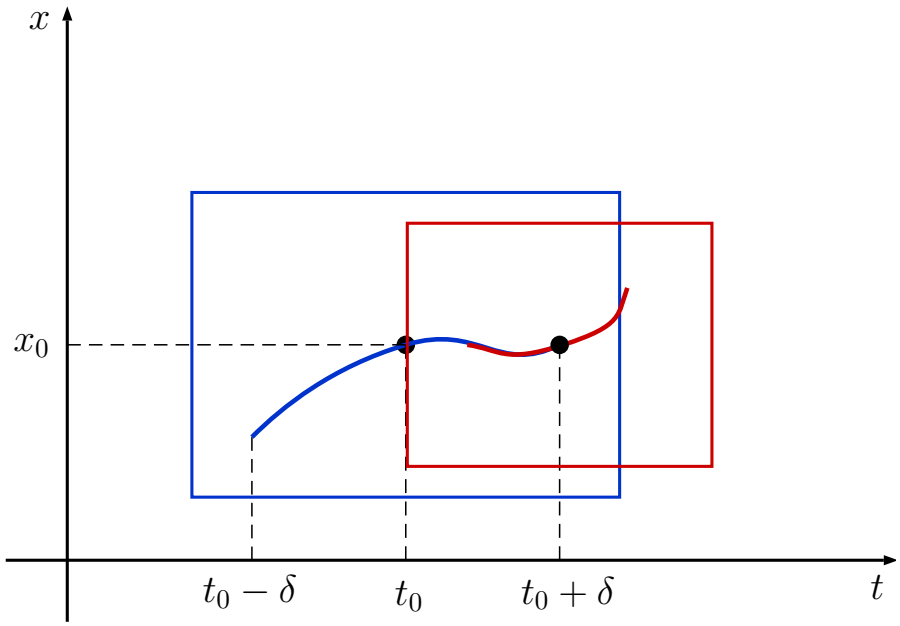
1. コーシーの定理より解 $x(t)$ は $I_1 = [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ で存在
2. 点 $(t_0 + \delta_1, x(t_0 + \delta_1))$ を初期値として再びコーシーの定理を適用 $\Rightarrow$ 解は $I_2 = [t_0 + \delta_1 - \delta_2, t_0 + \delta_1 + \delta_2]$ で存在.
   一意性より $[t_0 + \delta_1 - \delta_2, t_0 + \delta_1]$ では最初の解と一致.

これを繰り返す.

2 つの場合が考えられる（$t \to -\infty$ も同じ）

- 解を延長できる幅（δ_n のこと）が短くなり，合計で有限な値に収束し，解は $\pm\infty$ に発散する
- 解を $t \to \infty$ まで延長できる

解の延長のアイデア



1. コーシーの定理より解 $x(t)$ は $I_1 = [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ で存在
2. 点 $(t_0 + \delta_1, x(t_0 + \delta_1))$ を初期値として再びコーシーの定理を適用 $\Rightarrow$ 解は $I_2 = [t_0 + \delta_1 - \delta_2, t_0 + \delta_1 + \delta_2]$ で存在.
   一意性より $[t_0 + \delta_1 - \delta_2, t_0 + \delta_1]$ では最初の解と一致.

これを繰り返す.

2 つの場合が考えられる（$t \to -\infty$ も同じ）

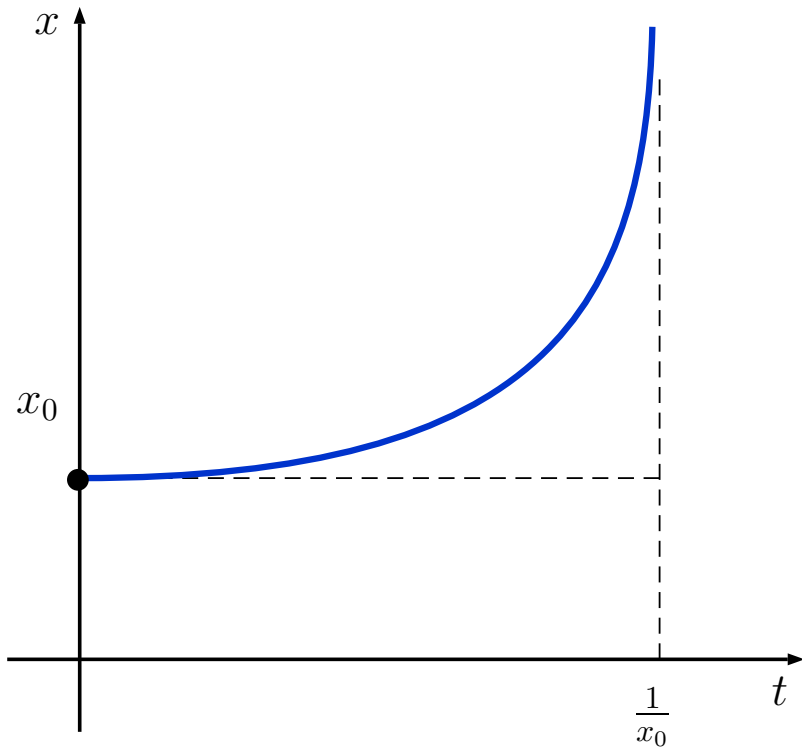
- 解を延長できる幅（δ_n のこと）が短くなり，合計で有限な値に収束し，解は $\pm\infty$ に発散する
- 解を $t \to \infty$ まで延長できる

例

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

解は

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$



最大解

定義

$\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^n$ は $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ の解で，延長できないとき，$\boldsymbol{x}$ は **最大解**（maximal solution）であるという．

つまり，I より広い区間で定義され，I 上で $\boldsymbol{x}(t)$ と一致するような解は存在しない．

定理（最大解の存在）

$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ は開集合，$\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ は連続関数，$\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ は一意的であるとする．このとき，$(t_0, x_0) \in D$ に対して，次を満たす区間 $I \subset \mathbb{R}$ と関数 $\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^n$ が存在する：

- $t_0 \in I$
- $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$
- $\boldsymbol{x}(t)$ は $\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{f}(t, x)$ の最大解である．

この I と $\boldsymbol{x}(t)$ は一意である．

最大解

定義

$\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^n$ は $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ の解で，延長できないとき，$\boldsymbol{x}$ は **最大解**（maximal solution）であるという．
つまり，I より広い区間で定義され，I 上で $\boldsymbol{x}(t)$ と一致するような解は存在しない．

定理（最大解の存在）

$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ は開集合，$\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ は連続関数，$\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ は一意的であるとする．このとき，$(t_0, x_0) \in D$ に対して，次を満たす区間 $I \subset \mathbb{R}$ と関数 $\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^n$ が存在する：

- $t_0 \in I$
- $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$
- $\boldsymbol{x}(t)$ は $\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{f}(t, x)$ の最大解である．

この I と $\boldsymbol{x}(t)$ は一意である．

最大解

定義

$\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^n$ は $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ の解で，延長できないとき，$\boldsymbol{x}$ は **最大解**（maximal solution）であるという．
つまり，I より広い区間で定義され，I 上で $\boldsymbol{x}(t)$ と一致するような解は存在しない．

定理（最大解の存在）

$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ は開集合，$\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ は連続関数，$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ は一意的であるとする．このとき，$(t_0, x_0) \in D$ に対して，次を満たす区間 $I \subset \mathbb{R}$ と関数 $\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^n$ が存在する：

- $t_0 \in I$
- $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$
- $\boldsymbol{x}(t)$ は $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, x)$ の最大解である．

この I と $\boldsymbol{x}(t)$ は一意である．

最大解の存在の証明

以下では単独 ODE（$n = 1$）について示すが，$n > 1$ の場合は全く同じ．

(1) 一意性

$x_1 : I_1 \to \mathbb{R}, x_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ が $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ の二つの最大解であるとする．$I = I_1 \cup I_2$ とおく．

ODE の一意性より，$x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$（$t_0$ を含む）．

よって，$x : I \to \mathbb{R}$ を

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in I_1 \\ x_2(t), & t \in I_2 \end{cases}$$

で定義できる．

このとき，$x'(t) = f(t, x(t))\ \forall t \in I$．

x_1, x_2 は最大解より，$I_1 = I_2 = I$，$x_1(t) = x_2(t) = x(t)\ \forall t \in I$．

最大解の存在の証明

以下では単独 ODE（$n = 1$）について示すが，$n > 1$ の場合は全く同じ．

(1) 一意性

$x_1 : I_1 \to \mathbb{R}, x_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ が $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ の二つの最大解であるとする．$I = I_1 \cup I_2$ とおく．

ODE の一意性より，$x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$（$t_0$ を含む）．

よって，$x : I \to \mathbb{R}$ を

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in I_1 \\ x_2(t), & t \in I_2 \end{cases}$$

で定義できる．

このとき，$x'(t) = f(t, x(t))\ \forall t \in I$．

x_1, x_2 は最大解より，$I_1 = I_2 = I$，$x_1(t) = x_2(t) = x(t)\ \forall t \in I$．

最大解の存在の証明

以下では単独 ODE（$n = 1$）について示すが，$n > 1$ の場合は全く同じ．

(1) **一意性**

$x_1 : I_1 \to \mathbb{R}, x_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ が $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ の二つの最大解であるとする．$I = I_1 \cup I_2$ とおく．

ODE の一意性より，$x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$（$t_0$ を含む）．

よって，$x : I \to \mathbb{R}$ を

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in I_1 \\ x_2(t), & t \in I_2 \end{cases}$$

で定義できる．

このとき，$x'(t) = f(t, x(t))\ \forall t \in I$．

x_1, x_2 は最大解より，$I_1 = I_2 = I$，$x_1(t) = x_2(t) = x(t)\ \forall t \in I$．

最大解の存在の証明

以下では単独 ODE（$n = 1$）について示すが，$n > 1$ の場合は全く同じ．

(1) **一意性**

$x_1 : I_1 \to \mathbb{R}, x_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ が $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ の二つの最大解であるとする．$I = I_1 \cup I_2$ とおく．

ODE の一意性より，$x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$（$t_0$ を含む）．

よって，$x : I \to \mathbb{R}$ を

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in I_1 \\ x_2(t), & t \in I_2 \end{cases}$$

で定義できる．

このとき，$x'(t) = f(t, x(t))\ \forall t \in I$．

x_1, x_2 は最大解より，$I_1 = I_2 = I$，$x_1(t) = x_2(t) = x(t)\ \forall t \in I$．

最大解の存在の証明

以下では単独 ODE（$n = 1$）について示すが，$n > 1$ の場合は全く同じ．

(1) **一意性**

$x_1 : I_1 \to \mathbb{R}, x_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ が $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ の二つの最大解であるとする．$I = I_1 \cup I_2$ とおく．
ODE の一意性より，$x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$（$t_0$ を含む）．
よって，$x : I \to \mathbb{R}$ を

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in I_1 \\ x_2(t), & t \in I_2 \end{cases}$$

で定義できる．
このとき，$x'(t) = f(t, x(t))\ \forall t \in I$．
x_1, x_2 は最大解より，$I_1 = I_2 = I$，$x_1(t) = x_2(t) = x(t)\ \forall t \in I$．

最大解の存在の証明

以下では単独 ODE（$n = 1$）について示すが，$n > 1$ の場合は全く同じ．

(1) **一意性**

$x_1 : I_1 \to \mathbb{R}, x_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ が $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ の二つの最大解であるとする．$I = I_1 \cup I_2$ とおく．
ODE の一意性より，$x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$（$t_0$ を含む）．
よって，$x : I \to \mathbb{R}$ を

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in I_1 \\ x_2(t), & t \in I_2 \end{cases}$$

で定義できる．
このとき，$x'(t) = f(t, x(t))\ \forall t \in I$．
x_1, x_2 は最大解より，$I_1 = I_2 = I$，$x_1(t) = x_2(t) = x(t)\ \forall t \in I$．

最大解の存在の証明

以下では単独 ODE（$n = 1$）について示すが，$n > 1$ の場合は全く同じ．

(1) **一意性**

$x_1 : I_1 \to \mathbb{R}, x_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ が $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ の二つの最大解であるとする．$I = I_1 \cup I_2$ とおく．
ODE の一意性より，$x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$（$t_0$ を含む）．
よって，$x : I \to \mathbb{R}$ を

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in I_1 \\ x_2(t), & t \in I_2 \end{cases}$$

で定義できる．
このとき，$x'(t) = f(t, x(t))\ \forall t \in I$．
x_1, x_2 は最大解より，$I_1 = I_2 = I$，$x_1(t) = x_2(t) = x(t)\ \forall t \in I$．

最大解の存在の証明

(2) 存在

解 $x(t)$ に対して，I_x をその定義域とする．全ての解の集合：

$$V = \left\{ x : I_x \to \mathbb{R};\ \ x'(t) = f(t, x(t))\ \ \forall t \in I_x,\ x(t_0) = x_0 \right\}$$

ペアノの定理より，V は空ではない．$I = \bigcup_{x \in V} I_x$ とおく．

ODE の一意性より，もし $t \in I_{x_1} \cap I_{x_2}$ $(x_1, x_2 \in V)$ があれば，
$x_1(t) = x_2(t)$ が成立．
よって，$y : I \to \mathbb{R}$ を

$$y(t) = x(t), \qquad \text{ただし，} x \text{ は } t \in I_x \text{ となる } V \text{ の元である}$$

と定義できる．
作り方より，$y(t)$ は最大解．

最大解の存在の証明

(2) 存在

解 $x(t)$ に対して，I_x をその定義域とする．全ての解の集合：

$$V = \left\{ x : I_x \to \mathbb{R};\ \ x'(t) = f(t, x(t))\ \ \forall t \in I_x,\ x(t_0) = x_0 \right\}$$

ペアノの定理より，V は空ではない．$I = \bigcup_{x \in V} I_x$ とおく．

ODE の一意性より，もし $t \in I_{x_1} \cap I_{x_2}$ $(x_1, x_2 \in V)$ があれば，
$x_1(t) = x_2(t)$ が成立．
よって，$y : I \to \mathbb{R}$ を

$$y(t) = x(t), \qquad \text{ただし，} x \text{ は } t \in I_x \text{ となる } V \text{ の元である}$$

と定義できる．
作り方より，$y(t)$ は最大解．

最大解の存在の証明

(2) 存在

解 $x(t)$ に対して，I_x をその定義域とする．全ての解の集合：

$$V = \left\{ x : I_x \to \mathbb{R};\ \ x'(t) = f(t, x(t))\ \ \forall t \in I_x,\ x(t_0) = x_0 \right\}$$

ペアノの定理より，V は空ではない．$I = \bigcup_{x \in V} I_x$ とおく．

ODE の一意性より，もし $t \in I_{x_1} \cap I_{x_2}$（$x_1, x_2 \in V$）があれば，
$x_1(t) = x_2(t)$ が成立．
よって，$y : I \to \mathbb{R}$ を

$$y(t) = x(t), \qquad \text{ただし，} x \text{ は } t \in I_x \text{ となる } V \text{ の元である}$$

と定義できる．
作り方より，$y(t)$ は最大解．

最大解の存在の証明

(2) 存在

解 $x(t)$ に対して，I_x をその定義域とする．全ての解の集合：

$$V = \left\{ x : I_x \to \mathbb{R};\ \ x'(t) = f(t, x(t))\ \ \forall t \in I_x,\ x(t_0) = x_0 \right\}$$

ペアノの定理より，V は空ではない．$I = \bigcup_{x \in V} I_x$ とおく．

ODE の一意性より，もし $t \in I_{x_1} \cap I_{x_2}$（$x_1, x_2 \in V$）があれば，
$x_1(t) = x_2(t)$ が成立．
よって，$y : I \to \mathbb{R}$ を

$$y(t) = x(t), \qquad \text{ただし，} x \text{ は } t \in I_x \text{ となる } V \text{ の元である}$$

と定義できる．
作り方より，$y(t)$ は最大解．

最大解の存在の証明

(2) 存在

解 $x(t)$ に対して，I_x をその定義域とする．全ての解の集合：

$$V = \left\{ x : I_x \to \mathbb{R};\ \ x'(t) = f(t, x(t))\ \ \forall t \in I_x,\ x(t_0) = x_0 \right\}$$

ペアノの定理より，V は空ではない．$I = \bigcup_{x \in V} I_x$ とおく．

ODE の一意性より，もし $t \in I_{x_1} \cap I_{x_2}$（$x_1, x_2 \in V$）があれば，$x_1(t) = x_2(t)$ が成立．

よって，$y : I \to \mathbb{R}$ を

$$y(t) = x(t), \qquad \text{ただし，} x \text{ は } t \in I_x \text{ となる } V \text{ の元である}$$

と定義できる．

作り方より，$y(t)$ は最大解．

最大解の存在の証明

(2) 存在

解 $x(t)$ に対して，I_x をその定義域とする．全ての解の集合：

$$V = \left\{ x : I_x \to \mathbb{R};\ \ x'(t) = f(t, x(t))\ \ \forall t \in I_x,\ x(t_0) = x_0 \right\}$$

ペアノの定理より，V は空ではない．$I = \bigcup_{x \in V} I_x$ とおく．

ODE の一意性より，もし $t \in I_{x_1} \cap I_{x_2}$（$x_1, x_2 \in V$）があれば，
$x_1(t) = x_2(t)$ が成立．
よって，$y : I \to \mathbb{R}$ を

$$y(t) = x(t), \qquad \text{ただし，} x \text{ は } t \in I_x \text{ となる } V \text{ の元である}$$

と定義できる．
作り方より，$y(t)$ は最大解．

最大解の存在の証明

(2) 存在

解 $x(t)$ に対して，I_x をその定義域とする．全ての解の集合：

$$V = \left\{ x : I_x \to \mathbb{R};\ \ x'(t) = f(t, x(t))\ \ \forall t \in I_x,\ x(t_0) = x_0 \right\}$$

ペアノの定理より，V は空ではない．$I = \bigcup_{x \in V} I_x$ とおく．

ODE の一意性より，もし $t \in I_{x_1} \cap I_{x_2}$（$x_1, x_2 \in V$）があれば，
$x_1(t) = x_2(t)$ が成立．
よって，$y : I \to \mathbb{R}$ を

$$y(t) = x(t), \qquad \text{ただし，} x \text{ は } t \in I_x \text{ となる } V \text{ の元である}$$

と定義できる．
作り方より，$y(t)$ は最大解．

最大解の存在の証明

注：上の定理の区間 I は開区間である.

証明：$\widetilde{t} \in I$ のとき，$\widetilde{t}$ のある近傍が I に含まれることを示す.
定理の最大解 x に対して $x(\widetilde{t}) = \widetilde{x}$ とすると，

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t,x) \\ x(\widetilde{t}) &= \widetilde{x} \end{cases}$$

の解 $y(t)$ は $(\widetilde{t}-\delta, \widetilde{t}+\delta)$ で存在する（ペアノ）.
D 開集合，$(\widetilde{t},\widetilde{x}) \in D \Rightarrow$ その近傍も $\subset D$.
一意性よりこの区間で $x = y$.
最大解の定義より $(\widetilde{t}-\delta, \widetilde{t}+\delta) \subset I \Rightarrow I$ は開区間.

最大解の存在の証明

注：上の定理の区間 I は開区間である.

証明：$\widetilde{t} \in I$ のとき，$\widetilde{t}$ のある近傍が I に含まれることを示す.
定理の最大解 x に対して $x(\widetilde{t}) = \widetilde{x}$ とすると,

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t,x) \\ x(\widetilde{t}) &= \widetilde{x} \end{cases}$$

の解 $y(t)$ は $(\widetilde{t}-\delta, \widetilde{t}+\delta)$ で存在する（ペアノ）.
D 開集合，$(\widetilde{t}, \widetilde{x}) \in D \Rightarrow$ その近傍も $\subset D$.
一意性よりこの区間で $x = y$.
最大解の定義より $(\widetilde{t}-\delta, \widetilde{t}+\delta) \subset I \Rightarrow I$ は開区間.

最大解の存在の証明

注：上の定理の区間 I は開区間である.

証明：$\widetilde{t} \in I$ のとき，$\widetilde{t}$ のある近傍が I に含まれることを示す.
定理の最大解 x に対して $x(\widetilde{t}) = \widetilde{x}$ とすると，

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t,x) \\ x(\widetilde{t}) &= \widetilde{x} \end{cases}$$

の解 $y(t)$ は $(\widetilde{t}-\delta, \widetilde{t}+\delta)$ で存在する（ペアノ）.
D 開集合，$(\widetilde{t},\widetilde{x}) \in D \Rightarrow$ その近傍も $\subset D$.
一意性よりこの区間で $x = y$.
最大解の定義より $(\widetilde{t}-\delta, \widetilde{t}+\delta) \subset I \Rightarrow I$ は開区間.

最大解の存在の証明

注：上の定理の区間 I は開区間である.

証明：$\widetilde{t} \in I$ のとき，$\widetilde{t}$ のある近傍が I に含まれることを示す.
定理の最大解 x に対して $x(\widetilde{t}) = \widetilde{x}$ とすると，

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t,x) \\ x(\widetilde{t}) &= \widetilde{x} \end{cases}$$

の解 $y(t)$ は $(\widetilde{t}-\delta, \widetilde{t}+\delta)$ で存在する（ペアノ）.
D 開集合，$(\widetilde{t}, \widetilde{x}) \in D \Rightarrow$ その近傍も $\subset D$.
一意性よりこの区間で $x = y$.
最大解の定義より $(\widetilde{t}-\delta, \widetilde{t}+\delta) \subset I \Rightarrow I$ は開区間.

最大解の存在の証明

注：上の定理の区間 I は開区間である.

証明：$\widetilde{t} \in I$ のとき，$\widetilde{t}$ のある近傍が I に含まれることを示す.
定理の最大解 x に対して $x(\widetilde{t}) = \widetilde{x}$ とすると，

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t,x) \\ x(\widetilde{t}) &= \widetilde{x} \end{cases}$$

の解 $y(t)$ は $(\widetilde{t}-\delta, \widetilde{t}+\delta)$ で存在する（ペアノ）.
D 開集合，$(\widetilde{t}, \widetilde{x}) \in D \Rightarrow$ その近傍も $\subset D$.
一意性よりこの区間で $x = y$.
最大解の定義より $(\widetilde{t}-\delta, \widetilde{t}+\delta) \subset I \Rightarrow I$ は開区間.

最大解の存在の証明

注：上の定理の区間 I は開区間である.

証明：$\widetilde{t} \in I$ のとき，$\widetilde{t}$ のある近傍が I に含まれることを示す.
定理の最大解 x に対して $x(\widetilde{t}) = \widetilde{x}$ とすると，

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t,x) \\ x(\widetilde{t}) &= \widetilde{x} \end{cases}$$

の解 $y(t)$ は $(\widetilde{t}-\delta, \widetilde{t}+\delta)$ で存在する（ペアノ）.
D 開集合，$(\widetilde{t}, \widetilde{x}) \in D \Rightarrow$ その近傍も $\subset D$.
一意性よりこの区間で $x = y$.
最大解の定義より $(\widetilde{t}-\delta, \widetilde{t}+\delta) \subset I \Rightarrow I$ は開区間.

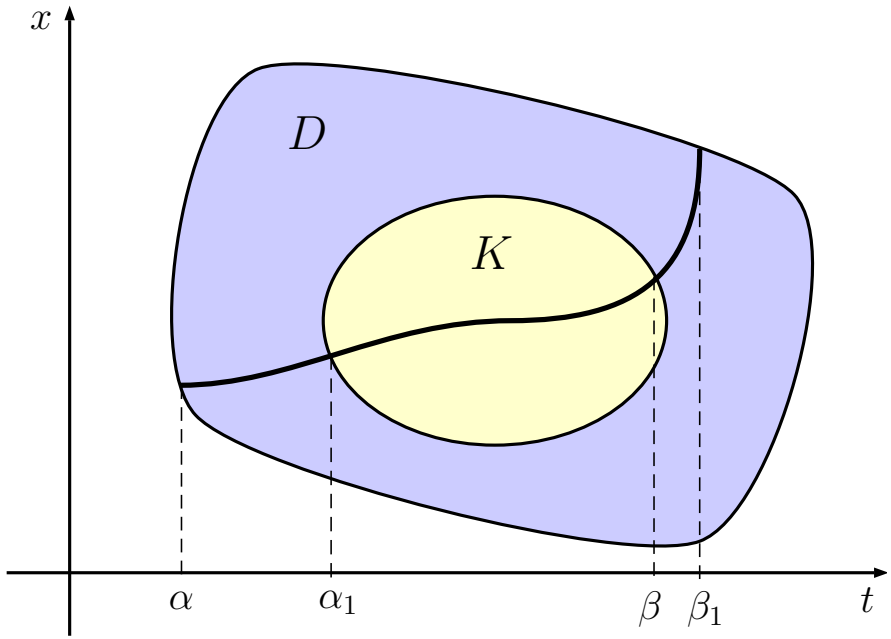
コンパクト集合との関係

定理（最大解とコンパクト集合の関係）

$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ は開集合，$\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ は連続関数，$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ は一意的であるとする．$K \subset D$ をコンパクト集合（有界閉集合）とする．
このとき，任意の最大解 $\boldsymbol{x} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}, \qquad \alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$$

が存在し，次が成り立つ： $\quad (t, \boldsymbol{x}(t)) \notin K \quad \forall t \in (\alpha, \alpha_1) \cup (\beta_1, \beta).$



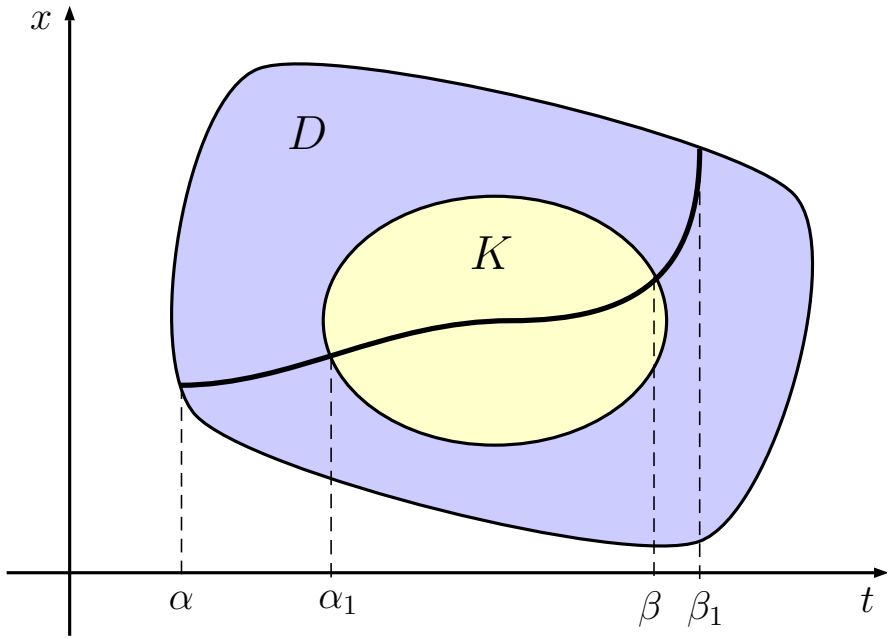
コンパクト集合との関係

定理（最大解とコンパクト集合の関係）

$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ は開集合，$\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ は連続関数，$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ は一意的であるとする．$K \subset D$ をコンパクト集合（有界閉集合）とする．
このとき，任意の最大解 $\boldsymbol{x} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}, \qquad \alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$$

が存在し，次が成り立つ： $(t, \boldsymbol{x}(t)) \notin K \quad \forall t \in (\alpha, \alpha_1) \cup (\beta_1, \beta).$



証明

背理法：最大解 $x(t)$ と実数列 $\{t_k\} \subset (\alpha, \beta)$ が存在して，

$$(t_k, x(t_k)) \in K \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{k\to\infty} t_k = \beta \quad (\text{または } \alpha)$$

- K コンパクト $\Rightarrow$ $\{x(t_k)\}$ は有界 $\Rightarrow$ 収束する部分列がある：$\lim_{m\to\infty} x(t_{k_m}) = z$
- $\{t_{k_m}\}$ 有界 $\Rightarrow$ $\beta < \infty$
- $(\beta, z) \in K$

$(\beta, z) \in K \subset D$ を初期値としてペアノの定理を用いる $\Rightarrow$ $\tilde{x}(t) : (\beta - \delta, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ の解が存在 $(\delta > 0)$．この解は $(\beta - \delta, \beta)$ では $x(t)$ と一致する（一意性より）．$y : (\alpha, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ を

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (\alpha, \beta) \\ \tilde{x}(t) & t \in [\beta, \beta + \delta) \end{cases}$$

で定義できる．この $y(t)$ は $x(t)$ の真の延長 $\Rightarrow$ $x(t)$ の最大性に矛盾．

証明

背理法：最大解 $x(t)$ と実数列 $\{t_k\} \subset (\alpha, \beta)$ が存在して，

$$(t_k, x(t_k)) \in K \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{k\to\infty} t_k = \beta \quad (\text{または } \alpha)$$

- K コンパクト $\Rightarrow$ $\{x(t_k)\}$ は有界 $\Rightarrow$ 収束する部分列がある：$\lim_{m\to\infty} x(t_{k_m}) = z$
- $\{t_{k_m}\}$ 有界 $\Rightarrow$ $\beta < \infty$
- $(\beta, z) \in K$

$(\beta, z) \in K \subset D$ を初期値としてペアノの定理を用いる $\Rightarrow$
$\tilde{x}(t) : (\beta - \delta, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ の解が存在 $(\delta > 0)$．この解は $(\beta - \delta, \beta)$ では $x(t)$ と一致する（一意性より）．$y : (\alpha, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ を

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (\alpha, \beta) \\ \tilde{x}(t) & t \in [\beta, \beta + \delta) \end{cases}$$

で定義できる．この $y(t)$ は $x(t)$ の真の延長 $\Rightarrow$ $x(t)$ の最大性に矛盾．

証明

背理法：最大解 $x(t)$ と実数列 $\{t_k\} \subset (\alpha, \beta)$ が存在して，

$$(t_k, x(t_k)) \in K \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{k\to\infty} t_k = \beta \quad (\text{または } \alpha)$$

- K コンパクト $\Rightarrow$ $\{x(t_k)\}$ は有界 $\Rightarrow$ 収束する部分列がある：$\lim_{m\to\infty} x(t_{k_m}) = z$
- $\{t_{k_m}\}$ 有界 $\Rightarrow$ $\beta < \infty$
- $(\beta, z) \in K$

$(\beta, z) \in K \subset D$ を初期値としてペアノの定理を用いる $\Rightarrow$
$\tilde{x}(t) : (\beta - \delta, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ の解が存在 $(\delta > 0)$．この解は $(\beta - \delta, \beta)$ では $x(t)$ と一致する（一意性より）．$y : (\alpha, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ を

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (\alpha, \beta) \\ \tilde{x}(t) & t \in [\beta, \beta + \delta) \end{cases}$$

で定義できる．この $y(t)$ は $x(t)$ の真の延長 $\Rightarrow$ $x(t)$ の最大性に矛盾．

証明

背理法：最大解 $x(t)$ と実数列 $\{t_k\} \subset (\alpha, \beta)$ が存在して，

$$(t_k, x(t_k)) \in K \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{k\to\infty} t_k = \beta \quad （または\ \alpha）$$

- K コンパクト $\Rightarrow$ $\{x(t_k)\}$ は有界 $\Rightarrow$ 収束する部分列がある：$\lim_{m\to\infty} x(t_{k_m}) = z$
- $\{t_{k_m}\}$ 有界 $\Rightarrow$ $\beta < \infty$
- $(\beta, z) \in K$

$(\beta, z) \in K \subset D$ を初期値としてペアノの定理を用いる $\Rightarrow$
$\tilde{x}(t) : (\beta - \delta, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ の解が存在（$\delta > 0$）．この解は $(\beta - \delta, \beta)$ では $x(t)$ と一致する（一意性より）．$y : (\alpha, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ を

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (\alpha, \beta) \\ \tilde{x}(t) & t \in [\beta, \beta + \delta) \end{cases}$$

で定義できる．この $y(t)$ は $x(t)$ の真の延長 $\Rightarrow$ $x(t)$ の最大性に矛盾．

証明

背理法：最大解 $x(t)$ と実数列 $\{t_k\} \subset (\alpha, \beta)$ が存在して，

$$(t_k, x(t_k)) \in K \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{k\to\infty} t_k = \beta \quad （または\ \alpha）$$

- K コンパクト $\Rightarrow$ $\{x(t_k)\}$ は有界 $\Rightarrow$ 収束する部分列がある：$\lim_{m\to\infty} x(t_{k_m}) = z$
- $\{t_{k_m}\}$ 有界 $\Rightarrow$ $\beta < \infty$
- $(\beta, z) \in K$

$(\beta, z) \in K \subset D$ を初期値としてペアノの定理を用いる $\Rightarrow$
$\tilde{x}(t) : (\beta - \delta, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ の解が存在（$\delta > 0$）．この解は $(\beta - \delta, \beta)$ では $x(t)$ と一致する（一意性より）．$y : (\alpha, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ を

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (\alpha, \beta) \\ \tilde{x}(t) & t \in [\beta, \beta + \delta) \end{cases}$$

で定義できる．この $y(t)$ は $x(t)$ の真の延長 $\Rightarrow$ $x(t)$ の最大性に矛盾．

証明

背理法：最大解 $x(t)$ と実数列 $\{t_k\} \subset (\alpha, \beta)$ が存在して，

$$(t_k, x(t_k)) \in K \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{k\to\infty} t_k = \beta \quad （または\ \alpha）$$

- K コンパクト $\Rightarrow$ $\{x(t_k)\}$ は有界 $\Rightarrow$ 収束する部分列がある：$\lim_{m\to\infty} x(t_{k_m}) = z$
- $\{t_{k_m}\}$ 有界 $\Rightarrow$ $\beta < \infty$
- $(\beta, z) \in K$

$(\beta, z) \in K \subset D$ を初期値としてペアノの定理を用いる $\Rightarrow$
$\widetilde{x}(t) : (\beta - \delta, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ の解が存在（$\delta > 0$）．この解は $(\beta - \delta, \beta)$ では $x(t)$ と一致する（一意性より）．$y : (\alpha, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ を

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (\alpha, \beta) \\ \widetilde{x}(t) & t \in [\beta, \beta + \delta) \end{cases}$$

で定義できる．この $y(t)$ は $x(t)$ の真の延長 $\Rightarrow$ $x(t)$ の最大性に矛盾．

証明

背理法：最大解 $x(t)$ と実数列 $\{t_k\} \subset (\alpha, \beta)$ が存在して，

$$(t_k, x(t_k)) \in K \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{k\to\infty} t_k = \beta \quad （または\ \alpha）$$

- K コンパクト $\Rightarrow$ $\{x(t_k)\}$ は有界 $\Rightarrow$ 収束する部分列がある：$\lim_{m\to\infty} x(t_{k_m}) = z$
- $\{t_{k_m}\}$ 有界 $\Rightarrow$ $\beta < \infty$
- $(\beta, z) \in K$

$(\beta, z) \in K \subset D$ を初期値としてペアノの定理を用いる $\Rightarrow$
$\widetilde{x}(t) : (\beta - \delta, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ の解が存在（$\delta > 0$）．この解は $(\beta - \delta, \beta)$ では $x(t)$ と一致する（一意性より）．$y : (\alpha, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ を

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (\alpha, \beta) \\ \widetilde{x}(t) & t \in [\beta, \beta + \delta) \end{cases}$$

で定義できる．この $y(t)$ は $x(t)$ の真の延長 $\Rightarrow$ $x(t)$ の最大性に矛盾．

証明

背理法：最大解 $x(t)$ と実数列 $\{t_k\} \subset (\alpha, \beta)$ が存在して，

$$(t_k, x(t_k)) \in K \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{k\to\infty} t_k = \beta \quad （または\ \alpha）$$

- K コンパクト $\Rightarrow$ $\{x(t_k)\}$ は有界 $\Rightarrow$ 収束する部分列がある：$\lim_{m\to\infty} x(t_{k_m}) = z$
- $\{t_{k_m}\}$ 有界 $\Rightarrow$ $\beta < \infty$
- $(\beta, z) \in K$

$(\beta, z) \in K \subset D$ を初期値としてペアノの定理を用いる $\Rightarrow$
$\widetilde{x}(t) : (\beta - \delta, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ の解が存在（$\delta > 0$）．この解は $(\beta - \delta, \beta)$ では $x(t)$ と一致する（一意性より）．$y : (\alpha, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ を

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (\alpha, \beta) \\ \widetilde{x}(t) & t \in [\beta, \beta + \delta) \end{cases}$$

で定義できる．この $y(t)$ は $x(t)$ の真の延長 $\Rightarrow$ $x(t)$ の最大性に矛盾．

証明

背理法：最大解 $x(t)$ と実数列 $\{t_k\} \subset (\alpha, \beta)$ が存在して，

$$(t_k, x(t_k)) \in K \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{k\to\infty} t_k = \beta \quad （または\ \alpha）$$

- K コンパクト $\Rightarrow$ $\{x(t_k)\}$ は有界 $\Rightarrow$ 収束する部分列がある：$\lim_{m\to\infty} x(t_{k_m}) = z$
- $\{t_{k_m}\}$ 有界 $\Rightarrow$ $\beta < \infty$
- $(\beta, z) \in K$

$(\beta, z) \in K \subset D$ を初期値としてペアノの定理を用いる $\Rightarrow$
$\widetilde{x}(t) : (\beta - \delta, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ の解が存在（$\delta > 0$）．この解は $(\beta - \delta, \beta)$ では $x(t)$ と一致する（一意性より）．$y : (\alpha, \beta + \delta) \to \mathbb{R}$ を

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (\alpha, \beta) \\ \widetilde{x}(t) & t \in [\beta, \beta + \delta) \end{cases}$$

で定義できる．この $y(t)$ は $x(t)$ の真の延長 $\Rightarrow$ $x(t)$ の最大性に矛盾．

証明

注 :「この解は $(\beta - \delta, \beta)$ では $x(t)$ と一致する」というのは
すぐには言えない（x は β を込めて定義されない可能性がある）ので,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists j : \quad |x(t_j) - z| < \varepsilon$$

を考慮して，ペアノの定理の精密化を $(t_j, x(t_j))$ に対して用いる
$\Rightarrow$ 同じように $(\beta - \delta, \beta + \delta)$ での解の存在が言える.

証明

注 :「この解は $(\beta-\delta,\beta)$ では $x(t)$ と一致する」というのは
すぐには言えない（x は β を込めて定義されない可能性がある）ので,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists j: \quad |x(t_j) - z| < \varepsilon$$

を考慮して，ペアノの定理の精密化を $(t_j, x(t_j))$ に対して用いる
$\Rightarrow$ 同じように $(\beta-\delta,\beta+\delta)$ での解の存在が言える.

証明

注 :「この解は $(\beta - \delta, \beta)$ では $x(t)$ と一致する」というのは
すぐには言えない（x は β を込めて定義されない可能性がある）ので,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists j : \quad |x(t_j) - z| < \varepsilon$$

を考慮して，ペアノの定理の精密化を $(t_j, x(t_j))$ に対して用いる
$\Rightarrow$ 同じように $(\beta - \delta, \beta + \delta)$ での解の存在が言える.

微分積分学続論 II： 第 14 回

Karel Svadlenka

2020 年 7 月 15 日

■パラメータ（初期値）に関する解の連続性と微分可能性

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} & = f(t,x,\lambda) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

の解がパラメータ λ に連続的に依存するか調べる.

定理

$f(t,x,\lambda)$ が $\overline{E} = [a,b] \times [c,d] \times [e,g]$ において連続で， x についてリプシッツ条件

$$|f(t,x_1,\lambda) - f(t,x_2,\lambda)| \leq L|x_1 - x_2| \qquad \forall (t,x_1,\lambda),(t,x_2,\lambda) \in \overline{E}$$

を満たすならば，(P_λ) の解 $x(t,\lambda)$ は λ について連続である.

初期値に関する連続性はこれより従う：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = g(t,x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases} \quad \xrightarrow{x=u+x_0} \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} & = g(t,u+x_0) = f(t,u,x_0) \\ u(t_0) & = 0 \end{cases}$$

■証明

$\varepsilon > 0$ と t を固定（$t \in [a,b]$）. $\delta > 0$ を十分小さくとれば， $|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$ をみたす $\lambda_1, \lambda_2 \in [e,g]$ に対して，

$$|x(t,\lambda_1) - x(t,\lambda_2)| \leq C\varepsilon$$

が成り立つことを示す（ここで，C は t に依る定数）.

f が有界閉集合 $\overline{E}$ 上で連続 $\Rightarrow$ $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ があって，$|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$ ならば，

$$\sup_{(t,x) \in [a,b] \times [c,d]} |f(t,x,\lambda_1) - f(t,x,\lambda_2)| < \varepsilon.$$

（証明は背理法で：ある $\varepsilon > 0$ に対して，$\forall n$ $\exists \lambda_{1n}, \lambda_{2n}, t_n, x_n$： $|\lambda_{1n} - \lambda_{2n}| < \dfrac{1}{n}$, $\quad |f(t_n,x_n,\lambda_{1n}) - f(t_n,x_n,\lambda_{2n})| > \dfrac{\varepsilon}{2}$.）

この δ でうまくいくことを示す.

■証明

$t \in [a,b],\ t \geq t_0,\ |\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}
|x(t,\lambda_1) - x(t,\lambda_2)| &= \left| \int_{t_0}^{t} \Big[f(\tau, x(\tau,\lambda_1),\lambda_1) - f(\tau, x(\tau,\lambda_2),\lambda_2) \Big]\, d\tau \right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \big| f(\tau, x(\tau,\lambda_1),\lambda_1) - f(\tau, x(\tau,\lambda_1),\lambda_2) \big|\, d\tau \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \big| f(\tau, x(\tau,\lambda_1),\lambda_2) - f(\tau, x(\tau,\lambda_2),\lambda_2) \big|\, d\tau \\
&\leq \varepsilon(t-t_0) + L \int_{t_0}^{t} \big| x(\tau,\lambda_1) - x(\tau,\lambda_2) \big|\, d\tau
\end{aligned}$$

Gronwall の補題より

$$\begin{aligned}
|x(t,\lambda_1) - x(t,\lambda_2)| &\leq \varepsilon(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} L\varepsilon(s-t_0) e^{L(t-s)}\, ds \\
&= \varepsilon(t-t_0) + L\varepsilon e^{L(t-t_0)} \int_{0}^{t-t_0} \tau e^{-L\tau}\, d\tau = \frac{\varepsilon}{L} \left(-1 + e^{L(t-t_0)} \right).
\end{aligned}$$

$t \leq t_0$ のときは ODE で変数変換 $\widetilde{t} = -t$ を行い，同じ方法で示す．

■証明

Gronwall の補題

- $\varphi(t), \psi(t), w(t)$ が区間 $[a,b]$ で連続
- $\psi(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a,b]$
- $w(t) \leq \varphi(t) + \displaystyle\int_a^t \psi(\tau) w(\tau)\, d\tau \quad \forall t \in [a,b]$

ならば，次が成立する：

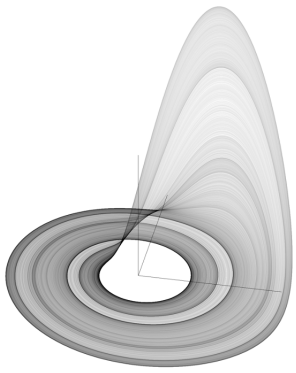
$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(\tau)\varphi(\tau) e^{\int_\tau^t \psi(s)\, ds}\, d\tau \qquad \forall t \in [a,b].$$

■例

Rössler の方程式

$$\begin{aligned}
x' &= -y - z \\
y' &= x + ay \\
z' &= b + z(x - c)
\end{aligned}$$

パラメータ：a, b, c，初期値 右辺は定理の仮定を満たす．



■パラメータについての微分可能性

定理

$f(t,x,\lambda)$ は $\overline{E}=[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$ において連続で，$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \lambda}$ が存在し，$\overline{E}$ で連続ならば，(P_λ) の解 $x(t,\lambda)$ は λ について C^1-級である．

証明：$\lambda_1 \neq \lambda_2$ に対して

$$\varphi(t,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{x(t,\lambda_2)-x(t,\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1}, \qquad t\in(a,b),\ \lambda_1,\lambda_2\in(e,g)$$

ODE を用いて，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big(f(t,\underbrace{x(t,\lambda_2)}_{=:x_2\text{と書く}},\lambda_2)-f(t,\underbrace{x(t,\lambda_1)}_{=:x_1\text{と書く}},\lambda_1)\Big).$$

■証明

$g(s):=f(t,x_1+s(x_2-x_1),\lambda_1+s(\lambda_2-\lambda_1))$ とおく．$g(1)-g(0)=\int_0^1 g'(s)\,ds$ を書くと，

$$\begin{aligned}
&f(t,x_2,\lambda_2)-f(t,x_1,\lambda_1)\\
&=\underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_1+s(x_2-x_1),\lambda_1+s(\lambda_2-\lambda_1))\cdot(x_2-x_1)\,ds}_{=:h_1(t,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)\ \text{連続}}\\
&\quad+\underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t,x_1+s(x_2-x_1),\lambda_1+s(\lambda_2-\lambda_1))\cdot(\lambda_2-\lambda_1)\,ds}_{=:h_2(t,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)\ \text{連続}}\\
&=h_1(t,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)\cdot(x_2-x_1)+h_2(t,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)\cdot(\lambda_2-\lambda_1)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d\varphi}{dt}=h_1\varphi+h_2 \\ \varphi(t_0,\lambda_1,\lambda_2)=0 \end{cases}$$

アイデア：φ は ODE の解，右辺は λ_1,λ_2 について連続，$\lambda_2\to\lambda_1$ のときも連続

$$\lim_{\lambda_2\to\lambda_1}\varphi(t,\lambda_1,\lambda_2)=\lim_{\lambda_2\to\lambda_1}\frac{x(t,\lambda_2)-x(t,\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{\partial x}{\partial\lambda}(t,\lambda_1)$$

■証明

正確に：

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt}=h_1\psi+h_2 \\ \psi(t_0)=0 \end{cases}$$

h_1,h_2 は $t,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2$ について連続 $\Rightarrow$ 解 $\psi(t,\lambda_1,\lambda_2)$ は存在し，λ_1,λ_2 について連続（$\lambda_1=\lambda_2$ のときも）：パラメータに関する解の連続性より

一意性より $\varphi(t,\lambda_1,\lambda_2)=\psi(t,\lambda_1,\lambda_2),\ \lambda_1\neq\lambda_2$.

$\lambda_2\to\lambda_1$ とする（右辺は $\lambda_1=\lambda_2$ で定義され，連続）．すなわち，

$$\lim_{\lambda_2\to\lambda_1}\varphi(t,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\partial x}{\partial\lambda}(t,\lambda_1)=\psi(t,\lambda_1,\lambda_1)$$

注：(1) f は x,λ について C^m-級 $\Rightarrow$ 解 $x(t,\lambda)$ は λ について C^m-級 (2) 初期値についての微分可能性は連続性と同様：$x=u+x_0$

■微分可能性

系（変分方程式）

$\varphi(t,\lambda)=\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t,\lambda)$ は ODE

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t,\lambda),\lambda)\varphi+\frac{\partial f}{\partial \lambda}(t,x(t,\lambda),\lambda) \\ \varphi(t_0)=0 \end{cases}$$

の解である．

証明：$\frac{\partial x}{\partial t}(t,\lambda)=f(t,x(t,\lambda),\lambda)$ を λ について偏微分して，$\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial \lambda}=\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial t}$ を用いる（この二つの微分が連続であることより従う）．

■例

$a(t),b(t)$ を連続とする．

$$\begin{cases} x'=a(t)x+b(t)x^2 \\ x(t_0)=0 \end{cases}$$

の解の初期値についての微分を求めよ．

つまり，

$$\begin{cases} x'=a(t)x+b(t)x^2 \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$$

の解に対して $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t,x_0)\Big|_{x_0=0}$ を計算する．

注：$x_0=0$ のとき，$x(t)\equiv 0$ はただ一つの解．

$$\xrightarrow{x(t,x_0)=u(t,x_0)+x_0} \quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t,x_0)=a(t)(u(t,x_0)+x_0)+b(t)(u(t,x_0)+x_0)^2 \\ u(t_0,x_0)=0 \end{cases}$$

■例

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t,x_0)=a(t)(u(t,x_0)+x_0)+b(t)(u(t,x_0)+x_0)^2 \\ u(t_0,x_0)=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[v=\frac{\partial u}{\partial x_0}\text{とおく}]{\frac{\partial}{\partial x_0}} \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt}=a(t)(v+1)+2b(t)\underbrace{(u+x_0)}_{=x}(v+1) \\ v(t_0)=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_0=0\text{ を代入}} \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt}(t,0)=a(t)(v(t,0)+1) \\ v(t_0,0)=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{z=\frac{\partial x}{\partial x_0}=v+1\text{ とおく}} \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt}(t,0)=a(t)z(t,0) \\ z(t_0,0)=1 \end{cases}$$

$$z(t,0)=\frac{\partial x}{\partial x_0}(t,0)=e^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)\,d\tau}$$

元の問題の解がわからなくても $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ が計算できる．

微分積分学続論 II： 第 14 回

Karel Svadlenka

京都大学大学院理学研究科 数学教室

2020 年 7 月 15 日

パラメータ（初期値）に関する解の連続性と微分可能性

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = f(t,x,\lambda) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

の解がパラメータ λ に
連続的に依存するか調べる.

定理

$f(t,x,\lambda)$ が $\overline{E} = [a,b] \times [c,d] \times [e,g]$ において連続で,
x についてリプシッツ条件

$$|f(t,x_1,\lambda) - f(t,x_2,\lambda)| \leq L|x_1 - x_2| \qquad \forall (t,x_1,\lambda),(t,x_2,\lambda) \in \overline{E}$$

を満たすならば，(P_λ) の解 $x(t,\lambda)$ は λ について連続である.

初期値に関する連続性はこれより従う：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = g(t,x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases} \xrightarrow{x=u+x_0} \begin{cases} \dfrac{du}{dt} & = g(t,u+x_0) = f(t,u,x_0) \\ u(t_0) & = 0 \end{cases}$$

パラメータ（初期値）に関する解の連続性と微分可能性

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} & = f(t,x,\lambda) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

の解がパラメータ λ に
連続的に依存するか調べる.

定理

$f(t,x,\lambda)$ が $\overline{E} = [a,b] \times [c,d] \times [e,g]$ において連続で,
x についてリプシッツ条件

$$|f(t,x_1,\lambda) - f(t,x_2,\lambda)| \leq L|x_1 - x_2| \qquad \forall (t,x_1,\lambda),(t,x_2,\lambda) \in \overline{E}$$

を満たすならば，(P_λ) の解 $x(t,\lambda)$ は λ について連続である.

初期値に関する連続性はこれより従う：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = g(t,x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases} \xrightarrow{x=u+x_0} \begin{cases} \frac{du}{dt} & = g(t,u+x_0) = f(t,u,x_0) \\ u(t_0) & = 0 \end{cases}$$

パラメータ（初期値）に関する解の連続性と微分可能性

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} & = f(t,x,\lambda) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

の解がパラメータ λ に
連続的に依存するか調べる.

定理

$f(t,x,\lambda)$ が $\overline{E} = [a,b] \times [c,d] \times [e,g]$ において連続で,
x についてリプシッツ条件

$$|f(t,x_1,\lambda) - f(t,x_2,\lambda)| \leq L|x_1 - x_2| \qquad \forall (t,x_1,\lambda),(t,x_2,\lambda) \in \overline{E}$$

を満たすならば，(P_λ) の解 $x(t,\lambda)$ は λ について連続である.

初期値に関する連続性はこれより従う：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = g(t,x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases} \xrightarrow{x=u+x_0} \begin{cases} \frac{du}{dt} & = g(t,u+x_0) = f(t,u,x_0) \\ u(t_0) & = 0 \end{cases}$$

証明

$\varepsilon > 0$ と t を固定（$t \in [a, b]$）．$\delta > 0$ を十分小さくとれば，
$|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$ をみたす $\lambda_1, \lambda_2 \in [e, g]$ に対して，

$$|x(t, \lambda_1) - x(t, \lambda_2)| \leq C\varepsilon$$

が成り立つことを示す（ここで，C は t に依る定数）．

f が有界閉集合 $\overline{E}$ 上で連続 $\Rightarrow$ $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ があって，
$|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$ ならば，

$$\sup_{(t,x) \in [a,b] \times [c,d]} |f(t, x, \lambda_1) - f(t, x, \lambda_2)| < \varepsilon.$$

（証明は背理法で：ある $\varepsilon > 0$ に対して，$\forall n \, \exists \lambda_{1n}, \lambda_{2n}, t_n, x_n$：
$|\lambda_{1n} - \lambda_{2n}| < \dfrac{1}{n}$, $|f(t_n, x_n, \lambda_{1n}) - f(t_n, x_n, \lambda_{2n})| > \dfrac{\varepsilon}{2}$.）

この δ でうまくいくことを示す．

証明

$\varepsilon > 0$ と t を固定（$t \in [a, b]$）．$\delta > 0$ を十分小さくとれば，
$|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$ をみたす $\lambda_1, \lambda_2 \in [e, g]$ に対して，

$$|x(t, \lambda_1) - x(t, \lambda_2)| \leq C\varepsilon$$

が成り立つことを示す（ここで，C は t に依る定数）．

f が有界閉集合 $\overline{E}$ 上で連続 $\Rightarrow$ $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ があって，
$|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$ ならば，

$$\sup_{(t,x) \in [a,b] \times [c,d]} |f(t, x, \lambda_1) - f(t, x, \lambda_2)| < \varepsilon.$$

（証明は背理法で：ある $\varepsilon > 0$ に対して，$\forall n\ \exists \lambda_{1n}, \lambda_{2n}, t_n, x_n$：
$|\lambda_{1n} - \lambda_{2n}| < \dfrac{1}{n}$, $\quad |f(t_n, x_n, \lambda_{1n}) - f(t_n, x_n, \lambda_{2n})| > \dfrac{\varepsilon}{2}$.）

この δ でうまくいくことを示す．

証明

$\varepsilon > 0$ と t を固定（$t \in [a, b]$）．$\delta > 0$ を十分小さくとれば，
$|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$ をみたす $\lambda_1, \lambda_2 \in [e, g]$ に対して，

$$|x(t, \lambda_1) - x(t, \lambda_2)| \leq C\varepsilon$$

が成り立つことを示す（ここで，C は t に依る定数）．

f が有界閉集合 $\overline{E}$ 上で連続 $\Rightarrow$ $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ があって，
$|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$ ならば，

$$\sup_{(t,x) \in [a,b] \times [c,d]} |f(t, x, \lambda_1) - f(t, x, \lambda_2)| < \varepsilon.$$

（証明は背理法で：ある $\varepsilon > 0$ に対して，$\forall n\, \exists \lambda_{1n}, \lambda_{2n}, t_n, x_n$：
$|\lambda_{1n} - \lambda_{2n}| < \dfrac{1}{n}$, $\quad |f(t_n, x_n, \lambda_{1n}) - f(t_n, x_n, \lambda_{2n})| > \dfrac{\varepsilon}{2}$.）

この δ でうまくいくことを示す．

証明

$\varepsilon > 0$ と t を固定（$t \in [a, b]$）．$\delta > 0$ を十分小さくとれば，
$|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$ をみたす $\lambda_1, \lambda_2 \in [e, g]$ に対して，

$$|x(t, \lambda_1) - x(t, \lambda_2)| \leq C\varepsilon$$

が成り立つことを示す（ここで，C は t に依る定数）．

f が有界閉集合 $\overline{E}$ 上で連続 $\Rightarrow$ $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ があって，
$|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$ ならば，

$$\sup_{(t,x) \in [a,b] \times [c,d]} |f(t, x, \lambda_1) - f(t, x, \lambda_2)| < \varepsilon.$$

（証明は背理法で：ある $\varepsilon > 0$ に対して，$\forall n \, \exists \lambda_{1n}, \lambda_{2n}, t_n, x_n$：
$|\lambda_{1n} - \lambda_{2n}| < \dfrac{1}{n}$, $\quad |f(t_n, x_n, \lambda_{1n}) - f(t_n, x_n, \lambda_{2n})| > \dfrac{\varepsilon}{2}$.）

この δ でうまくいくことを示す．

証明

$t \in [a, b],\ t \geq t_0,\ |\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$ ならば

$$
\begin{aligned}
|x(t, \lambda_1) - x(t, \lambda_2)| &= \left| \int_{t_0}^{t} \Big[f(\tau, x(\tau, \lambda_1), \lambda_1) - f(\tau, x(\tau, \lambda_2), \lambda_2) \Big] \, d\tau \right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \left| f(\tau, x(\tau, \lambda_1), \lambda_1) - f(\tau, x(\tau, \lambda_1), \lambda_2) \right| \, d\tau \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \left| f(\tau, x(\tau, \lambda_1), \lambda_2) - f(\tau, x(\tau, \lambda_2), \lambda_2) \right| \, d\tau \\
&\leq \varepsilon(t - t_0) + L \int_{t_0}^{t} \left| x(\tau, \lambda_1) - x(\tau, \lambda_2) \right| \, d\tau
\end{aligned}
$$

Gronwall の補題より

$$
\begin{aligned}
|x(t, \lambda_1) - x(t, \lambda_2)| &\leq \varepsilon(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} L\varepsilon(s - t_0) e^{L(t-s)} \, ds \\
&= \varepsilon(t - t_0) + L\varepsilon e^{L(t-t_0)} \int_{0}^{t-t_0} \tau e^{-L\tau} \, d\tau = \frac{\varepsilon}{L} \left(-1 + e^{L(t-t_0)} \right).
\end{aligned}
$$

$t \leq t_0$ のときは ODE で変数変換 $\widetilde{t} = -t$ を行い，同じ方法で示す．

証明

$t \in [a, b],\ t \geq t_0,\ |\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}
|x(t,\lambda_1) - x(t,\lambda_2)| &= \left| \int_{t_0}^{t} \Big[f(\tau, x(\tau,\lambda_1),\lambda_1) - f(\tau, x(\tau,\lambda_2),\lambda_2) \Big]\, d\tau \right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \left| f(\tau, x(\tau,\lambda_1),\lambda_1) - f(\tau, x(\tau,\lambda_1),\lambda_2) \right| d\tau \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \left| f(\tau, x(\tau,\lambda_1),\lambda_2) - f(\tau, x(\tau,\lambda_2),\lambda_2) \right| d\tau \\
&\leq \varepsilon(t - t_0) + L \int_{t_0}^{t} \left| x(\tau,\lambda_1) - x(\tau,\lambda_2) \right| d\tau
\end{aligned}$$

Gronwall の補題より

$$\begin{aligned}
|x(t,\lambda_1) - x(t,\lambda_2)| &\leq \varepsilon(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} L\varepsilon(s - t_0) e^{L(t-s)}\, ds \\
&= \varepsilon(t - t_0) + L\varepsilon e^{L(t-t_0)} \int_{0}^{t-t_0} \tau e^{-L\tau}\, d\tau = \frac{\varepsilon}{L}\left(-1 + e^{L(t-t_0)} \right).
\end{aligned}$$

$t \leq t_0$ のときは ODE で変数変換 $\widetilde{t} = -t$ を行い，同じ方法で示す．

証明

$t \in [a, b],\ t \geq t_0,\ |\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}
|x(t,\lambda_1) - x(t,\lambda_2)| &= \left| \int_{t_0}^{t} \Big[f(\tau, x(\tau,\lambda_1), \lambda_1) - f(\tau, x(\tau,\lambda_2), \lambda_2) \Big]\, d\tau \right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \left| f(\tau, x(\tau,\lambda_1), \lambda_1) - f(\tau, x(\tau,\lambda_1), \lambda_2) \right| d\tau \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \left| f(\tau, x(\tau,\lambda_1), \lambda_2) - f(\tau, x(\tau,\lambda_2), \lambda_2) \right| d\tau \\
&\leq \varepsilon(t - t_0) + L \int_{t_0}^{t} \left| x(\tau,\lambda_1) - x(\tau,\lambda_2) \right| d\tau
\end{aligned}$$

Gronwall の補題より

$$|x(t,\lambda_1) - x(t,\lambda_2)| \leq \varepsilon(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} L\varepsilon(s - t_0) e^{L(t-s)}\, ds$$

$$= \varepsilon(t - t_0) + L\varepsilon e^{L(t-t_0)} \int_{0}^{t-t_0} \tau e^{-L\tau}\, d\tau = \frac{\varepsilon}{L} \left(-1 + e^{L(t-t_0)} \right).$$

$t \leq t_0$ のときは ODE で変数変換 $\widetilde{t} = -t$ を行い，同じ方法で示す.

証明

Gronwall の補題

- $\varphi(t), \psi(t), w(t)$ が区間 $[a, b]$ で連続
- $\psi(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$
- $w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(\tau) w(\tau)\, d\tau \quad \forall t \in [a, b]$

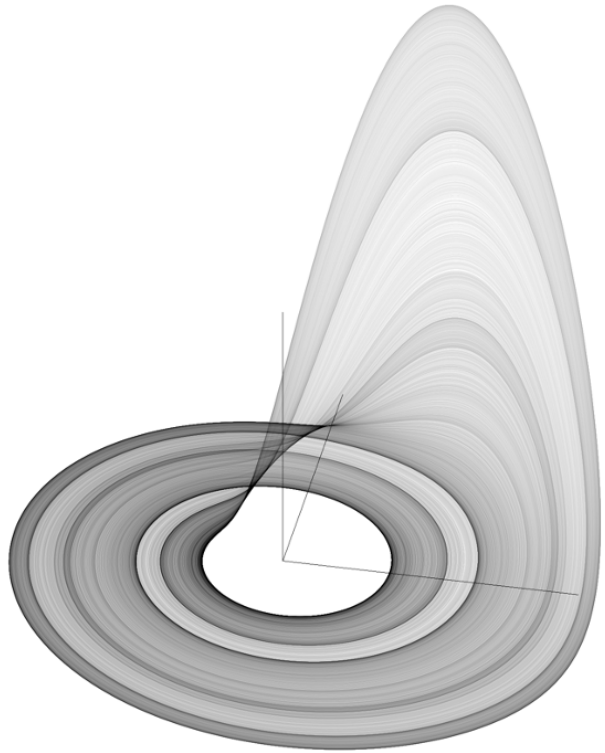
ならば，次が成立する：

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(\tau)\varphi(\tau) e^{\int_\tau^t \psi(s)\, ds}\, d\tau \qquad \forall t \in [a, b].$$

例

Rössler の方程式

$$\begin{aligned} x' &= -y - z \\ y' &= x + ay \\ z' &= b + z(x - c) \end{aligned}$$



パラメータ：a, b, c，初期値
右辺は定理の仮定を満たす.

パラメータについての微分可能性

定理

$f(t,x,\lambda)$ は $\overline{E}=[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$ において連続で，$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \lambda}$ が存在し，$\overline{E}$ で連続ならば，(P_λ) の解 $x(t,\lambda)$ は λ について C^1-級である．

証明：$\lambda_1 \neq \lambda_2$ に対して

$$\varphi(t,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{x(t,\lambda_2)-x(t,\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1}, \qquad t\in(a,b),\ \lambda_1,\lambda_2\in(e,g)$$

ODE を用いて，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big(f(t,\underbrace{x(t,\lambda_2)}_{=:x_2\text{と書く}},\lambda_2)-f(t,\underbrace{x(t,\lambda_1)}_{=:x_1\text{と書く}},\lambda_1)\Big).$$

パラメータについての微分可能性

定理

$f(t,x,\lambda)$ は $\overline{E}=[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$ において連続で，$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \lambda}$ が存在し，$\overline{E}$ で連続ならば，(P_λ) の解 $x(t,\lambda)$ は λ について C^1-級である．

証明：$\lambda_1 \neq \lambda_2$ に対して

$$\varphi(t,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{x(t,\lambda_2)-x(t,\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1}, \qquad t\in(a,b),\ \lambda_1,\lambda_2\in(e,g)$$

ODE を用いて，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big(f(t,\underbrace{x(t,\lambda_2)}_{=:x_2\text{と書く}},\lambda_2)-f(t,\underbrace{x(t,\lambda_1)}_{=:x_1\text{と書く}},\lambda_1)\Big).$$

証明

$g(s) := f(t, x_1 + s(x_2 - x_1), \lambda_1 + s(\lambda_2 - \lambda_1))$ とおく.

$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)\, ds$ を書くと,

$$
\begin{aligned}
& f(t, x_2, \lambda_2) - f(t, x_1, \lambda_1) \\
= & \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_1 + s(x_2 - x_1), \lambda_1 + s(\lambda_2 - \lambda_1)) \cdot (x_2 - x_1)\, ds}_{=: h_1(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \text{ 連続}} \\
& + \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x_1 + s(x_2 - x_1), \lambda_1 + s(\lambda_2 - \lambda_1)) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)\, ds}_{=: h_2(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \text{ 連続}} \\
= & \ h_1(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \cdot (x_2 - x_1) + h_2(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = h_1 \varphi + h_2 \\ \varphi(t_0, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \end{cases}
$$

アイデア：φ は ODE の解，右辺は λ_1, λ_2 について連続，$\lambda_2 \to \lambda_1$ のときも連続

$$
\lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \varphi(t, \lambda_1, \lambda_2) = \lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \frac{x(t, \lambda_2) - x(t, \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda_1)
$$

証明

$g(s) := f(t, x_1 + s(x_2 - x_1), \lambda_1 + s(\lambda_2 - \lambda_1))$ とおく.
$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)\, ds$ を書くと,

$$
\begin{aligned}
& f(t, x_2, \lambda_2) - f(t, x_1, \lambda_1) \\
= & \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_1 + s(x_2 - x_1), \lambda_1 + s(\lambda_2 - \lambda_1)) \cdot (x_2 - x_1)\, ds}_{=:h_1(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \text{ 連続}} \\
& + \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x_1 + s(x_2 - x_1), \lambda_1 + s(\lambda_2 - \lambda_1)) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)\, ds}_{=:h_2(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \text{ 連続}} \\
= & \ h_1(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \cdot (x_2 - x_1) + h_2(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = h_1 \varphi + h_2 \\ \varphi(t_0, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \end{cases}
$$

アイデア：φ は ODE の解，右辺は λ_1, λ_2 について連続，$\lambda_2 \to \lambda_1$ のときも連続

$$
\lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \varphi(t, \lambda_1, \lambda_2) = \lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \frac{x(t, \lambda_2) - x(t, \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda_1)
$$

証明

$g(s) := f(t, x_1 + s(x_2 - x_1), \lambda_1 + s(\lambda_2 - \lambda_1))$ とおく.
$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)\, ds$ を書くと,

$$
\begin{aligned}
& f(t, x_2, \lambda_2) - f(t, x_1, \lambda_1) \\
= & \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_1 + s(x_2 - x_1), \lambda_1 + s(\lambda_2 - \lambda_1)) \cdot (x_2 - x_1)\, ds}_{=:h_1(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \text{ 連続}} \\
& + \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x_1 + s(x_2 - x_1), \lambda_1 + s(\lambda_2 - \lambda_1)) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)\, ds}_{=:h_2(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \text{ 連続}} \\
= & \ h_1(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \cdot (x_2 - x_1) + h_2(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = h_1 \varphi + h_2 \\ \varphi(t_0, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \end{cases}
$$

アイデア：φ は ODE の解，右辺は λ_1, λ_2 について連続，$\lambda_2 \to \lambda_1$ のときも連続

$$
\lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \varphi(t, \lambda_1, \lambda_2) = \lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \frac{x(t, \lambda_2) - x(t, \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda_1)
$$

証明

$g(s) := f(t, x_1 + s(x_2 - x_1), \lambda_1 + s(\lambda_2 - \lambda_1))$ とおく.
$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)\, ds$ を書くと,

$$
\begin{aligned}
& f(t, x_2, \lambda_2) - f(t, x_1, \lambda_1) \\
= & \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_1 + s(x_2 - x_1), \lambda_1 + s(\lambda_2 - \lambda_1)) \cdot (x_2 - x_1)\, ds}_{=:h_1(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \text{ 連続}} \\
& + \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x_1 + s(x_2 - x_1), \lambda_1 + s(\lambda_2 - \lambda_1)) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)\, ds}_{=:h_2(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \text{ 連続}} \\
= & \ h_1(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \cdot (x_2 - x_1) + h_2(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = h_1 \varphi + h_2 \\ \varphi(t_0, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \end{cases}
$$

アイデア：φ は ODE の解，右辺は λ_1, λ_2 について連続，$\lambda_2 \to \lambda_1$ のときも連続

$$
\lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \varphi(t, \lambda_1, \lambda_2) = \lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \frac{x(t, \lambda_2) - x(t, \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda_1)
$$

証明

$g(s) := f(t, x_1 + s(x_2 - x_1), \lambda_1 + s(\lambda_2 - \lambda_1))$ とおく.
$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)\, ds$ を書くと,

$$
\begin{aligned}
& f(t, x_2, \lambda_2) - f(t, x_1, \lambda_1) \\
= & \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_1 + s(x_2 - x_1), \lambda_1 + s(\lambda_2 - \lambda_1)) \cdot (x_2 - x_1)\, ds}_{=:h_1(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \text{ 連続}} \\
& + \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x_1 + s(x_2 - x_1), \lambda_1 + s(\lambda_2 - \lambda_1)) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)\, ds}_{=:h_2(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \text{ 連続}} \\
= & \ h_1(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \cdot (x_2 - x_1) + h_2(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = h_1 \varphi + h_2 \\ \varphi(t_0, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \end{cases}
$$

アイデア：φ は ODE の解，右辺は λ_1, λ_2 について連続，$\lambda_2 \to \lambda_1$ のときも連続

$$
\lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \varphi(t, \lambda_1, \lambda_2) = \lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \frac{x(t, \lambda_2) - x(t, \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda_1)
$$

証明

$g(s) := f(t, x_1 + s(x_2 - x_1), \lambda_1 + s(\lambda_2 - \lambda_1))$ とおく.
$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)\, ds$ を書くと,

$$
\begin{aligned}
& f(t, x_2, \lambda_2) - f(t, x_1, \lambda_1) \\
= & \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_1 + s(x_2 - x_1), \lambda_1 + s(\lambda_2 - \lambda_1)) \cdot (x_2 - x_1)\, ds}_{=:h_1(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \text{ 連続}} \\
& + \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x_1 + s(x_2 - x_1), \lambda_1 + s(\lambda_2 - \lambda_1)) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)\, ds}_{=:h_2(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \text{ 連続}} \\
= & \ h_1(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \cdot (x_2 - x_1) + h_2(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = h_1 \varphi + h_2 \\ \varphi(t_0, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \end{cases}
$$

アイデア：φ は ODE の解，右辺は λ_1, λ_2 について連続，$\lambda_2 \to \lambda_1$ のときも連続

$$
\lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \varphi(t, \lambda_1, \lambda_2) = \lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \frac{x(t, \lambda_2) - x(t, \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda_1)
$$

証明

正確に：

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = h_1\psi + h_2 \\ \psi(t_0) = 0 \end{cases}$$

h_1, h_2 は $t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$ について連続 $\Rightarrow$ 解 $\psi(t, \lambda_1, \lambda_2)$ は存在し，λ_1, λ_2 について連続（$\lambda_1 = \lambda_2$ のときも）：パラメータに関する解の連続性より

一意性より $\varphi(t, \lambda_1, \lambda_2) = \psi(t, \lambda_1, \lambda_2),\ \lambda_1 \neq \lambda_2$.

$\lambda_2 \to \lambda_1$ とする（右辺は $\lambda_1 = \lambda_2$ で定義され，連続）．すなわち，

$$\lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \varphi(t, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda_1) = \psi(t, \lambda_1, \lambda_1)$$

注：
(1) f は x, λ について C^m-級 $\Rightarrow$ 解 $x(t, \lambda)$ は λ について C^m-級
(2) 初期値についての微分可能性は連続性と同様：$x = u + x_0$

証明

正確に：

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = h_1\psi + h_2 \\ \psi(t_0) = 0 \end{cases}$$

h_1, h_2 は $t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$ について連続 $\Rightarrow$ 解 $\psi(t, \lambda_1, \lambda_2)$ は存在し，λ_1, λ_2 について連続（$\lambda_1 = \lambda_2$ のときも）：パラメータに関する解の連続性より

一意性より $\varphi(t, \lambda_1, \lambda_2) = \psi(t, \lambda_1, \lambda_2),\ \lambda_1 \neq \lambda_2$.

$\lambda_2 \to \lambda_1$ とする（右辺は $\lambda_1 = \lambda_2$ で定義され，連続）．すなわち，

$$\lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \varphi(t, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda_1) = \psi(t, \lambda_1, \lambda_1)$$

注：
(1) f は x, λ について C^m-級 $\Rightarrow$ 解 $x(t, \lambda)$ は λ について C^m-級
(2) 初期値についての微分可能性は連続性と同様：$x = u + x_0$

証明

正確に：

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = h_1\psi + h_2 \\ \psi(t_0) = 0 \end{cases}$$

h_1, h_2 は $t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$ について連続 $\Rightarrow$ 解 $\psi(t, \lambda_1, \lambda_2)$ は存在し，λ_1, λ_2 について連続（$\lambda_1 = \lambda_2$ のときも）：パラメータに関する解の連続性より

一意性より $\varphi(t, \lambda_1, \lambda_2) = \psi(t, \lambda_1, \lambda_2),\ \lambda_1 \neq \lambda_2$.

$\lambda_2 \to \lambda_1$ とする（右辺は $\lambda_1 = \lambda_2$ で定義され，連続）．すなわち，

$$\lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \varphi(t, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda_1) = \psi(t, \lambda_1, \lambda_1)$$

注：
(1) f は x, λ について C^m-級 $\Rightarrow$ 解 $x(t, \lambda)$ は λ について C^m-級
(2) 初期値についての微分可能性は連続性と同様：$x = u + x_0$

証明

正確に：

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = h_1\psi + h_2 \\ \psi(t_0) = 0 \end{cases}$$

h_1, h_2 は $t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$ について連続 $\Rightarrow$ 解 $\psi(t, \lambda_1, \lambda_2)$ は存在し，λ_1, λ_2 について連続（$\lambda_1 = \lambda_2$ のときも）：パラメータに関する解の連続性より

一意性より $\varphi(t, \lambda_1, \lambda_2) = \psi(t, \lambda_1, \lambda_2),\ \lambda_1 \neq \lambda_2$.

$\lambda_2 \to \lambda_1$ とする（右辺は $\lambda_1 = \lambda_2$ で定義され，連続）．すなわち，

$$\lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \varphi(t, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda_1) = \psi(t, \lambda_1, \lambda_1)$$

注：
(1) f は x, λ について C^m-級 $\Rightarrow$ 解 $x(t, \lambda)$ は λ について C^m-級
(2) 初期値についての微分可能性は連続性と同様：$x = u + x_0$

微分可能性

系（変分方程式）

$\varphi(t,\lambda) = \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t,\lambda)$ は ODE

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t,\lambda), \lambda)\varphi + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x(t,\lambda), \lambda) \\ \varphi(t_0) = 0 \end{cases}$$

の解である.

証明：$\frac{\partial x}{\partial t}(t,\lambda) = f(t, x(t,\lambda), \lambda)$ を λ について偏微分して，
$\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \lambda} = \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial t}$ を用いる（この二つの微分が連続であることより従う）.

微分可能性

系（変分方程式）

$\varphi(t,\lambda) = \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t,\lambda)$ は ODE

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t,\lambda), \lambda)\varphi + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x(t,\lambda), \lambda) \\ \varphi(t_0) = 0 \end{cases}$$

の解である.

証明：$\frac{\partial x}{\partial t}(t,\lambda) = f(t, x(t,\lambda), \lambda)$ を λ について偏微分して，
$\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \lambda} = \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial t}$ を用いる（この二つの微分が連続であることより従う）.

例

$a(t), b(t)$ を連続とする.

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t)x^2 \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

の解の初期値についての微分を求めよ.

つまり,

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t)x^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

の解に対して $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, x_0)\Big|_{x_0=0}$ を計算する.

注 : $x_0 = 0$ のとき, $x(t) \equiv 0$ はただ一つの解.

$$\xrightarrow{x(t,x_0)=u(t,x_0)+x_0} \quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t, x_0) = a(t)(u(t, x_0) + x_0) + b(t)(u(t, x_0) + x_0)^2 \\ u(t_0, x_0) = 0 \end{cases}$$

例

$a(t), b(t)$ を連続とする.

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t)x^2 \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

の解の初期値についての微分を求めよ.

つまり,

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t)x^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

の解に対して $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, x_0)\Big|_{x_0=0}$ を計算する.

注 : $x_0 = 0$ のとき, $x(t) \equiv 0$ はただ一つの解.

$$\xrightarrow{x(t,x_0)=u(t,x_0)+x_0} \quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t, x_0) = a(t)(u(t, x_0) + x_0) + b(t)(u(t, x_0) + x_0)^2 \\ u(t_0, x_0) = 0 \end{cases}$$

例

$a(t), b(t)$ を連続とする.

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t)x^2 \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

の解の初期値についての微分を求めよ.

つまり,

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t)x^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

の解に対して $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, x_0)\Big|_{x_0=0}$ を計算する.

注：$x_0 = 0$ のとき，$x(t) \equiv 0$ はただ一つの解.

$$\xrightarrow{x(t,x_0)=u(t,x_0)+x_0} \quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t, x_0) = a(t)(u(t, x_0) + x_0) + b(t)(u(t, x_0) + x_0)^2 \\ u(t_0, x_0) = 0 \end{cases}$$

例

$a(t), b(t)$ を連続とする.

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t)x^2 \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

の解の初期値についての微分を求めよ.

つまり,

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t)x^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

の解に対して $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, x_0)\Big|_{x_0=0}$ を計算する.

注：$x_0 = 0$ のとき，$x(t) \equiv 0$ はただ一つの解.

$$\xrightarrow{x(t,x_0)=u(t,x_0)+x_0} \quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t, x_0) = a(t)(u(t, x_0) + x_0) + b(t)(u(t, x_0) + x_0)^2 \\ u(t_0, x_0) = 0 \end{cases}$$

例

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t,x_0) = a(t)(u(t,x_0)+x_0) + b(t)(u(t,x_0)+x_0)^2 \\ u(t_0,x_0) = 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow[v=\frac{\partial u}{\partial x_0}\text{とおく}]{\frac{\partial}{\partial x_0}}$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = a(t)(v+1) + 2b(t)\underbrace{(u+x_0)}_{=x}(v+1) \\ v(t_0) = 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{x_0=0\text{ を代入}}$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt}(t,0) = a(t)(v(t,0)+1) \\ v(t_0,0) = 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{z=\frac{\partial x}{\partial x_0}=v+1\text{ とおく}}$

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt}(t,0) = a(t)z(t,0) \\ z(t_0,0) = 1 \end{cases}$$

$$z(t,0) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t,0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}$$

元の問題の解がわからなくても $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ が計算できる.

例

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t,x_0) = a(t)(u(t,x_0)+x_0) + b(t)(u(t,x_0)+x_0)^2 \\ u(t_0,x_0) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[v=\frac{\partial u}{\partial x_0}\text{とおく}]{\frac{\partial}{\partial x_0}} \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt} = a(t)(v+1) + 2b(t)\underbrace{(u+x_0)}_{=x}(v+1) \\ v(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_0=0\text{ を代入}} \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt}(t,0) = a(t)(v(t,0)+1) \\ v(t_0,0) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{z=\frac{\partial x}{\partial x_0}=v+1\text{ とおく}} \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt}(t,0) = a(t)z(t,0) \\ z(t_0,0) = 1 \end{cases}$$

$$z(t,0) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t,0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}$$

元の問題の解がわからなくても $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ が計算できる.

例

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t,x_0) = a(t)(u(t,x_0)+x_0) + b(t)(u(t,x_0)+x_0)^2 \\ u(t_0,x_0) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[v=\frac{\partial u}{\partial x_0}\text{とおく}]{\frac{\partial}{\partial x_0}} \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt} = a(t)(v+1) + 2b(t)\underbrace{(u+x_0)}_{=x}(v+1) \\ v(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_0=0\text{ を代入}} \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt}(t,0) = a(t)(v(t,0)+1) \\ v(t_0,0) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{z=\frac{\partial x}{\partial x_0}=v+1\text{ とおく}} \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt}(t,0) = a(t)z(t,0) \\ z(t_0,0) = 1 \end{cases}$$

$$z(t,0) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t,0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}$$

元の問題の解がわからなくても $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ が計算できる.

例

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t,x_0) = a(t)(u(t,x_0)+x_0) + b(t)(u(t,x_0)+x_0)^2 \\ u(t_0,x_0) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[v=\frac{\partial u}{\partial x_0}\text{とおく}]{\frac{\partial}{\partial x_0}} \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt} = a(t)(v+1) + 2b(t)\underbrace{(u+x_0)}_{=x}(v+1) \\ v(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_0=0\text{ を代入}} \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt}(t,0) = a(t)(v(t,0)+1) \\ v(t_0,0) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{z=\frac{\partial x}{\partial x_0}=v+1\text{ とおく}} \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt}(t,0) = a(t)z(t,0) \\ z(t_0,0) = 1 \end{cases}$$

$$z(t,0) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t,0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}$$

元の問題の解がわからなくても $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ が計算できる.

例

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t,x_0) = a(t)(u(t,x_0)+x_0) + b(t)(u(t,x_0)+x_0)^2 \\ u(t_0,x_0) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[v=\frac{\partial u}{\partial x_0}\text{とおく}]{\frac{\partial}{\partial x_0}} \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt} = a(t)(v+1) + 2b(t)\underbrace{(u+x_0)}_{=x}(v+1) \\ v(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_0=0\text{ を代入}} \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt}(t,0) = a(t)(v(t,0)+1) \\ v(t_0,0) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{z=\frac{\partial x}{\partial x_0}=v+1\text{ とおく}} \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt}(t,0) = a(t)z(t,0) \\ z(t_0,0) = 1 \end{cases}$$

$$z(t,0) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t,0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}$$

元の問題の解がわからなくても $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ が計算できる.

例

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t,x_0) = a(t)(u(t,x_0)+x_0) + b(t)(u(t,x_0)+x_0)^2 \\ u(t_0,x_0) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[v=\frac{\partial u}{\partial x_0}\text{とおく}]{\frac{\partial}{\partial x_0}} \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt} = a(t)(v+1) + 2b(t)\underbrace{(u+x_0)}_{=x}(v+1) \\ v(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_0=0\text{ を代入}} \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt}(t,0) = a(t)(v(t,0)+1) \\ v(t_0,0) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{z=\frac{\partial x}{\partial x_0}=v+1\text{ とおく}} \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt}(t,0) = a(t)z(t,0) \\ z(t_0,0) = 1 \end{cases}$$

$$z(t,0) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t,0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}$$

元の問題の解がわからなくても $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ が計算できる.