解析入門 II a：講義ノート

Karel SVADLENKA（東京都立大学 数理科学科）
2023 年度 後期

---

1 Gauss 平面と Riemann 球面

1.1 複素数を代数的に見る

複素数の演算については高校で習得済みのため，この講義では省略する．次の項目で忘れているものがあれば，テキストを読んで復習すること（[?] では簡潔にまとめてある）：

1. 複素数の基本演算（足し算・引き算・掛け算・割り算）
2. 複素数の絶対値（$z = x + iy$ のとき，$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$）
3. 複素数の共役（$z = x + iy$ のとき，$\overline{z} = x - iy$）
4. 複素数の極表示（$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\theta \ldots$ 偏角）
5. de Moivre の公式（$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + \sin n\theta$）

数学的には，複素数をその演算で特徴づけるだけでは満足できない．例えば，実数 $\mathbb{R}$ は，空でない，上に有界な部分集合が上限を持つような（同型を除いて）一意な順序体として特徴づけられる．複素数 $\mathbb{C}$ についても，同様の特徴づけは次のステップでなされる：

- $\mathbb{R}$ を部分体として含み，方程式 $x^2 + 1 = 1$ が解を持つような体 $\mathbb{F}$ が存在することを示す.
- $x^2 + 1 = 0$ の一とつの解を i とすると，$\alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ の形で表現できる要素の集合 $\mathbb{C}$ が $\mathbb{F}$ の部分体であることを示す.
- $\mathbb{C}$ は $\mathbb{F}$ に依存しない（同型を除いて）ことを示す.

（詳細は [?] または [?] の 1.3 節を参照.）

1.2 複素数を幾何学的に見る：複素平面

複素数全体の集合 $\mathbb{C} = \{x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ は, $\mathbb{C}$ から $\mathbb{R}^2$ への写像

$$x + iy \mapsto (x, y) \tag{1.1}$$

により平面 $\mathbb{R}^2$ と同一視される．このように，x-座標が複素数の実部として，y-座標が虚部として解釈される平面のことを**複素平面**（または **Gauss 平面**）とよぶ.

$\mathbb{C}$ において $\mathbb{R}^2$ から導かれる**距離**を定義する：

$$d(z, w) = |z - w|, \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}. \tag{1.2}$$

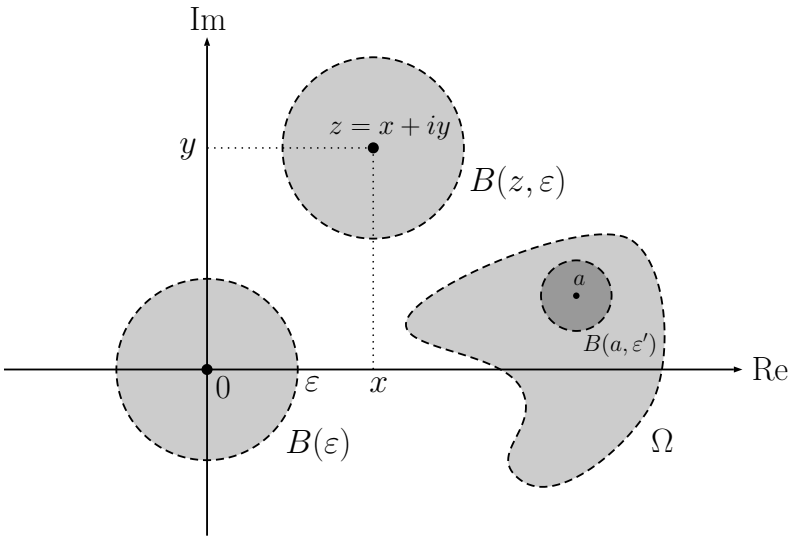
この距離に関して, $\mathbb{C}$ の**点 a の ε-近傍**は以下のように与えられる:

$$B(a,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| < \varepsilon\}. \tag{1.3}$$

$a = 0$ のとき，$B(\varepsilon)$ と表すことにする．

$\mathbb{R}^2$ の位相の定義から, $\mathbb{C}$ の部分集合 Ω が**開集合**であるとは次の条件が満たされるということである：

$$\forall a \in \Omega\ \exists \varepsilon' > 0\ \text{ s.t. }\ B(a,\varepsilon') \subset \Omega. \tag{1.4}$$



複素平面およびその ε-近傍 $B(z,\varepsilon)$ と開集合 Ω の例.

注 1.1. 大雑把に言うと，ある集合 X の位相とは，次の三つの条件を満たす開集合の族のことである：

- 開集合の任意の族の和集合は開集合である
- 有限個の開集合の共通部分は開集合である
- X と $\emptyset$ は開集合である

位相は点列の収束や関数の連続性を考えることを可能にする一般的な概念である．

- *"$x_n \to x$"* を *"*任意の x の近傍 U（$= x$ を含む開集合）に対し N が存在し，$x_n \in U\ \forall n \geq N$*"* と定義できる．
- *"$f : X \to X$ は連続"* を *"*任意の開集合 V に対して，逆像 $f^{-1}(V \cap X)$ は開集合である*"* と定義できる．

X が距離空間であれば，距離 d が生成する位相を定義できる．つまり，U が開集合であるのは，

$$\forall x \in U\ \ \exists \varepsilon > 0 \quad s.t. \quad B(x,\varepsilon) := \{y \in X;\ d(x,y) < \varepsilon\} \subset U$$

が成り立つときである．

このとき，*"*近い*"* という概念があり，微積で習った収束と連続性の定義につながる．一方で，距離によって生成できない位相もあるので，位相空間は距離空間より一般的なものである．

1.3 Riemann 球面とその位相

例 1.2. モチベーションとして関数

$$f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}, \qquad f(z) = \frac{1}{z} \tag{1.5}$$

を考える．この関数は $z = 0$ で定義されず，値域にも 0 が含まれない．一方で，

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{|z|} = \infty, \qquad \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{z} = 0 \tag{1.6}$$

が成り立つので，$f(0) = \infty, f(\infty) = 0$ と追加で定義しておけば，拡張した関数を $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ から $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ への関数として見ることができる．しかも，位相をうまく定義すれば，拡張した関数が連続になるようにできる可能性もある．

上記の例の目標に沿った定式化の概要は付録に紹介されている．その結果をまとめると，**無限遠点**と言う点 “∞” を複素平面 $\mathbb{C}$ に加えた集合を $\widehat{\mathbb{C}}$ で表し, **Riemann 球面**と言う:

$$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad \infty := (1 : 0). \tag{1.7}$$

（ここで登場する記号は付録で定義されている.）

無限遠点の ε-近傍は以下のように与えられる（これを定義と思っても良い）:

$$\infty \text{ の } \varepsilon\text{-近傍 } = \{z \in \mathbb{C};\ |z| > \tfrac{1}{\varepsilon}\} \cup \{\infty\}.$$

$\mathbb{C}$ の ε-近傍と上で定義した ∞ の ε-近傍を合わせて，$\widehat{\mathbb{C}}$ の位相を定義できる．きちんと位相を定義するには，$\widehat{\mathbb{C}}$ 開集合系 (開集合の全体) を定めるやり方があるが，$\widehat{\mathbb{C}}$ の各点 z に対して，z の基本近傍系と呼ばれる集合族を定めるやり方もある. 簡単に言うと，集合 U が開集合であるとは，任意の U の点 x に対して上で定義した ε-近傍 $B(x, \varepsilon)$ が存在して U に収まる，というふうに定義すればよい．

実は，$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は、次の関数 d を距離とする距離空間になる（位相は距離化できる）:

$$d(z, z') := \left\| f^{-1}(z) - f^{-1}(z') \right\|. \tag{1.8}$$

ここで，$f : S \to \widehat{\mathbb{C}}$ は後で定義する立体射影で，$\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^3$ のユークリッドノルムである．すなわち，$z, z' \in \widehat{\mathbb{C}}$ の距離を対応する Riemann 球面 S^2 上の二点 $f^{-1}(z), f^{-1}(z')$ の $\mathbb{R}^3$ における距離として定義している．具体的には，以下の式で与えられる：

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)\left(1 + |z'|^2\right)}},\ z, z' \neq \infty, \qquad d(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}},\ z \neq \infty. \tag{1.9}$$

$f(z) = \frac{1}{z}$ の例に戻ると，

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0, \qquad \lim_{z\to 0} \frac{1}{z} = \infty \tag{1.10}$$

が上で定義した位相の意味で成り立つことを示すことができる．そこで，

$$\widetilde{f}(z) := \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ \infty, & z = 0 \\ 0, & z = \infty \end{cases} \tag{1.11}$$

と定義すれば，$\widetilde{f} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ の関数として連続な関数となる．この逆関数も連続であるため，$\widetilde{f}$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である．詳しくはあとで証明することにする．

定理 1.3. *Riemann* 球面は *2* 次元球面 $S^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$ と同相である.

Proof. S^2 から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像を作ればよい．$N=(0,0,1)\in S^2$ とおく．まず $S^2\backslash\{N\}$ と $\mathbb{C}$ が同一視できることを示してから，∞ に対応する点 N を含むよう拡張するという順番で行う．
以下の写像は連続である：

$$f : S^2\backslash\{N\}\to\mathbb{C},\qquad f\left(x_1,\,x_2,\,x_3\right)=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}=:z. \tag{1.12}$$

$P=(x_1,\,x_2,\,x_3)\in S^2\backslash\{N\}$ のとき，$f(P)$ は N と P を結ぶ $\mathbb{R}^3$ の直線と xy-平面との交点である．つまり，N と P を結ぶ $\mathbb{R}^3$ の直線と xy-平面の交点を $(u,\,v)$ とすれば，$f(P)=u+iv$ である．このため，f の写像を**立体射影**とよぶ．
f の逆写像が存在し，連続であることを示す．$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ より，

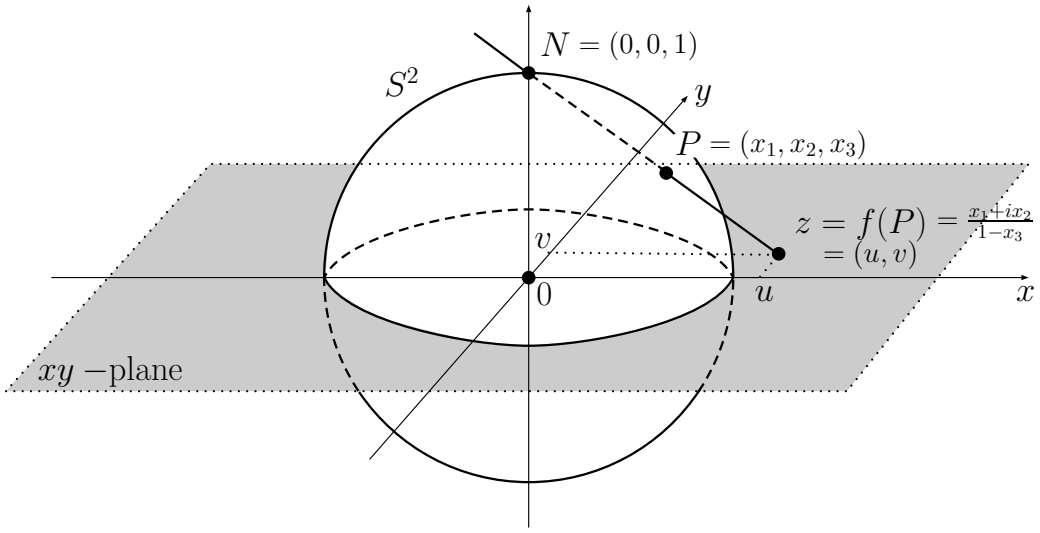
$$1+|z|^2=1+\left|\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}\right|^2=1+\frac{x_1^2+x_2^2}{\left(1-x_3\right)^2}=\frac{2-2x_3}{\left(1-x_3\right)^2}=\frac{2}{1-x_3} \tag{1.13}$$

となるので，$x_3=\left(|z|^2-1\right)/\left(|z|^2+1\right)$ である．
また，

$$\frac{x_1}{1-x_3}=\operatorname{Re}z=\frac{z+\bar{z}}{2},\qquad \frac{x_2}{1-x_3}=\operatorname{Im}z=\frac{z-\bar{z}}{2i} \tag{1.14}$$

より $x_1=(z+\bar{z})/\left(1+|z|^2\right)$, $x_2=(z-\bar{z})/i\left(1+|z|^2\right)$ となる．以上をまとめて，f の逆写像 g は連続で，以下の式で与えられる:

$$g(z):=f^{-1}(z)=\left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2},\,i\frac{-z+\bar{z}}{1+|z|^2},\,\frac{-1+|z|^2}{1+|z|^2}\right). \tag{1.15}$$



Riemann 球面 S^2 とその点 P の立体射影 $f(P)$.

写像 f が S^2 から $\widehat{\mathbb{C}}$ への連続写像に拡張されることを見る．

$$\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}=\frac{x_1+ix_2}{1-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}=\frac{(x_1+ix_2)\left(1+\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\right)}{x_1^2+x_2^2}=\frac{1+\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}{x_1-ix_2} \tag{1.16}$$

より，

$$\lim_{(x_1,\,x_2,\,x_3)\to N}|f(x_1,x_2,x_3)|=\lim_{(x_1,\,x_2,\,x_3)\to N}\left|\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}\right|=\lim_{(x_1,\,x_2)\to(0,0)}\frac{1+\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=\infty. \tag{1.17}$$

以上から，

$$\lim_{(x_1,\,x_2,\,x_3)\to N}f(x_1,x_2,x_3)=\infty\in\widehat{\mathbb{C}}. \tag{1.18}$$

従って，$f(N)=\infty$ とすれば，$f:S^2\to\widehat{\mathbb{C}}$ は連続である．このとき，$f:S^2\to\widehat{\mathbb{C}}$ は全単射である．同様に，逆写像 $g=f^{-1}:\widehat{\mathbb{C}}\to S^2$ に対して，$g(\infty)=f^{-1}(\infty)=N=(0,0,1)$ である．$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}$ が ∞ に収束するとき，(1.15) より

$$g(z_n)=\left(\frac{z_n+\overline{z_n}}{1+|z_n|^2},\,i\frac{-z_n+\overline{z_n}}{1+|z_n|^2},\,\frac{-1+|z_n|^2}{1+|z_n|^2}\right) \tag{1.19}$$

なので，条件 $|z_n|\to\infty$ より $g(z_n)\to(0,0,1)$ となる．従って，g は ∞ においても連続である．以上により，f は S^2 から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である． □

1.4 複素数列とその収束

複素数の列 $\{z_n\}$ を**複素数列**または**複素点列**とよぶ．後者は複素平面の点列として考えるときに使うことが多い．

定義 1.4. $z_0\in\mathbb{C}$ とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して適当な自然数 N を選べば，$n\geq N$ なるすべての自然数 n に対して $|z_n-z_0|<\varepsilon$ となるとき，複素数列 $\{z_n\}$ が複素数 z_0 **に収束する**という．この場合 z_0 を複素数列 $\{z_n\}$ の**極限値**，または複素点列 $\{z_n\}$ の**極限点**という．
一方で，$z_0=\infty$ の場合，実数列 $\{|z_n|\}$ に対して $\lim_{n\to\infty}|z_n|=\infty$ ならば，$\mathbb{C}$ の点列 $\{z_n\}$ が $\widehat{\mathbb{C}}$ において無限遠点 ∞ **に収束**するという．

無限遠点への収束の定義は上で定義した $\widehat{\mathbb{C}}$ の位相と整合性がとれている．実際，$\widehat{\mathbb{C}}$ の位相の定義から次が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{C}\text{ の点列 }\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\text{ が }\widehat{\mathbb{C}}\text{ において }\infty\text{ に収束}\\
\iff\quad&n\text{ が充分大きいとき }z_n\neq0\text{ であり，}\left\{\frac{1}{z_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\text{ が }0\text{ に収束}\\
\iff\quad&\lim_{n\to\infty}|z_n|=\infty.
\end{aligned}$$

補題 1.5. $z_n = x_n + iy_n$（$n = 1, 2, \cdots$），$z_0 = x_0 + iy_0$ に対して，$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ となるための必要十分条件は

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

が成り立つことである．

Proof. $z_n - z_0 = (x_n - x_0) + i\,(y_n - y_0)$ であるから，

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$$

となり，$n \to \infty$ のとき

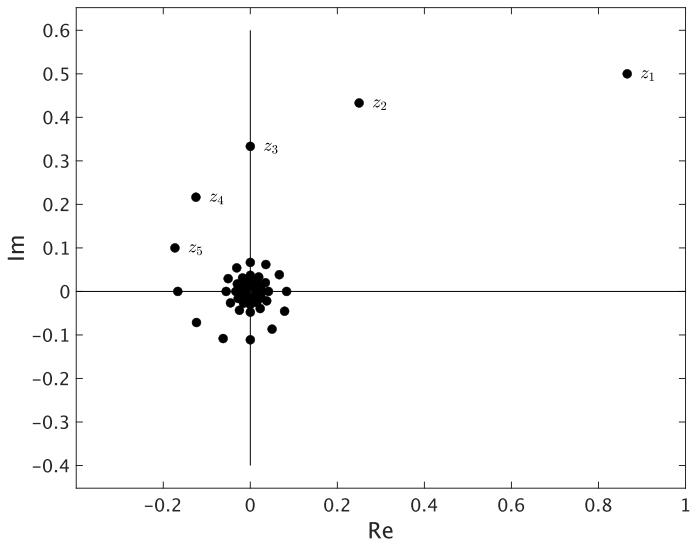
$$|z_n - z_0| \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x_n - x_0| \to 0 \quad \text{かつ} \quad |y_n - y_0| \to 0$$

であることは容易にわかる．

例 1.6. $z_n = \frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$, $(n = 1, 2, \cdots)$ とするとき $\lim_{n\to\infty} z_n$ を求める．
$z_n = x_n + iy_n$ とすれば

$$x_n = \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{6}, \qquad y_n = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{6}$$

であり，$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ となるから, 補題 *1.5* により $\lim_{n\to\infty} z_n = 0 + i0 = 0$ となる．$\{z_n\}$ を点列と考えると，z_n は下図 に示すような点を通りながら *0* に近づく．



例 1.7. $z_n = \frac{1}{\sqrt{n}-i}$, $(n = 1, 2, \cdots)$ に対し $\lim_{n\to\infty} z_n$ を求める．
$z_n = x_n + iy_n$ とすれば $z_n = \frac{\sqrt{n}+i}{n+1}$ であるから

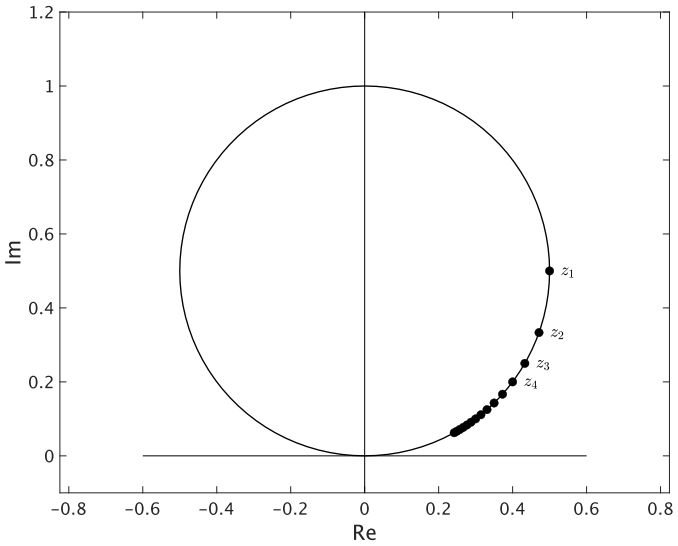
$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}, \qquad y_n = \frac{1}{n+1}$$

となり，補題 *1.5* により

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} + i \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

である．

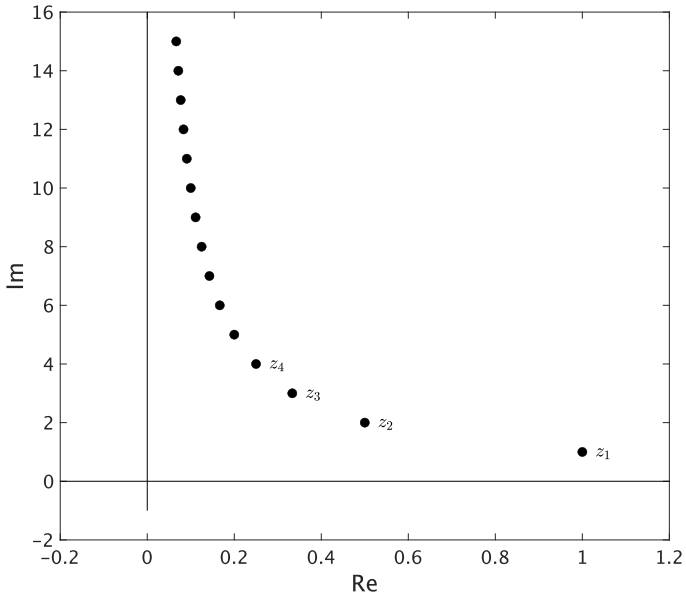
また，$x_n = y_n\sqrt{n} = \sqrt{y_n\,(1-y_n)}$ より $x_n^2 + \left(y_n - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ が成り立つ. よって z_n は $z = \frac{i}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円周上の点であり，z_n は下図 に示すような点を通りながら 0 に近づく．



例 1.8. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + in\right) = \infty$ を示す.
$z_n = \frac{1}{n} + in$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} + n^2} = \infty$$

であるから，定義 *1.4* より z_n は $y = 1/x$ の曲線に沿って無限遠点に近づく．



補題 1.9. $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0, \lim_{n\to\infty} w_n = w_0,\ a, b \in \mathbb{C}$ とするとき

$$\lim_{n\to\infty} (az_n \pm bw_n) = az_0 \pm bw_0$$
$$\lim_{n\to\infty} z_n w_n = z_0 w_0$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z_0}{w_0} \quad (w_n \neq 0, w_0 \neq 0)$$

証明は $\mathbb{R}^2$ の数列のときと同様であるから，練習問題とする．

付録

Riemann 球面の構成の概要

複素射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ をどちらか一方が零でない二つの複素数の比の全体として定義する:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{(z:w);\ z,w\in\mathbb{C},\ (z,w)\neq(0,0)\} = \big(\mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\}\big)\,/\sim . \tag{1.20}$$

但し，同値関係 $\sim$ は次のように与えられる：

$$(z,w)\sim(z',w') \qquad\Longleftrightarrow\qquad \lambda\in\mathbb{C}\backslash\{0\}\text{ が存在して, }(z,w)=\lambda\,(z',w')\,. \tag{1.21}$$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の部分集合 U と V を

$$U=\big\{(z:w)\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C});\ w\neq0\big\},\quad V=\big\{(z:w)\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C});\ z\neq0\big\} \tag{1.22}$$

のように定めると，$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ は U と V により覆われている:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U\cup V. \tag{1.23}$$

以下の写像は U,V と $\mathbb{C}$ の間の全単射である:

$$\pi_1 : U\to\mathbb{C},\ \ (z:w)\mapsto\frac{z}{w},\qquad \pi_2 : V\to\mathbb{C},\ \ (z:w)\mapsto\frac{w}{z}. \tag{1.24}$$

実際, π_1 と π_2 の逆写像が次のように与えられる:

$$\varphi:=\pi_1^{-1}:\mathbb{C}\to U,\ \ z\mapsto(z:1),\qquad \psi:=\pi_2^{-1}:\mathbb{C}\to V,\ \ z\mapsto(1:z). \tag{1.25}$$

従って, 写像 π_1,π_2 により, U,V を複素平面と同一視することができる. この時, 次が成り立つ:

$$\pi_1(U\cap V)=\mathbb{C}\backslash\{0\},\qquad \pi_2(U\cap V)=\mathbb{C}\backslash\{0\}. \tag{1.26}$$

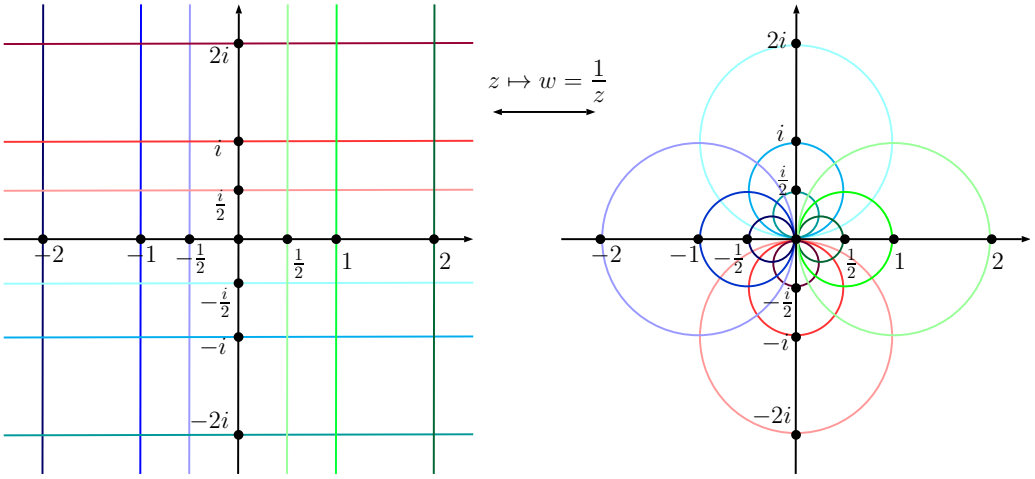
> *Proof.* $\pi_1(U\cap V)\subset\mathbb{C}\backslash\{0\}$ かつ $\mathbb{C}\backslash\{0\}\subset\pi_1(U\cap V)$ を示せばよい．$U\cap V$ はどちらも零でない複素数の比の集合であるので，$(z:w)\in U\cap V$ のとき $\pi_1(z:w)=\frac{z}{w}\neq0$ となり, $\pi_1(U\cap V)\subset\mathbb{C}\backslash\{0\}$ である. 次に, 任意に $\zeta\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ を与えたとき, $\pi_1(\zeta:1)=\frac{\zeta}{1}=\zeta$ であり, $\zeta\neq0$ なので $(\zeta:1)\in U\cap V$ である. 以上から, $\pi_1(U\cap V)=\mathbb{C}\backslash\{0\}$ である. π_2 については同様に確かめられる. □

U の座標と V の座標の関係は, 共通部分 $U\cap V$ において次の変換で与えられる:

$$\pi_1(U\cap V)=\mathbb{C}\backslash\{0\}\to\mathbb{C}\backslash\{0\}=\pi_2(U\cap V),\qquad z\mapsto\psi^{-1}\circ\varphi(z)=\frac{1}{z} \tag{1.27}$$

> *Proof.* $z\in\pi_1(U\cap V)$ は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の点としては $\pi_1^{-1}(z)=\varphi(z)=(z:1)$ である. 一方, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の定義から $(z:1)=(1:\frac{1}{z})$ なので,
>
> $$\pi_2(z:1)=\pi_2(1:\tfrac{1}{z})=\psi^{-1}(1:\tfrac{1}{z})=\frac{1}{z}. \tag{1.28}$$
>
> 以上から, $\pi_1(U\cap V)$ の点 z は $\pi_2(U\cap V)$ においては点 $\frac{1}{z}$ で表される. □

写像 $z \mapsto \frac{1}{z}$ の可視化は [?] で体験できる.



写像 $z \mapsto \frac{1}{z}$ は軸と平行な直線を原点を通る円に写す.

標語的に言えば, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ は二つの複素平面 U, V を共通部分 $U \cap V$ において写像 $z \to \frac{1}{z}$ にり貼り合わせて得られる集合である.

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の位相（開集合の概念が定義されていること）を次のように定義する:

$$O \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \text{ が開集合} \quad \Longleftrightarrow \quad \pi_1(O \cap U),\ \pi_2(O \cap V) \text{ の両方が } \mathbb{C} \text{ の開集合.} \tag{1.29}$$

これは実際に位相を定める，すなわち以下の 3 つの性質を持つ:

(i) (1.29) の右辺をみたす $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の部分集合族 $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとき, $\left(\bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha\right) \cap U = \bigcup_{\alpha \in A} (O_\alpha \cap U)$ より, $\pi_1\left(\left(\bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha\right) \cap U\right)$ は $\mathbb{C}$ の開集合である. 同様に, $\left(\bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha\right) \cap V$ も $\mathbb{C}$ の開集合である.

(ii) O_1, O_2 が (1.29) の右辺をみたす $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の部分集合のとき, $\pi_1(O_1 \cap O_2 \cap U) = \pi_1(O_1 \cap U) \cap \pi_1(O_2 \cap U)$ は $\mathbb{C}$ の開集合である. 同様に, $O_1 \cap O_2 \cap V$ も $\mathbb{C}$ の開集合である.

(iii) 空集合 $\emptyset$ と全体集合 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対して, $\pi_1(\emptyset \cap U) = \pi_1(\emptyset) = \emptyset$, $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cap U) = \pi_1(U) = \mathbb{C}$ はそれぞれ $\mathbb{C}$ の開集合である. V についても同様である.

以下，この位相により $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を位相空間（すなわち，開集合の概念が定義された集合）と見なす.
$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の位相の定義から，

$$\pi_1 : U \to \mathbb{C}, \quad \pi_2 : V \to \mathbb{C}, \quad \varphi : \mathbb{C} \to U, \quad \psi : \mathbb{C} \to V \tag{1.30}$$

は全て同相写像である（つまり，全単射な連続写像であり, 逆写像も連続である）.

以下, 同相写像 $\varphi : \mathbb{C} \to U \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $\varphi(z) = (z : 1)$ により $\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ と見なす. つまり, $\mathbb{C}$ の点 z を $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の点 $(z : 1)$ と見なす. この様にして $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$ の拡張と見るとき, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を $\widehat{\mathbb{C}}$ で表し, **Riemann 球面**と言う:

$$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad \infty := (1 : 0). \tag{1.31}$$

複素平面に付け加わった点 $\infty = (1 : 0)$ を Riemann 球面の**無限遠点**と言う. 無限遠点は V の原点である.
$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を添加して得られる集合である.

注 1.10. $\psi : \mathbb{C} \cong V$ を用いて $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$ の拡張と見なしても良い．このとき V を $\mathbb{C}'$ と表すことにすれば，$\mathbb{C}' = (\mathbb{C}\backslash\{0\}) \cup \{\infty\}, \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}' \cup \{0 = (0:1)\}$ である．V から見た無限遠点は，U の原点ということになる．この講義では，U を基準となる複素平面 $\mathbb{C}$ と見なす．

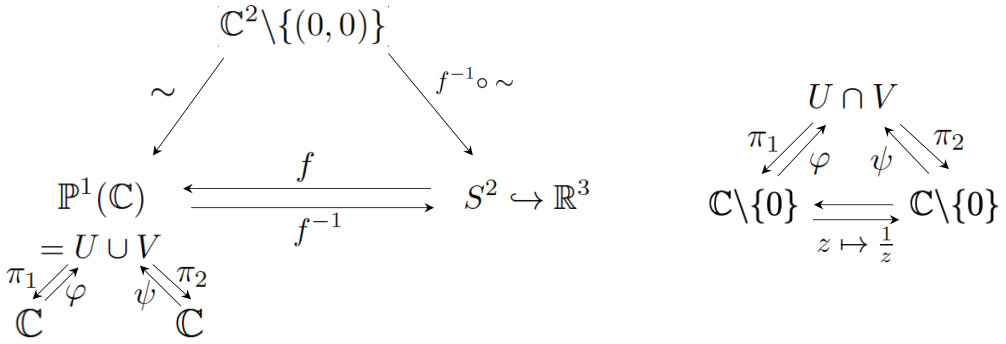
無限遠点の ε-近傍は以下のように与えられる（これを定義と思っても良い）．

$$\begin{aligned}\infty \text{ の } \varepsilon\text{-近傍} &= V \text{ の原点の } \varepsilon\text{-近傍} \\ &= \left\{(1:w) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C});\ |w| < \varepsilon\right\} \\ &= \left\{(z:1) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C});\ |z| > \tfrac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \{\infty\} \\ &= \{z \in \mathbb{C};\ |z| > \tfrac{1}{\varepsilon}\} \cup \{\infty\}.\end{aligned}$$

注 1.11. $\mathbb{C}$ の ε-近傍と上で定義した ∞ の ε-近傍を合わせて，$\widehat{\mathbb{C}}$ の位相を定義できる．きちんと位相を定義するには，$\widehat{\mathbb{C}}$ 開集合系 *(*開集合の全体*)* を定めるやり方があるが，$\widehat{\mathbb{C}}$ の各点 z に対して，z の基本近傍系と呼ばれる集合族を定めるやり方もある．簡単に言うと，集合 U が開集合であるとは，任意の U の点 x に対して上で定義した ε-近傍 $B(x,\varepsilon)$ が存在して U に収まる，というふうに定義すればよい．

従って, $\widehat{\mathbb{C}}$ の位相の定義から次が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\mathbb{C} \text{ の点列 } \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ が } \widehat{\mathbb{C}} \text{ において } \infty \text{ に収束} \\ \iff\ & n \text{ が充分大きいとき } z_n \neq 0 \text{ であり, } \left\{\frac{1}{z_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ が } 0 \text{ に収束} \\ \iff\ & \lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty.\end{aligned}$$



有理関数と Riemann 球面

Riemann 球面を導入する利点の一つは，有理関数を $\widehat{\mathbb{C}}$ 全体で定義された連続写像と見なすことが可能になるという点である．

定理 1.12. $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ を共通因子を持たない多項式とする．有理関数

$$R(z) := \frac{P(z)}{Q(z)} \tag{1.32}$$

は $\widehat{\mathbb{C}}$ から自分自身への連続写像である．

Proof. 定義から，次のように表示できる:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad Q(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m, \quad a_n b_m \neq 0. \tag{1.33}$$

$P(z)$ と $Q(z)$ は共通因子を持たないので，$\mathbb{C}$ 上で $P(z)$ と $Q(z)$ が同時に 0 になることはない．従って，有理関数 $R(z)$ は $\mathbb{C}$ から Riemann 球面への写像 $\widetilde{R}$ を導く：

$$\widetilde{R} : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}, \qquad z = (z:1) \mapsto (R(z):1) = (P(z):Q(z)). \tag{1.34}$$

$z \in \mathbb{C}$ のとき，$P(z) \neq 0$ または $Q(z) \neq 0$ なので，$P(z)$ と $Q(z)$ の連続性から $\widetilde{R} : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は連続である．実際，$\mathbb{C}$ の開集合 O_1, O_2 を

$$O_1 := \{z \in \mathbb{C};\ P(z) \neq 0\} = \widetilde{R}^{-1}(V), \qquad O_2 := \{z \in \mathbb{C};\ Q(z) \neq 0\} = \widetilde{R}^{-1}(U) \tag{1.35}$$

と定義すれば，P と Q が共通零点を持たないので $\mathbb{C} = O_1 \cup O_2$ である．O_1 上で,

$$\widetilde{R}(z) = (P(z):Q(z)) = (1 : Q(z)/P(z)) \tag{1.36}$$

と表され，$Q(z)/P(z)$ は O_1 から $\mathbb{C} = \pi_2(V)$ への連続写像なので，$\widetilde{R}$ は O_1 から $V \subset \widehat{\mathbb{C}}$ への連続写像である．(V から U への座標変換が連続写像なので，$\widetilde{R}(z) \in U$ であれば $\widetilde{R}$ は z の近傍から U への連続写像である．従って，$\widehat{\mathbb{C}}$ への写像が連続であるという性質は，値が U に含まれるか V に含まれるかに依らずに定まる.）同様に，$\widetilde{R}$ が O_2 から $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ への連続写像であることも示される．無限遠点 $\infty = (0:1)$ の近傍で写像 $\widetilde{R}$ の様子を見る．無限遠点の近傍では座標 z で与えられる U の点に対して，座標が $w = z^{-1}$ で与えられる V の点が対応していた．従って,

$$\widetilde{R} : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}, \qquad (z:1) \mapsto (R(z):1) = \left(R\left(w^{-1}\right):1\right) = \left(P\left(w^{-1}\right) : Q\left(w^{-1}\right)\right) \tag{1.37}$$

となる．ここで,

$$\begin{aligned} P\left(w^{-1}\right) &= a_0 + a_1 w^{-1} + a_2 w^{-2} + \cdots + a_n w^{-n} \\ &= w^{-n}\left(a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + a_2 w^{n-2} + \cdots + a_n\right), \\ Q\left(w^{-1}\right) &= b_0 + b_1 w^{-1} + b_2 w^{-2} + \cdots + b_m w^{-m} \\ &= w^{-m}\left(b_0 w^m + b_1 w^{m-1} + b_2 w^{m-2} + \cdots + b_m\right) \end{aligned} \tag{1.38}$$

および $(z:1) = (1:w)$ より，無限遠点の近傍 V で $\widetilde{R}$ を以下のように表すことができる:

(i) $m \geq n$ のとき,

$$(1:w) \mapsto \left(w^{m-n}\left(a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_n\right) : b_0 w^m + b_1 w^{m-1} + \cdots + b_m\right) \tag{1.39}$$

(ii) $n \geq m$ のとき,

$$(1:w) \mapsto \left(a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_n : w^{n-m}\left(b_0 w^m + b_1 w^{m-1} + \cdots + b_m\right)\right). \tag{1.40}$$

$a_n b_m \neq 0$ なので，(i)，(ii) から $w = 0$ の近傍で第 1 座標と第 2 座標が同時に 0 になることはない．従って，$\widetilde{R}$ は ∞ の近傍で定義されており，表示 (i)，(ii) から V 上で $\widetilde{R}$ は連続である．特に，$w = 0$ において $\widetilde{R}$ は連続である． □

$\widetilde{R} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は $m = n = 0$ のときは定値写像で，$\max\{m, n\} > 0$ のときは $\max\{m, n\} : 1$ の写像である．

すなわち，$a \in \widehat{\mathbb{C}}$ を一般の点とすれば，$\widetilde{R}^{-1}(a)$ は（重複度も含めて数えれば）$\max\{m, n\}$ 個の点から成る.（代数学の基本定理を仮定している.）$m = n = 1$ の場合，$\widetilde{R} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は同相である．このとき，$\widetilde{R}$ を $\widehat{\mathbb{C}}$ の**一次分数変換**，または **Möbius 変換**と言う（[?] で体験できる）．正則行列 $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ がある $k \neq 0$ を用いて $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と表されるとき，$\frac{a'z+b'}{c'z+d} = \frac{az+b}{cz+d}$ であるから，一次分数変換は

$$\frac{az+b}{cz+d}, \qquad A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) / \pm 1 \tag{1.41}$$

と一意的に表される．但し，

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2};\ ad - bc = 1 \right\} \tag{1.42}$$

は行列式が 1 である複素 2 次正方行列全体の集合である．本講義ではあまり登場しないが，一次分数変換は重要である.

例 1.13. $f(z) = \frac{1}{z}$ の例に戻り，

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0 \tag{1.43}$$

が成り立つことを三通りのアプローチで示す.

- 上で述べたように，$z \to \infty$ は $|z| \to \infty$ を意味するので，

  $$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} = \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{z} = 0 \tag{1.44}$$

  をすぐに得る.

- 位相に基づいた証明：0 の任意の近傍 A に対して，∞ の近傍 B があって

  $$z \in B \quad \text{ならば} \quad \frac{1}{z} \in A \tag{1.45}$$

  を示ばよい．開集合の定義より，A に収まる 0 の ε-近傍 $B(\varepsilon)$ が存在するので，

  $$z \in B \quad \text{ならば} \quad \left|\frac{1}{z}\right| < \varepsilon \tag{1.46}$$

  をみたす B があることを示ば十分である．∞ の ε-近傍の定義を思い出すと，B として ∞ の ε-近傍そのものをとればよいことがわかる.

- 距離に基づいた証明：

  $$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 \quad s.t. \quad d(z, \infty) < \delta \ \Rightarrow\ d\left(0, \frac{1}{z}\right) < \varepsilon \tag{1.47}$$

  を示すことになる．上の d の式を用いて書くと，

  $$\frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} < \delta \ \Rightarrow\ \frac{2\left|\frac{1}{z}\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{|z|^2}}} < \varepsilon \tag{1.48}$$

となるが，式が同じだから，$\delta := \varepsilon$ をとればよい．

同様に，

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{z} = \infty \tag{1.49}$$

であることが示せる．注意に値する事実は，$\mathbb{R}$ においては $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ の極限は存在しない（$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$ より）から，$\widehat{\mathbb{C}}$ での ∞ の意味が $\mathbb{R}$ の ∞ とは本質的に異なるということである．

そこで，

$$\widetilde{f}(z) := \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ \infty, & z = 0 \\ 0, & z = \infty \end{cases} \tag{1.50}$$

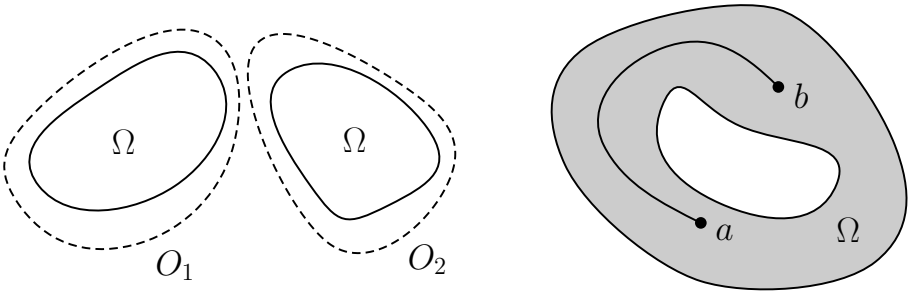
と定義すれば，$\widetilde{f} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ の関数として連続な関数となる．この逆関数も連続であるため，$\widetilde{f}$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である．

2　正則関数

2.1　複素平面の領域

定義 2.1. 複素平面 $\mathbb{C}$ の**領域**は，$\mathbb{C}$ の連結な開集合である．

定義 2.2. 集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ が**連結**であるとは，次の条件が成り立つことを言う:
開集合 O_1, O_2 に対し，$\Omega = (O_1 \cap \Omega) \cup (O_2 \cap \Omega)$, $(O_1 \cap \Omega) \cap (O_2 \cap \Omega) = \emptyset$ と表すとき, $O_1 \cap \Omega = \emptyset$ または $O_2 \cap \Omega = \emptyset$ のどちらか一方が必ず成り立つ.



共通部分を持たない開集合 O_1, O_2 で覆われている連結でない Ω の例と連結集合 Ω の例.

$\mathbb{C}$ の開集合 Ω が連結であるための必要十分条件は，それが弧状連結であることである．

補題 2.3. $\mathbb{C}$ の開集合 Ω が連結であるのは，任意の二点 $a, b \in \Omega$ に対して，連続曲線 $\gamma : [0,1] \to \Omega$ であって，$\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ をみたすものが存在するときとそのときのみである．

Proof.

- Ω が連結 $\Longrightarrow$ Ω は弧状連結を示す.
  $c \in \Omega$ を固定する．c と Ω 内の連続曲線で結べる Ω の点全体を O_1 とし，c と Ω 内の連続曲線で結べない Ω の点全体を O_2 とする．この定義から $\Omega = O_1 \cup O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ である．O_1, O_2 はそれぞれ開集合であることを示す．Ω が開集合なので，任意の $d \in \Omega$ に対して $r > 0$ が存在し，$B(d,r) \subset \Omega$ である．$d \in O_1$ と仮定すれば，c と d を結ぶ Ω の連続曲線 $\gamma : [0,1] \to \Omega$, $\gamma(0) = c$, $\gamma(1) = d$ が存在する．$B(d,r)$ の任意の点 z に対して，d と z を直線 $\ell(s) = (1-s)d + sz$ で結べば，γ と ℓ をつなげて得られる曲線

  $$\ell \cdot \gamma = \begin{cases} \gamma(2t) & (0 \le t \le 1/2) \\ \ell(2t-1) & (1/2 \le t \le 1) \end{cases} \tag{2.1}$$

  は $\gamma(1) = d = \ell(0)$ を充すので，c と z を結ぶ Ω の連続曲線である．従って，$B(d,r) \subset O_1$ である．以上から O_1 は内点より成るので開集合である.

  次に $d \in O_2$ とすれば，すべての $z \in B(d,r)$ は c と Ω の連続曲線で結ぶことはできない．実際，c と $z \in B(d,r)$ を Ω の連続曲線 γ' で結べると仮定すれば，z と d を直線 ℓ' で結べばそれは Ω の連続曲線であるから，両者を継ぎ合わせて得られる曲線 $\ell' \cdot \gamma'$ を上と同様に定めれば，これは c と d を結ぶ Ω の連続曲線である．これは c と d が Ω の連続曲線で結べないという仮定に矛盾するので，任意の $z \in B(d,r)$ は O_2 の点である．以上から O_2 も開集合である．Ω の連結性から $O_1 = \emptyset$ または $O_2 = \emptyset$ となるが，$c \in O_1$ なので $O_1 \neq \emptyset$ である．従って，$O_2 = \emptyset$ であり，$\Omega = O_1$，すなわち Ω の任意の点は c と Ω の連続曲線で結べる．Ω の任意の 2 点を与えるとき，それらの 2 点を c を中継することにより Ω の連続曲線で結ぶことが可能なので，Ω は弧状連結である.

- Ω が弧状連結 $\Longrightarrow$ Ω は連結を示す.（ただし，$[0,1]$ の連結性を認める.）
  開集合 O_1, O_2 が存在して，$\Omega = O_1 \cup O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ が成り立つと仮定する．$O_1 \neq \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$ を仮定する．このとき $c \in O_1$, $d \in O_2$ を取ることができる．Ω は弧状連結なので，連続曲線 $\gamma : [0,1] \to \Omega$ で $\gamma(0) = c$, $\gamma(1) = d$ をみたすものが存在する．このとき，γ の連続性から $\gamma^{-1}(O_1)$ と $\gamma^{-1}(O_2)$ はそれぞれ $[0,1]$ の開集合であり，$\gamma^{-1}(O_1) \cup \gamma^{-1}(O_2) = \gamma^{-1}(O_1 \cup O_2) = \gamma^{-1}(\Omega) = [0,1]$ 及び $\gamma^{-1}(O_1) \cap \gamma^{-1}(O_2) = \gamma^{-1}(O_1 \cap O_2) = \gamma^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ をみたす．$[0,1]$ の連結性から $\gamma^{-1}(O_1) = \emptyset$ または $\gamma^{-1}(O_2) = \emptyset$ であるが, これは $c \in \gamma^{-1}(O_1)$ と $d \in \gamma^{-1}(O_2)$ に矛盾する．$O_1 \neq \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$ を仮定すると矛盾が生じるので，$O_1 = \emptyset$ または $O_2 = \emptyset$ が従い，Ω は連結である. □

2.2 複素関数の極限値

以下，Ω を複素平面の**領域**とし，$w = f(z)$ を Ω で定義される複素関数とする.

定義 2.4. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$0 < |z - z_0| < \delta$ ならば $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ が成り立つとき, $f(z)$ は z_0 で**極限値** w_0 をつといい，次のように書く：

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$

上記の定義を言い換えると，“$z \to z_0$ のとき（または $|z - z_0| \to 0$ のとき） $f(z) \to w_0$（または

$|f(z)-w_0|\to 0$）” となる．$\widehat{\mathbb{C}}$ の位相より，これを無限遠点を含む場合に拡張できる：

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=w_0 \quad\Longleftrightarrow\quad |z|\to+\infty \text{ のとき } |f(z)-w_0|\to 0$$
$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty \quad\Longleftrightarrow\quad |z-z_0|\to 0 \text{ のとき } |f(z)|\to+\infty$$
$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty \quad\Longleftrightarrow\quad |z|\to+\infty \text{ のとき } |f(z)|\to+\infty$$

注 2.5. 複素数列の収束は実部と虚部のそれぞれの収束に同値であるため，$z=x+iy$, $z_0=x_0+iy_0$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $w_0=u_0+iv_0$ とすれば，

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0 \text{ かつ } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0$$

が成り立つ．

注 2.6. 以下の複素極限の基本性質は容易に示される（左辺と右辺の差の絶対値をとり，三角不等式を適用）：$\lim_{z\to z_0} f(z)=\alpha$, $\lim_{z\to z_0} g(z)=\beta$ とするとき，

$$\lim_{z\to z_0}\{kf(z)\pm\ell g(z)\}=k\alpha\pm\ell\beta$$
$$\lim_{z\to z_0}\{f(z)g(z)\}=\alpha\beta$$
$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\alpha}{\beta}\quad (g(z)\neq 0,\beta\neq 0)$$

例 2.7. 有理関数

$$R(z)=\frac{a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0}{b_mz^m+\cdots+b_1z+b_0}\quad (a_n\neq 0,\ b_m\neq 0)$$

において $\lim_{z\to\infty} R(z)$ を求める．

$$R(z)=z^{n-m}\frac{a_n+a_{n-1}z^{-1}+\cdots+a_0z^{-n}}{b_m+b_{m-1}z^{-1}+\cdots+b_0z^{-m}}$$

と書けて，

$$\frac{a_n+a_{n-1}z^{-1}+\cdots+a_0z^{-n}}{b_m+b_{m-1}z^{-1}+\cdots+b_0z^{-m}}\to\frac{a_n}{b_m}\quad (z\to\infty)$$

であるから

$$\lim_{z\to\infty} R(z)=\begin{cases}\infty & (n>m)\\ \frac{a_n}{b_n} & (n=m)\\ 0 & (n<m)\end{cases}.$$

ここで，$k>0$ に対して $\lim_{z\to\infty} z^{-k}=0$ である理由は，$|z^{-k}|=|z|^{-k}\to 0$（$|z|\to\infty$ のとき）が成り立つことである．

例 2.8. $f(z)=\overline{z}$ に対して，$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ が成り立つ．
実際，$|\overline{z}-\overline{z_0}|=|\overline{z-z_0}|=|z-z_0|$ だから，$|z-z_0|\to 0$ のとき $|f(z)-f(z_0)|=|\overline{z}-\overline{z_0}|\to 0$ である．

例 2.9. $z\to 0$ とするとき，$f(z)=\overline{z}/z$ の極限値を調べる．
$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)(r\neq 0)$ とするとき

$$f(z)=\frac{\overline{z}}{z}=\frac{r(\cos\theta-i\sin\theta)}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)$$

となる．

- $\theta = 0$ として z を実軸の正の部分から 0 に近づけると $f(z) \to \cos 0 = 1$ となり，
- $\theta = \pi/4$ として原点を通る半直線上で z を 0 に近づけると $f(z) \to i\sin(-\pi/2) = -i$ となる．

すなわち, z の 0 への近づけ方を変えれば $f(z)$ の極限値が変わるので，$f(z)$ は一定値に近づかない．したがって，$f(z) = \overline{z}/z$ は $z = 0$ で極限値をもたない．

2.3 複素関数の連続性

Ω を $\mathbb{C}$ の部分集合とする．以下，特に断らない限り，Ω 上の関数とは，Ω で定義された複素数値関数，すなわち Ω から $\mathbb{C}$ への写像を意味する．

定義 2.10. $f(z)$ を Ω 上の関数とするとき，

$$\begin{aligned} & f(z) \text{ が } a \in \Omega \text{ において連続} \\ \iff \quad & \lim_{z\to a} f(z) = f(a) \\ \iff \quad & \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ s.t.\quad |f(z) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall z \in B(a,\delta) \\ \iff \quad & \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ s.t.\quad |z - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(z) - f(a)| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ω 上の関数 $f(z)$ が Ω の全ての点で連続のとき，$f(z)$ を Ω 上の連続関数という．

注 2.11. 連続関数 $f(z), g(z)$ に対して, $f(z)+g(z)$，$f(z)-g(z)$，$cf(z)$（$c \in \mathbb{C}$），$f(z)g(z)$，$f(z)/g(z)$（$g(z) \neq 0$），$g(f(z))$ はすべて連続である．
これより，z の任意の多項式や有理関数などが連続であることがわかる．

注 2.12. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が $z_0 = x_0 + iy_0$ で連続であるための必要十分条件は，$u(x,y), v(x,y)$ がともに $(x,y) = (x_0, y_0)$ で連続なことである．

例 2.13. $f(z)$ が閉円盤 $|z| \leq R$ で連続ならば，$|f(z)|$ は $|z| \leq R$ で有界であることを示す．
$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とすると，$u(x,y), v(x,y)$ は閉円盤 $x^2 + y^2 \leq R^2$ で連続である．ここで

$$|f(z)| = \sqrt{\{u(x,y)\}^2 + \{v(x,y)\}^2}$$

であり，$\sqrt{\{u(x,y)\}^2 + \{v(x,y)\}^2}$ は (x,y) に関して連続となるから, $x^2 + y^2 \leq R^2$ において最大値が存在する．この最大値を M とすると $|f(z)| \leq M$，すなわち $|f(z)|$ は $|z| \leq R$ で有界である．
（この一般化として，有界閉集合において連続な関数は有界である，ということが言える.）

2.4 複素微分と正則関数

定義 2.14 (複素微分)**.** $f(z)$ を Ω 上の複素数値関数とする.

- 次の極限が存在するとき，$f(z)$ は点 $a \in \Omega$ において**複素微分可能**という*:*

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}. \tag{2.3}$$

この極限値を $f'(a)$ で表す．同じことであるが，$f'(a) \in \mathbb{C}$ が存在して，$h = 0$ の近傍で $f(a+h)$ が次のように表されるとき，$f(z)$ は a で複素微分可能である*:*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h), \quad o(h)/|h| \to 0 \quad (h \to 0). \tag{2.4}$$

- $f(z)$ が Ω の各点で複素微分可能なとき，$f(z)$ を Ω 上の**正則関数**または**解析関数**という．正則関数の複素微分として得られる Ω 上の関数 $z \mapsto f'(z)$ を $f(z)$ の**導関数**と言う.

注 2.15. 定義 *2.14* の (2.4) 式から，Ω の各点で複素微分可能な関数（とくに正則関数）は Ω 上で連続である.

注 2.16. 関数が定義されている領域の各点において複素微分可能ならば，導関数が連続であることは *E. Goursat* により示された．従ってこの講義では，正則関数は定義域上で C^1 級であることを仮定する．以下，領域 Ω 上で C^1-級である正則関数全体の集合を記号 $\mathcal{O}(\Omega)$ で表す.

複素平面の領域 Ω 上の関数が正則であるという性質は，次の操作に関して閉じている：

(i) 線形結合：$f(z), g(z) \in \mathcal{O}(\Omega),\ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \Longrightarrow \alpha f(z) + \beta g(z) \in \mathcal{O}(\Omega)$.

(ii) 積：$f(z), g(z) \in \mathcal{O}(\Omega) \Longrightarrow f(z)g(z) \in \mathcal{O}(\Omega)$.

(iii) Ω 上で零を取らない関数による商：$f(z), g(z) \in \mathcal{O}(\Omega),\ g(z) \neq 0\ \forall z \in \Omega \Longrightarrow f(z)/g(z) \in \mathcal{O}(\Omega)$.

(iv) 合成：$f(z) \in \mathcal{O}(\Omega),\ g(w) \in \mathcal{O}(D),\ f(\Omega) \subset D \Longrightarrow g \circ f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

実際，(i), (ii), (iii), (iv) のそれぞれの場合，導関数が以下のように与えられる：

$$\{\alpha f(z) + \beta g(z)\}' = \alpha f'(z) + \beta g'(z), \qquad \{f(z)g(z)\}' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \tag{2.5}$$

$$\{f(z)/g(z)\}' = \{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)\}/g(z)^2, \qquad \frac{d}{dz} g(f(z)) = g'(f(z))f'(z). \tag{2.6}$$

これらの等式の証明は実数値関数の場合と同様なので，省略する.

例 2.17. 関数 $f(z) = z$ は $\mathbb{C}$ 上で正則である．実際，複素微分の定義から，$f'(z) = 1$ が任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して成り立つ．従って，*(i), (ii)* より，z の多項式は $\mathbb{C}$ 上の正則関数である：$\mathbb{C}[z] \subset \mathcal{O}(\mathbb{C})$．また，*(iii)* より，$z$ の有理関数は分母が零となる点から成る $\mathbb{C}$ の部分集合の補集合上の正則関数である.

例 2.18. 関数 $f(z) = \overline{z}$ は $\mathbb{C}$ 上で正則でない．実際，$a \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\overline{h}}{h} = e^{-2i\theta}, \quad \text{ただし}\ \ h = re^{i\theta}. \tag{2.7}$$

従って，0 に収束する点列 $\{h_n\}$ を適当に選べば，任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して $\lim_{n\to\infty} \frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n} = e^{-2i\theta}$ とできるので，極限 $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ は存在しない（例 *2.9* も参照）.

注 2.19. 上の例でわかるように,「f の実部と虚部がそれぞれ微分可能 $\Rightarrow$ f が複素微分可能」という主張は成立しない（“微分可能”を “連続”で置き換えれば成り立つ）．一方で，逆は成り立つ．すなわち,「f が複素微分可能 $\Rightarrow$ f の実部と虚部がそれぞれ微分可能」は正しい．これを見るために，$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が $z_0 = x_0 + iy_0$ で微分可能で，$f'(z_0) = \alpha = a + ib$ とする．このとき，$h = k + i\ell$ に対して，

$$\frac{u(x_0+k, y_0+\ell) - u(x_0,y_0) - (ak - b\ell)}{|h|} = \mathrm{Re}\,\frac{f(z_0+h) - f(z_0) - hf'(z_0)}{|h|}$$

が成り立つが，複素微分の定義より右辺は $h \to 0$ のとき 0 に収束する．したがって，$u(x,y)$ は (x_0,y_0) で微分可能で，$u_x(x_0,y_0) = a, u_y(x_0,y_0) = -b$ である．v についても同様に示せる．

注 2.20. Ω 上の実数値関数 $f(z)$ が a において複素微分可能のとき，$f'(a) = 0$．実際,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0,\ h\in\mathbb{R}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

一方,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0,\ h\in\mathbb{R}} \frac{f(a+ih) - f(a)}{ih} \in i\mathbb{R} \tag{2.9}$$

となり，f が a で複素微分可能ならば $f'(a) \in \mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = 0$．従って，定義 *2.14* の意味で複素関数の微分を考えるとき，関数は実数値関数ではなく複素関数を考えなければ意味のある理論はできない.
また，これより関数 $f_1(z) = \mathrm{Re}\,z$, $f_2(z) = \mathrm{Im}\,z$, $f_3(z) = |z|$, $f_4(z) = \mathrm{Arg}\,z$ は正則でないことがわかる．

2.5 正則関数と Cauchy-Riemann の関係式

定理 2.21. $f(z)$ を領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数とする．$f(z)$ を実部と虚部に分けて

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad z = x + iy, \tag{2.10}$$

と書くとき，$u(x,y), v(x,y)$ は以下の *Cauchy-Riemann* の関係式をみたす*:*

$$u_x(x,y) = v_y(x,y), \quad u_y(x,y) = -v_x(x,y). \tag{2.11}$$

Proof. $a = \alpha + i\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする．複素微分の定義から，

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{u(\alpha+h,\beta) + iv(\alpha+h,\beta) - u(\alpha,\beta) - iv(\alpha,\beta)}{h} = u_x(\alpha,\beta) + iv_x(\alpha,\beta). \tag{2.12}$$

一方,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{u(\alpha,\beta+h) + iv(\alpha,\beta+h) - u(\alpha,\beta) - iv(\alpha,\beta)}{ih} = v_y(\alpha,\beta) - iu_y(\alpha,\beta). \tag{2.13}$$

両者を比較すれば，Cauchy-Riemann の関係式が従う． □

例 2.22. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = z^2$ の場合，$f(z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ より実部と虚部はそれぞれ $u(x,y) = x^2 - y^2,\ v(x,y) = 2xy$ となる．さらに，

$$u_x = 2x = v_y, \qquad u_y = -2y = -v_x \tag{2.14}$$

より，*Cauchy-Riemann* の関係式をみたす.

例 2.23. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = x^2 + iy^2$ の場合，実部と虚部はそれぞれ $u(x,y) = x^2,\ v(x,y) = y^2$ となる．このとき，$u_x = 2x,\ v_y = 2y$ であるから，$x = y$ でない限り，*Cauchy-Riemann* の関係式 $u_x = v_y$ は成立しない．よって，この関数は $x \neq y$ なる点 $x + iy$ で微分不可能である.

記号 $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ を以下の様に定める:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{2.15}$$

系 2.24. 関数 $f(z)$ が *Cauchy-Riemann* の関係式をみたすための必要十分条件は次で与えられる*:*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0. \tag{2.16}$$

Proof. $\partial/\partial\bar{z}$ の定義から

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv) = \frac{1}{2}\left\{(u_x - v_y) + i\,(u_y + v_x)\right\} \tag{2.17}$$

なので, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0 \iff u_x - v_y = u_y + v_x = 0 \iff u_x = v_y,\ u_y = -v_x.$ (2.18)

これは Cauchy-Riemann の関係式である. □

上で見た例であるが,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x - iy) = \frac{1}{2}(1+1) = 1 \neq 0 \tag{2.19}$$

なので，$\bar{z}$ は正則関数ではない．条件 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$ から，$f(z)$ が正則関数のとき，$f(z)$ は何らかの意味で $\bar{z}$ を含まない関数であることが予想されるが，これは実際に正しいことを後で示す（Cauchy の積分公式から，$f(z)$ は z の整級数として表される）．

定理 2.25. Ω 上の C^1 級実数値関数 $u(x,y), v(x,y)$ が *Cauchy-Riemann* の関係式をみたすならば，複素関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ は Ω 上の正則関数であり，導関数 $f'(z)$ は Ω 上連続である．

Proof. $a = (\alpha, \beta) \in \Omega$ を任意の点とする．$u(x,y), v(x,y)$ は C^1 級関数なので，特に全微分可能である．Cauchy-Riemann の関係式を用いれば,

$$\begin{aligned} u(\alpha+k, \beta+\ell) &= u(\alpha,\beta) + ku_x(\alpha,\beta) + \ell u_y(\alpha,\beta) + o\left(\sqrt{k^2+\ell^2}\right) \\ &= u(\alpha,\beta) + ku_x(\alpha,\beta) - \ell v_x(\alpha,\beta) + o\left(\sqrt{k^2+\ell^2}\right). \end{aligned} \tag{2.20}$$

ここで k, ℓ の関数 $o\left(\sqrt{k^2+\ell^2}\right)$ は以下をみたす：

$$\frac{o\left(\sqrt{k^2+\ell^2}\right)}{\sqrt{k^2+\ell^2}} \to 0 \qquad \text{as } (k,\ell) \to (0,0). \tag{2.21}$$

同様に，Cauchy-Riemann の関係式を用いれば，

$$\begin{aligned} v(\alpha+k, \beta+\ell) &= v(\alpha,\beta) + kv_x(\alpha,\beta) + \ell v_y(\alpha,\beta) + o\left(\sqrt{k^2+\ell^2}\right) \\ &= v(\alpha,\beta) + kv_x(\alpha,\beta) + \ell u_x(\alpha,\beta) + o\left(\sqrt{k^2+\ell^2}\right). \end{aligned} \tag{2.22}$$

(2.20), (2.22) から，$h = k + i\ell$ に対して，

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \{u(\alpha+k, \beta+\ell) + iv(\alpha+k, \beta+\ell)\} - \{u(\alpha,\beta) + iv(\alpha,\beta)\} \\ &= ku_x(\alpha,\beta) - \ell v_x(\alpha,\beta) + i\{kv_x(\alpha,\beta) + \ell u_x(\alpha,\beta)\} + o\left(\sqrt{k^2+\ell^2}\right) \\ &= \{u_x(\alpha,\beta) + iv_x(\alpha,\beta)\}(k + i\ell) + o\left(\sqrt{k^2+\ell^2}\right) \\ &= \{u_x(\alpha,\beta) + iv_x(\alpha,\beta)\}h + o(|h|) \end{aligned} \tag{2.23}$$

と表されるので,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = u_x(\alpha,\beta) + iv_x(\alpha,\beta). \tag{2.24}$$

以上から，a において $f(z)$ は複素微分可能である．$a \in \Omega$ は任意の点なので，$f(z)$ は Ω 上で複素微分可能．$u, v \in C^1(\Omega)$ と仮定したので，(2.24) より $f' \in C^0(\Omega)$．よって，$f \in \mathcal{O}(\Omega)$. □

定理 2.21, 2.25 から，正則関数が C^1 級であることを要請しておけば,

$$f = u + iv \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad u, v \in C^1(\Omega) \text{ は Cauchy-Riemann の関係式をみたす.} \tag{2.25}$$

例 2.26. 正則関数 $f(z)$ の実部が $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ ならば，虚部 $v(x,y)$ を求める．
Cauchy-Riemann 関係式より

$$v_y = u_x = -6xy, \qquad v_x = -u_y = -3y^2 + 3x^2$$

である．$v_y = -6xy$ を y について積分すれば，$v(x,y) = -3xy^2 + \varphi(x)$ を得る．ここで，$\varphi(x)$ は x のみの連続な関数である．このように得られた $v(x,y)$ を x について偏微分し，上の v_x の式と比較すれば，

$$v_x = -3y^2 + \varphi'(x) = -3y^2 + 3x^2$$

となるので，$\varphi(x) = x^3 + c,\ c \in \mathbb{R}$．よって，$v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + c$ と虚部は実部より（定数を除いて）一意的に決まる．f が正則なので，z のみの関数として表すことができる：

$$f(z) = (y^3 - 3x^2y) + i(x^3 - 3xy^2 + c) = i(x+iy)^3 + ic = iz^3 + ic.$$

2.6 調和関数

系 2.27. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ を Ω 上の正則関数とする．f が C^2 級のとき，$u(x,y), v(x,y)$ は Ω 上で調和である．すなわち，u, v は次の *Laplace* 方程式を Ω 上でみたす：

$$\Delta u = \Delta v = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{2.26}$$

Laplace 方程式をみたす C^2 級関数を**調和関数**という．

Proof. u, v は C^2 級なので，Cauchy-Riemann の関係式から，

$$u_{xx} = (u_x)_x = (v_y)_x = v_{yx}, \qquad u_{yy} = (u_y)_y = -(v_x)_y = -v_{xy}. \tag{2.27}$$

v は C^2 級なので $v_{xy} = v_{yx}$．従って，$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ である．同様に $\Delta v = 0$ も従う． □

注 2.28. f が C^1 級のとき，u, v は Ω 上の**弱い意味の調和関数**である．すなわち，$\mathbb{C}$ 上の C^∞ 級関数 φ が Ω に含まれるある有界閉集合の補集合上で恒等的に 0 であるとき，次の等式が成り立つ：

$$\int_\Omega u\Delta\varphi \, dx\, dy = \int_\Omega v\Delta\varphi \, dx\, dy = 0. \tag{2.28}$$

実際，φ に関する仮定から，有界閉集合 $K \subset \Omega$ が存在して，$\varphi(z) = 0\ \forall z \in \Omega\backslash K$．$K$ の補集合上で 0 と定義することにより，φ を $\mathbb{C}$ 上の C^∞ 級関数と見なすことができる．$R > 0$ を十分大きく選べば，$K \subset [-R, R] \times [-R, R]$ として良い．この時，$\varphi(z) = 0\ \forall z \in \mathbb{C}\backslash K$ より，$|x| \geq R$ または $|y| \geq R$ のとき，$\varphi(x,y) = 0$ である．各変数ごとに部分積分を行うことにより次式を得る：

$$\int_\Omega u\Delta\varphi \, dx\, dy = \int_{\mathbb{C}} u\left(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}\right) dx\, dy = -\int_{\mathbb{C}} \left(u_x\varphi_x + u_y\varphi_y\right) dx\, dy. \tag{2.29}$$

実際，重積分は累次積分なので，部分積分から，

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{C}} u\varphi_{xx} \, dx\, dy = \int_{-R}^{R} dy \int_{-R}^{R} u(x,y)\varphi_{xx}(x,y) \, dx \\
&= \int_{-R}^{R} dy \left\{ \left[u(x,y)\varphi_x(x,y)\right]_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R} u_x(x,y)\varphi_x(x,y) \, dx \right\} \\
&= \int_{-R}^{R} dy \left\{ u(R,y)\overbrace{\varphi_x(R,y)}^{=0} - u(-R,y)\overbrace{\varphi_x(-R,y)}^{=0} - \int_{-R}^{R} u_x(x,y)\varphi_x(x,y) \, dx \right\} \\
&= -\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} u_x(x,y)\varphi_x(x,y) \, dx\, dy = -\int_{\mathbb{C}} u_x\varphi_x \, dx\, dy.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

等式 $\int_{\mathbb{C}} u\varphi_{yy}\,dx\,dy = -\int_{\mathbb{C}} u_y\varphi_y\,dx\,dy$ についても同様に示される．(2.29) の最後の式に *Cauchy-Riemann* の関係式を用いて，再度 (2.30) と同様に部分積分を行えば，

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\Delta\varphi\,dx\,dy &= -\int_{\mathbb{C}} (u_x\varphi_x + u_y\varphi_y)\,dx\,dy \\ &= -\int_{\mathbb{C}} (v_y\varphi_x - v_x\varphi_y)\,dx\,dy \\ &= -\int_{\mathbb{C}} (-v\varphi_{yx} + v\varphi_{xy})\,dx\,dy = 0.\end{aligned} \tag{2.31}$$

但し，$\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$ であることを用いた．$\int_\Omega v\Delta\varphi\,dx\,dy = 0$ についても同様である．

注 2.29. 弱い意味の調和関数は通常の意味の調和関数であることが知られている（*Weyl* の補題）．従って，f が C^1 級でも u, v は自動的に C^2 級となり，Ω 上の調和関数になる．（*Weyl* の補題の証明は準備が必要なので，ここでは扱わない．）また，正則関数が定義域の任意の点の近傍で収束する整級数に展開されることを後で示す．このことからも正則関数は自動的に C^∞ 級関数である．

調和関数の組 $u(x,y), v(x,y)$ が Cauchy-Riemann の関係式 $u_x = v_y, u_y = -v_x$ をみたすとき，$v(x,y)$ を $u(x,y)$ の**共役調和関数**という．考えている領域が単連結（後で定義する）のとき，Poincaré の補題を用いることにより $u(x,y)$ の共役調和関数を u から定まるある 1 次微分形式の線積分として表すことができる．従って，単連結領域上では正則関数と調和関数に本質的な差はない．

例 2.30. $f(z) \in \mathcal{O}(\Omega), g(w) \in \mathcal{O}(D), f(\Omega) \subset D \Longrightarrow g \circ f \in \mathcal{O}(\Omega)$ であり，Ω 上で次式が成り立つ:

$$\frac{d}{dz} g(f(z)) = g'(f(z)) f'(z). \tag{2.32}$$

Proof. ここでは Cauchy-Riemann の関係式と偏微分の連鎖律を用いて示す.

- **Step 1:** $F(z) = g(f(z))$ が正則であることを示す．$z = x + iy, w = s + it$ と表す．$f(z), g(w)$ を

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \qquad g(w) = \phi(s,t) + i\psi(s,t) \tag{2.33}$$

と表示するとき，

$$F(z) = g(f(z)) = g(u(x,y), v(x,y)) = \phi(u(x,y), v(x,y)) + i\psi(u(x,y), v(x,y)). \tag{2.34}$$

そこで，

$$U(x,y) = \phi(u(x,y), v(x,y)), \qquad V(x,y) = \psi(u(x,y), v(x,y)) \tag{2.35}$$

とおくとき，$F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ であるから，U, V が Cauchy-Riemann の関係式をみたすことを示せば良い．偏微分の連鎖律から，

$$U_x(x,y) = \phi_s(u,v)u_x + \phi_t(u,v)v_x, \qquad U_y(x,y) = \phi_s(u,v)u_y + \phi_t(u,v)v_y, \tag{2.36}$$

$$V_x(x,y) = \psi_s(u,v)u_x + \psi_t(u,v)v_x, \qquad V_y(x,y) = \psi_s(u,v)u_y + \psi_t(u,v)v_y. \tag{2.37}$$

仮定から u, v および ϕ, ψ に対して Cauchy-Riemann の関係式が成り立つ：

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x, \qquad \phi_s = \psi_t, \quad \phi_t = -\psi_s. \tag{2.38}$$

従って，

$$\begin{aligned} V_y(x,y) &= \psi_s(u,v)u_y(x,y) + \psi_t(u,v)v_y(x,y) = -\phi_t(u,v)\left(-v_x(x,y)\right) + \phi_s(u,v)u_x(x,y) \\ &= \phi_s(u,v)u_x(x,y) + \phi_t(u,v)v_x(x,y) = U_x(x,y) \\ V_x(x,y) &= \psi_s(u,v)u_x(x,y) + \psi_t(u,v)v_x(x,y) = -\phi_t(u,v)v_y(x,y) + \phi_s(u,v)\left(-u_y(x,y)\right) \\ &= -\phi_s(u,v)u_y(x,y) - \phi_t(u,v)v_y(x,y) = -U_y(x,y). \end{aligned} \tag{2.39}$$

以上から，U, V が Ω 上で Cauchy-Riemann の関係式をみたすことが確かめられたので，定理 2.25 より $g \circ f$ は Ω 上の正則関数である.

- **Step 2:** $F(z) = g(f(z))$ とおく．$F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ は Ω 上の正則関数である．このとき，偏微分の連鎖律と Cauchy-Riemann の関係式から，

$$\begin{aligned} F'(z) &= U_x(x,y) + iV_x(x,y) \\ &= \phi_s(f(z))u_x + \phi_t(f(z))v_x + i\left\{\psi_s(f(z))u_x + \psi_t(f(z))v_x\right\} \\ &= \phi_s(f(z))u_x - \psi_s(f(z))v_x + i\left\{\psi_s(f(z))u_x + \phi_s(f(z))v_x\right\} \\ &= \left\{\phi_s(f(z)) + i\psi_s(f(z))\right\}(u_x + iv_x) = g'(f(z))f'(z) \end{aligned} \tag{2.40}$$

となり，求める式が得られる. □

次節で多項式や（分母が零にならない領域上で考えたときの）有理関数以外にも正則関数が多く存在することを示す.

例 2.31. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を領域とし，$f \in \mathcal{O}(\Omega)$ とする．Ω の複素共役を D とする*:*

$$D = \{z \in \mathbb{C};\ \bar{z} \in \Omega\}. \tag{2.41}$$

このとき，$g(z) = \overline{f(\bar{z})}, z \in D$ と定義すれば，$g \in \mathcal{O}(D)$ である*.*

> *Proof.* u, v をそれぞれ f の実部と虚部とし $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ と表す．$z = x + iy$ に対して $\bar{z} = x - iy$ なので，
>
> $$\overline{f(\bar{z})} = u(\bar{z}) - iv(\bar{z}) = u(x,-y) - iv(x,-y). \tag{2.42}$$
>
> 従って，$g = U + iV$ を g の実部と虚部への分解とすれば，
>
> $$U(x,y) = u(x,-y), \qquad V(x,y) = -v(x,-y). \tag{2.43}$$
>
> u, v はCauchy-Riemannの関係式をみたすので，Ω 上 $u_x = v_y, u_y = -v_x$．従って，任意の $(x,y) \in D$ に対して $U_x(x,y) = \{u(x,-y)\}_x = u_x(x,-y)$ なので，
>
> $$V_y(x,y) = -\{v(x,-y)\}_y = v_y(x,-y) = u_x(x,-y) = U_x(x,y). \tag{2.44}$$
>
> 同様に任意の $(x, y) \in D$ に対して $U_y(x,y) = \{u(x,-y)\}_y = -u_y(x,-y)$ なので，
>
> $$V_x(x,y) = -\{v(x,-y)\}_x = -v_x(x,-y) = u_y(x,-y) = -U_y(x,y). \tag{2.45}$$
>
> 以上から D 上で $U_x = V_y, U_y = -V_x$ となるので，$g = U + iV$ は D 上で正則．□

3 整級数

3.1 微積分の復習

- 集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の関数 $f(z)$ の一様ノルム $\|f\|$ を以下の式で定める：

$$\|f\| = \sup_{z\in\Omega} |f(z)|. \tag{3.1}$$

容易に確かめられるように，$\|\cdot\|$ は三角不等式をみたす：$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$.

- 集合 Ω 上の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が関数 f に**一様収束**する：

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \|f_n - f\| = \sup_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall n \ge N. \tag{3.2}$$

定義より，Ω 上の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が一様収束するならば，Ω の各点 a において数列 $\{f_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する.

- 関数項級数 $\sum_n f_n$ が Ω 上で**一様収束**することを，部分和列 $\{S_n\}, S_n = \sum_{k=1}^n f_k$ が Ω 上で一様収束することにより定義する．また，$\sum_n f_n$ が Ω 上で**一様に絶対収束**することを，$\sum_n |f_n|$ が Ω 上で一様収束することにより定義する.

- Ω に含まれる任意の有界閉集合上で $\{f_n\}$ が一様収束するとき，$\{f_n\}$ は Ω 上で**広義一様収束**すると言う．関数項級数 $\sum f_n$ が Ω 上で広義一様に絶対収束することも同様に定義する.

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，次の条件は同値である（Cauchy 判定法）:

(1) 関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は一様収束する.

(2) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は一様ノルム $\|\cdot\|$ に関して Cauchy 列である．すなわち，

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \|f_m - f_n\| < \varepsilon \quad \forall m, n \ge N. \tag{3.3}$$

- Ω 上の連続関数の列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0(\Omega)$ が Ω 上で一様収束するならば，その極限も Ω 上で連続である．すなわち，$\lim_{n\to\infty} f_n \in C^0(\Omega)$.

定理 3.1 (Weierstrass の M-判定法)**.** 正項級数 $\sum_{n\ge1} a_n$ を $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の関数項級数 $\sum_{n\ge1} f_n$ の優級数とする．すなわち，以下が成り立つとする：

$$\|f_n\| \le a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

ただし，$\|\cdot\|$ は Ω 上の一様ノルムである．このとき，$\sum_{n\ge1} a_n$ が収束するならば，関数項級数 $\sum_{n\ge1} f_n$ は Ω 上で一様に絶対収束する.

- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列とする．$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**上極限** $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ を以下のように定義する：

(1) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が上に有界でないとき，$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(2) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が上に有界なとき，新しい数列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を以下のように定める：

$$A_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\} = \sup\{a_n; n \ge k\}. \tag{3.5}$$

数列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少である．$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限を $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ と定める：

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n. \tag{3.6}$$

- 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が上に有界なとき，$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であることと, 次の 2 条件 (i), (ii) が成立することは同値である：

  (i) $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad a_n < \alpha + \varepsilon \quad \forall n \geq N.$

  (ii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{a_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ が存在して，$\lim_{\nu\to\infty} a_{n_\nu} = \alpha$.

3.2 整級数

定理 3.2 (Cauchy-Hadamard)．$c \in \mathbb{C}$ とする．複素数を変数とする整級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \tag{3.7}$$

の**収束半径** R を以下の式で定める：

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|a_n\right|^{1/n}. \tag{3.8}$$

ただし, 右辺が 0 のとき $R = +\infty$，右辺が $+\infty$ のとき $R = 0$ と定める．このとき，次が成り立つ．

(1) $f(z)$ は $B(c,R)$ 上で広義一様に絶対収束する．

(2) $|z-c| > R$ のとき，級数 $f(z)$ の項は非有界となり，$f(z)$ は発散する．

(3) $f(z)$ は $B(c,R)$ 上の正則関数を定める．その導関数 $f'(z)$ は $f(z)$ を項別微分して得られ，$f(z)$ と同じ収束半径 R を持つ．

Proof. 以下, 簡単のため $c = 0$ とする．$c \neq 0$ の場合も全く同様である．

(1) $R = 0$ のとき，主張は自明なので，$R > 0$ と仮定する．このとき，数列 $\left\{\left|a_n\right|^{1/n}\right\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ は有界である．実数 $\rho > 0$ が $\rho < R$ をみたすとする．$R^{-1} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \left|a_n\right|^{1/n}$ は定義より単調減少列 $\left\{\sup_{k\geq n} \left|a_k\right|^{1/k}\right\}_{n\in N\cup\{0\}}$ の極限で，$R^{-1} < \rho^{-1}$ なので，$n_0 = n_0(\rho) \in \mathbb{N}$ が存在して，$R^{-1} \leq \sup_{k\geq n} \left|a_k\right|^{1/k} < \rho^{-1}$ $\forall n \geq n_0$．特に，

$$\left|a_n\right|^{1/n} < \rho^{-1} \quad \forall n \geq n_0, \qquad \text{すなわち,} \qquad \left|a_n\right| < \rho^{-n} \quad \forall n \geq n_0. \tag{3.9}$$

従って，$M_\rho = \max\left\{\left|a_0\right|, \left|a_1\right|\rho, \left|a_2\right|\rho^2, \ldots, \left|a_{n_0-1}\right|\rho^{n_0-1}, 2\right\}$ と置けば $M_\rho > 1$ であり，次式が成り立つ：

$$\left|a_n\right| \leq M_\rho \rho^{-n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{3.10}$$

特に，$\rho' > 0$ を $0 < \rho < \rho' < R$ となるように選んでも，同じように $M_{\rho'} > 1$ が存在して

$$\left|a_n\right| \leq M_{\rho'} \left(\rho'\right)^{-n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \tag{3.11}$$

が成り立つ．従って，次式が任意の $\ell \geq 0$ と $0 \leq \rho < R$ に対して成り立つ（後に使う）：

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^\ell \left|a_n\right| \rho^n \leq M_{\rho'} \sum_{n=0}^{\infty} n^\ell \left(\rho/\rho'\right)^n < +\infty. \tag{3.12}$$

Weierstrass の M-判定法より，$\overline{B(\rho)}$ 上で $f(z)$ の収束優級数を構成すればよい．(3.11) より,

$$\left|a_n z^n\right| \leq M_{\rho'} \left(\rho/\rho'\right)^n \qquad \forall z \in \overline{B(\rho)}. \tag{3.13}$$

そこで, $f(z)$ の収束優級数 $\sum_n A_n$ を $A_n := M_{\rho'} \left(\rho/\rho'\right)^n$ で定義することができる．Weierstrass M-判定法より，$f(z)$ は $\overline{B(\rho)}$ 上で一様収束する．

(2) $R > 0$ の場合を考える．十分小さい正実数 $0 < \varepsilon \ll 1$ を任意に与える．単調減少列 $\left\{\sup_{k\geq n}|a_k|^{1/k}\right\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ の極限が $1/R$ なので，$N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$\left|\sup_{k\geq n}|a_k|^{1/k} - R^{-1}\right| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N. \tag{3.14}$$

このとき，$\sup_{k\geq n}|a_k|^{1/k} > R^{-1} - \varepsilon \ \forall n \geq N$．その結果，任意の $0 < \varepsilon < R^{-1}$ に対し，

$$|a_n|^{1/n} > R^{-1} - \varepsilon \qquad \text{すなわち，} \qquad |a_n| > \left(R^{-1} - \varepsilon\right)^n \tag{3.15}$$

をみたす $n \in \mathbb{N}$ が無限に多く存在する．

$|z| > R$ をみたす $z \in \mathbb{C}$ に対し，$0 < \varepsilon < \frac{1}{|z|}\left(\frac{|z|}{R} - 1\right)$ となる ε が存在する．この ε に対し，(3.15) から不等式

$$|a_n z^n| > \left\{|z|\left(R^{-1} - \varepsilon\right)\right\}^n \tag{3.16}$$

をみたす $n \in \mathbb{N}$ が無限に多く存在する．ε の条件から $|z|\left(R^{-1} - \varepsilon\right) > 1$ が成り立つので，級数 $f(z)$ の項は非有界である．

$R = 0$ とする．$\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = \infty$ より数列 $\left\{|a_n|^{1/n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は非有界なので，任意の $M > 0$ に対して，$|a_n|^{1/n} > M$ となる $n \in \mathbb{N}$ が無限に多く存在する．特に，任意の $z \neq 0$ に対して，$|a_n|^{1/n} > 2|z|^{-1}$ となる $n \in \mathbb{N}$ が無限に多く存在する．すなわち，$|a_n z^n| > 2^n$ となる $n \in \mathbb{N}$ が無限に多く存在する．これより，任意の $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ に対して，$f(z)$ の項は非有界である．

(3) (Step 1)　$f(z)$ の項別微分が $f(z)$ と同じ収束半径を持つことを見る．$f(z)$ の項別微分は

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n \tag{3.17}$$

で与えられるので，(1) より，その収束半径 R' は次式で与えられる：

$$1/R' = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|(n+1)a_{n+1}|^{1/n}\,. \tag{3.18}$$

ここで，$|(n+1)a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = (n+1)^{\frac{1}{n}}\left(|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}\right)^{1+\frac{1}{n}} \geq \left(|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}\right)^{1+\frac{1}{n}}$ なので，$\left\{|a_n|^{1/n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ が非有界ならば，すなわち，$R = 0$ ならば，数列 $\left\{|(n+1)a_{n+1}|^{\frac{1}{n}}\right\}$ も非有界となり，$g(z)$ の収束半径も $R' = 0$ をみたす．従って，$R = 0$ のとき $R' = R$ である．

以下，$\left\{|a_n|^{1/n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ の有界性を仮定する：

$$\exists M > 0 \quad \text{s.t.} \quad |a_n|^{1/n} < M \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.19}$$

$\alpha = 1/R = \overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}$ とおく．$(n+1)^{1/n} = 1 + \delta_n$ とおけば，

$$1 + n = (1+\delta_n)^n > 1 + n\delta_n + \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2 > 1 + \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2 \tag{3.20}$$

より，$0 < \delta_n < \sqrt{2/(n-1)}$．従って，$\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}} = 1$ である．これより，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|(n+1)a_{n+1}|^{1/n} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(1+\delta_n)\left(|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}\right)^{1+\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|^{1/n} = 1/R \tag{3.21}$$

となり，$R' = R$ である．

この部分をもう少し詳しくすると次のようになる．$\varepsilon > 0$ を任意に与える．条件

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} M^{\frac{1}{n}} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} (n+1)^{\frac{1}{n}} = 1 \tag{3.22}$$

より $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq N$ に対して次式が成り立つ：

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < \alpha + \frac{\varepsilon}{4}, \qquad M^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 4\alpha}, \qquad (n+1)^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\varepsilon}{2\alpha + \varepsilon}. \tag{3.23}$$

従って，次の評価が成り立つ：

$$\begin{aligned} |(n+1)a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} &= |a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}} |a_{n+1}|^{\frac{1}{n(n+1)}} (n+1)^{\frac{1}{n}} < \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{4}\right) M^{\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2\alpha}\right) \\ &< \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{4}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 4\alpha}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2\alpha}\right) = \alpha + \varepsilon \qquad \forall n \geq N. \end{aligned} \tag{3.24}$$

また，$\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \alpha$ より，部分列 $\{n_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ が存在して，$\lim_{\nu\to\infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu}} = \alpha$ が成り立つ．$\alpha > 0$ のとき，$\left\{|a_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu}}\right\}$ が α に収束するので $\lim_{\nu\to\infty} \left(|a_{n_\nu+1}|^{\frac{1}{n_\nu+1}}\right)^{\frac{1}{n_\nu}} = 1$ となる．従って，

$$\lim_{\nu\to\infty} |(n_\nu + 1)\, a_{n_\nu+1}|^{\frac{1}{n_\nu}} = \lim_{\nu\to\infty} (n_\nu + 1)^{\frac{1}{n_\nu}} |a_{n_\nu+1}|^{\frac{1}{n_\nu+1}} |a_{n_\nu+1}|^{\frac{1}{n_\nu(n_\nu+1)}} = \alpha. \tag{3.25}$$

$\alpha = 0$ のとき，(3.24) より，

$$\lim_{n\to\infty} |(n+1)a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = 0 = \alpha. \tag{3.26}$$

(3.24), (3.25), (3.26) より数列 $\left\{|(n+1)a_{n+1}|^{\frac{1}{n}}\right\}$ の上極限が α となるので，

$$1/R' = \overline{\lim_{n\to\infty}} |(n+1)a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = \alpha = 1/R. \tag{3.27}$$

以上から，$R' = R$ である．

(Step 2)　(1) より，級数 $f(z), g(z)$ は任意の $0 < \rho < R$ に対して $\overline{B(\rho)}$ 上の連続関数を定める．$B(R) = \bigcup_{\rho<R} \overline{B(\rho)}$ より，$f(z), g(z)$ は $B(R)$ 上の連続関数を定める．$f(z)$ の n 番目までの部分和と剰余項をそれぞれ $S_n(z), R_n(z)$ で表す：

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}, \qquad R_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k. \tag{3.28}$$

このとき，$f(z) = S_n(z) + R_n(z)$ である．$z, z_0 \in B(R)$ とする．$|z|, |z_0| < \rho < R$ となる $\rho > 0$ を選ぶ．このとき，

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) = \left(\frac{S_n(z) - S_n(z_0)}{z - z_0} - S_n'(z_0)\right) + (S_n'(z_0) - g(z_0)) + \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \tag{3.29}$$

より，

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0)\right| \leq \left|\frac{S_n(z) - S_n(z_0)}{z - z_0} - S_n'(z_0)\right| + |S_n'(z_0) - g(z_0)| + \left|\frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0}\right|. \tag{3.30}$$

(Step 3)　(3.30) の右辺において，剰余項を評価する：

$$\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}=\sum_{k=n}^{\infty}a_k\frac{z^k-z_0^k}{z-z_0}=\sum_{k=n}^{\infty}a_k\left(z^{k-1}+z^{k-2}z_0+\cdots+zz_0^{k-2}+z_0^{k-1}\right) \tag{3.31}$$

と $|z|<\rho<R, |z_0|<\rho<R$ より，

$$\left|\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\right|\le\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|\left(|z|^{k-1}+|z|^{k-2}|z_0|+\cdots+|z||z_0|^{k-2}+|z_0|^{k-1}\right)\le\sum_{k=n}^{\infty}k|a_k|\rho^{k-1}. \tag{3.32}$$

$0<\rho<R$ より，(3.12) から級数 $(1/\rho)\sum_{k=0}^{\infty}k|a_k|\rho^k=\sum_{k=0}^{\infty}k|a_k|\rho^{k-1}$ は収束する．従って，任意に与えられた $\varepsilon>0$ に対して $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ が存在して，

$$\sum_{k=n}^{\infty}k|a_k|\rho^{k-1}<\frac{\varepsilon}{3}\qquad\forall n\ge N. \tag{3.33}$$

この不等式より，

$$\left|\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\right|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad\forall n\ge N. \tag{3.34}$$

(Step 4)　(3.30) の右辺において，第二項を評価する：

$$|S_n'(z_0)-g(z_0)|=\left|\sum_{k=n}^{\infty}ka_kz_0^{k-1}\right|\le\sum_{k=n}^{\infty}k|a_k|\rho^{k-1} \tag{3.35}$$

なので，(3.33) より，$n\ge N=N(\varepsilon)$ ならば，

$$|S_n'(z_0)-g(z_0)|\le\sum_{k=n}^{\infty}k|a_k|\rho^{k-1}<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.36}$$

(Step 5)　(3.30) の右辺において，第一項を評価する．$S_N(z)$ は z の多項式なので，複素微分可能である．従って，$\delta=\delta(z_0,\varepsilon)>0$ が存在して，

$$\left|\frac{S_N(z)-S_N(z_0)}{z-z_0}-S_N'(z_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad\forall z\in B(z_0,\delta). \tag{3.37}$$

(3.30) で $n=N$ として, (3.34), (3.36), (3.37) より，

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-g(z_0)\right|<\varepsilon\qquad\forall z\in B(z_0,\delta). \tag{3.38}$$

$\varepsilon>0$ は任意なので，上式から $f(z)$ は z_0 において複素微分可能であり，その値は $g(z_0)$ である．$z_0\in B(R)$ は任意なので，$f(z)$ は $B(R)$ 上複素微分可能で，$f'(z)=g(z)$ である．

(Step 6)　最後に $f(z)$ が C^1-級であることを示す．$f=u+iv, g=U+iV$ と表す．$f(z)$ の複素微分が $g(z)$ なので，次が成り立つ．

$$\lim_{h\to0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=g(z). \tag{3.39}$$

$h\in\mathbb{R}$ として上の極限を取れば $u_x+iv_x=U+iV$ であり，$h\in i\mathbb{R}$ として上の極限を取れば $i^{-1}(u_y+iv_y)=U+iV$ である．従って，$u_x=v_y=U, u_y=-v_x=-V$ が $B(R)$ 上で成り立つ．$g(z)$ の収束半径が R なので，(1) より $g\in C^0(B(R))$ となる．従って，u と v のそれぞれの 1 階偏導関数は $B(R)$ 上の連続関数である．これは $u,v\in C^1(B(R))$ を意味するので，$f=u+iv\in C^1(B(R))$ である．　□

系 3.3. 級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ が正の収束半怪 $R>0$ を持つならば，任意の $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して $f(z)$ は k 回複素微分可能であり，k 階導関数 $f^{(k)}(z)$ は次式で与えられる：

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}(z-c)^n. \tag{3.40}$$

特に，$a_k=f^{(k)}(c)/k!$ であり，$f(z)$ は $B(c,R)$ 上で次の *Taylor* 級数として表される：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n. \tag{3.41}$$

Proof. 簡単のため $c=0$ の場合を考える．$k=0$ のとき，主張は明らかである．$k\geq 0$ のときに $f^{(k)}(z)$ の整級数展開が (3.40) で与えられることを仮定して，$k+1$ の場合を考える．
定理 3.2 を $f^{(k)}(z)$ に対して用いれば，$f^{(k)}(z)$ は $B(R)$ 上の正則関数であり，

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(z)=\frac{d}{dz}f^{(k)}(z)&=\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k)!}{(n-1)!}a_{n+k}z^{n-1}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+k+1)!}{m!}a_{m+k+1}z^m.\end{aligned} \tag{3.42}$$

従って，$k+1$ の場合も (3.40) が成り立つ．数学的帰納法により (3.40) が示された．系の後半はそこからすぐに従う． □

系 3.4. 収束半径 $R>0$ を持つ $B(R)$ 上の整級数 $f(z)$ が $B(R)$ 上で恒等的に $f'(z)=0$ を充たせば，$f(z)\equiv f(0)$ である．

Proof. $B(R)$ 上で恒等的に $f'(z)=0$ ならば，複素微分の定義より任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $B(R)$ 上で恒等的に $f^{(n)}(z)=0$ である．特に，$f^{(n)}(0)=0$ であるから，$f(z)$ の Taylor 展開を考えれば $f(z)=f(0)$ が系 3.3 より従う． □

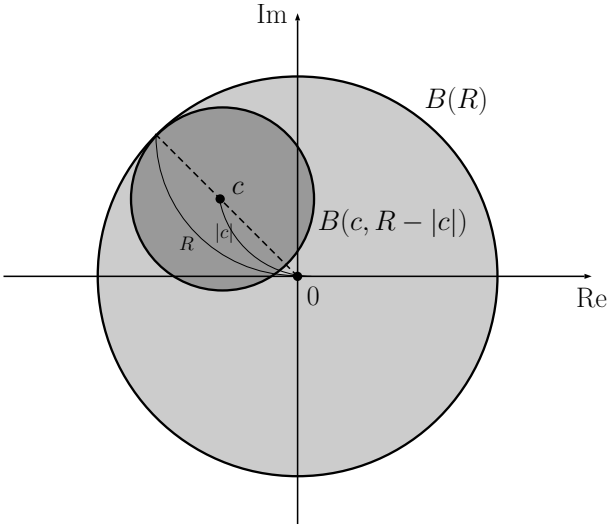
定理 3.5. 整級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3.43}$$

の収束半径が $R > 0$ であるとする．このとき，任意の $c \in B(R)$ に対して，c を中心とする整級数

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n \tag{3.44}$$

の収束半怪は $R - |c|$ 以上であり，$B(c, R-|c|) \subset B(R)$ 上で等式 $f = g$ が成り立つ．



Proof. この定理は後で扱う Cauchy 積分公式から従うが，ここでは二重級数に関する次の事実を認めて証明を与える：

> $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ で添字付けられた複素数列 $\{a_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ に対して，任意の $m\in\mathbb{N}$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{m,n}|$ が収束すると仮定する．さらに級数 $\sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty}|a_{m,n}|)$ が収束すると仮定する．このとき，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して級数 $\sum_{m=1}^{\infty}|a_{m,n}|$ は収束し，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{m=1}^{\infty}|a_{m,n}|)$ も収束する．さらに，次式が成り立つ．
>
> $$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}\right). \tag{3.45}$$

$z\in B(c,R-|c|)$ とする．$|z-c|<R-|c|$ なので，$0<\rho<R$ を $|z-c|+|c|<\rho$ となるように選ぶことができる．このとき，Cauchy-Hadamard の定理の証明中に示したように，定数 $M_\rho>1$ が存在して，次の不等式が成り立つ：

$$|a_n|\le M_\rho\rho^{-n}\qquad\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{3.46}$$

以下，負の整数 m と $m>n$ のとき $\binom{n}{m}=0$ と約束することにより，二項係数を拡張する．このとき，系 3.3 から，

$$\begin{aligned}
f(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\{(z-c)+c\}^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}c^{n-k}(z-c)^k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\binom{n}{k}c^{n-k}(z-c)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}a_n\binom{n}{k}c^{n-k}(z-c)^k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-c)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}a_n\frac{n!}{(n-k)!}c^{n-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-c)^k}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}a_{m+k}\frac{(m+k)!}{m!}c^m\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(z-c)^k=g(z).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

ここで，最後から 2 番目の等号を得るために系 3.3 を用いている．また，2 行目の最初の等号を導くための無限和の順序交換は，この二重級数が以下のように絶対収束することから条件 (3.45) が成り立ち，正当化される：

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}|c|^{n-k}|z-c|^k\le M_\rho\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}|c|^{n-k}|z-c|^k\\
&=M_\rho\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{-n}(|z-c|+|c|)^n=\frac{M_\rho}{1-\frac{|z-c|+|c|}{\rho}}=\frac{M_\rho\rho}{\rho-(|z-c|+|c|)}<+\infty.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

ここで，最初の不等式は (3.46) から従う．(3.47) から定理の主張が成り立つ． □

領域で定義された関数が定義域の各点のある近傍において収束する整級数として表されるとき，その関数を**解析関数**という．定理 3.5 から，収束する整級数は収束円盤の内部において解析関数である．正則関数が解析関数であることは後で証明される．

3.3 Abel の連続性定理

定理 3.6 (Abel)**.** $K > 1$ に対して

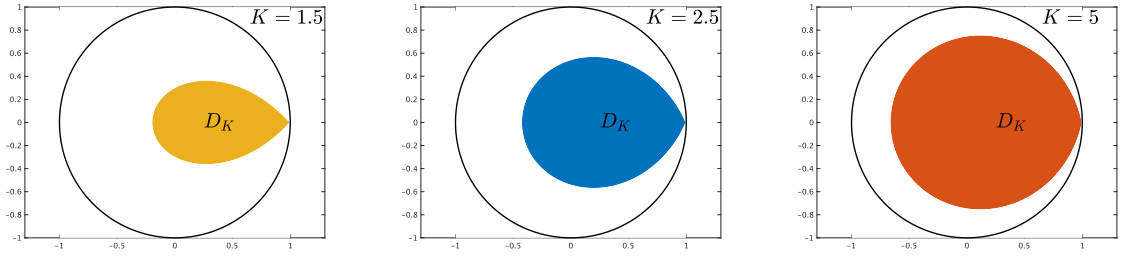
$$D_K = \{z \in \mathbb{C};\ |1 - z| \leq K(1 - |z|)\} \subset B \cup \{1\} \qquad (\text{ここで}, B = B(0,1)\ ) \tag{3.49}$$

と定める．級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$B \cup \{1\}$ 上の関数 $f(z)$ を整級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3.50}$$

で定めれば，任意の $K > 1$ に対して $f(z) \in \mathcal{O}(B) \cap C^0(D_K)$ である．特に，

$$\lim_{D_K \ni z \to 1} f(z) = f(1). \tag{3.51}$$



$K = 1.5,\ 2.5$ と 5 のときの集合 D_K の形状と単位円における位置.

Proof. 定義から，$D_K \subset \overline{B}$，$D_K \cap \partial B = \{1\}$ が成り立つことに注意する．級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するので，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．特に $\{a_n\}$ は有界列なので，Cauchy-Hadamard の定理 3.2(1) より，$f(z)$ の収束半径は 1 以上である．従って，$f \in \mathcal{O}(B)$ である．以下，$f \in C^0(D_K)$ となることを示す．$B \cup \{1\}$ 上の関数 g を次式で定める：

$$g(z) = f(z) - f(1). \tag{3.52}$$

0 に収束する数列 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を以下の式で定める：

$$b_n = \begin{cases} a_0 - f(1) = -\sum_{m=1}^{\infty} a_m & (n = 0) \\ a_n & (n > 0). \end{cases} \tag{3.53}$$

$g(z)$ の定義より，$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ である．$g(1)$ と $g(z)$ の部分和列をそれぞれ

$$\sigma_n = b_0 + \cdots + b_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n - f(1) = -\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \tag{3.54}$$

$$S_n(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n \tag{3.55}$$

と置く．このとき，以下の等式が成り立つ（Abel 総和法）：

$$\begin{aligned} S_n(z) &= b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n \\ &= \sigma_0 + (\sigma_1 - \sigma_0) z + (\sigma_2 - \sigma_1) z^2 + \cdots + (\sigma_n - \sigma_{n-1}) z^n \\ &= \sigma_0(1-z) + \sigma_1 \left(z - z^2\right) + \sigma_2 \left(z^2 - z^3\right) + \cdots + \sigma_{n-1} \left(z^{n-1} - z^n\right) + \sigma_n z^n \\ &= (1-z) \left(\sigma_0 + \sigma_1 z + \sigma_2 z^2 + \cdots + \sigma_{n-1} z^{n-1}\right) + \sigma_n z^n \\ &= (1-z) \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k z^k + \sigma_n z^n. \end{aligned} \tag{3.56}$$

級数 $\sum_n a_n$ が収束するので数列 $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に収束し，特に有界：定数 $C > 0$ が存在して $|\sigma_n| \leq C \ \forall n \in \mathbb{N}$．従って $\lim_{n\to\infty} |\sigma_n|^{1/n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} C^{1/n} = 1$ となり，Cauchy-Hadamard の定理から整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n z^n$ の収束半径は 1 以上である．従って関数列 $\{S_n\}$ は B 上で g に広義一様収束し，(3.56) で $n \to \infty$ とすれば，次式を得る：

$$g(z) = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n z^n \qquad \forall z \in B. \tag{3.57}$$

(3.56), (3.57) から

$$g(z) - S_n(z) = (1-z) \sum_{k=n}^{\infty} \sigma_k z^k - \sigma_n z^n \qquad \forall z \in B. \tag{3.58}$$

従って，

$$|g(z) - S_n(z)| \leq |1-z| \sum_{k=n}^{\infty} |\sigma_k| \, |z|^k + |\sigma_n| \, |z|^n \qquad \forall z \in B. \tag{3.59}$$

$\varepsilon > 0$ を任意に与える．$\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が 0 に収束するので，$N \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$|\sigma_n| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N. \tag{3.60}$$

(3.59), (3.60) より，任意の $z \in D_K \backslash \{1\}$ と $n \geq N$ に対して，

$$\begin{aligned} |g(z) - S_n(z)| &\leq \varepsilon |1-z| \sum_{k=n}^{\infty} |z|^k + \varepsilon |z|^n = \frac{|1-z|}{1-|z|} \varepsilon |z|^n + \varepsilon |z|^n \\ &\leq (K+1)\varepsilon |z|^n < (K+1)\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.61}$$

一方，$g(1) = 0$ より，$g(1) - S_n(1) = -S_n(1) = -\sigma_n$．(3.60) より，

$$|g(1) - S_n(1)| = |\sigma_n| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N. \tag{3.62}$$

(3.61), (3.62) より，

$$\|g - S_n\|_{D_K} < (K+1)\varepsilon. \tag{3.63}$$

ただし，$\|\cdot\|_{D_K}$ は D_K 上の一様ノルムを表す．$\varepsilon > 0$ は任意なので，(3.63) から D_K 上で関数列 $\{S_n\}$ は g に一様収束する．$S_n \in C^0(D_K)$ なので，$g \in C^0(D_K)$ である． $f = g + f(1)$ より，$f \in C^0(D_K)$ である． □

注 3.7. 単位円の 1 と異なる点で $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ が収束すれば，z_0 を頂点とする単位円盤内の鋭角領域 D で $f(z)$ が連続で，

$$\lim_{z\to z_0, z\in D} f(z) = f(z_0)$$

が成り立つ．これを示すため，*Abel*の連続性定理を $z \mapsto f(zz_0)$ という関数に適用すればよい．実際，$z \mapsto zz_0$ は z_0 の偏角での回転である．

例 3.8. 単調減少な正数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ をみたすとする．

(1) 整級数 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ は $\overline{B}\backslash\{1\}$ 上で収束する．

(2) 任意に $K > 1$ を固定するとき，任意の $z_0 \in \partial B\backslash\{1\}$ に対して，

$$\lim_{z\to z_0, \frac{|z-z_0|}{1-|z|}<K} f(z) = f(z_0). \tag{3.64}$$

Proof. (1) を示せば，(2) は z の関数 $f(z_0 z)$ に対して Abel の連続性定理を適用することにより従う．以下，(1) を示す．$\{a_n\}$ は有界であるから，Cauchy-Hadamard の定理より $f(z)$ の収束半径は 1 以上となり，$f(z)$ は B の任意の点で収束する．従って，$f(z)$ が $\partial B\backslash\{1\}$ 上で収束することを示せばよい．すなわち，任意の $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ に対して，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ が収束することを示す．一般に，数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ に対して，それぞれの部分和列を $\{S_n\}, \{T_n\}$ とすれば，すなわち，$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, T_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$ とすれば，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{m} b_k T_k &= (S_{n+1} - S_n) T_{n+1} + (S_{n+2} - S_{n+1}) T_{n+2} + \cdots + (S_m - S_{m-1}) T_m \\
&= -S_n T_{n+1} - S_{n+1}(T_{n+2} - T_{n+1}) - \cdots - S_{m-1}(T_m - T_{m-1}) + S_m T_m \\
&= -S_n T_{n+1} - S_{n+1} c_{n+2} - \cdots - S_{m-1} c_m + S_m T_m \\
&= (S_m T_m - S_n T_{n+1}) - \sum_{k=n+1}^{m-1} S_k c_{k+1}.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

そこで，$b_n = e^{in\theta}, c_n = a_n - a_{n-1} < 0$（ただし $a_0 = 0$）と置く．このとき，$T_n = a_n$ である．そこで $M_\theta = 2/\left|1 - e^{i\theta}\right|$ と定義すれば，$S_n = e^{i\theta}\left(1 - e^{in\theta}\right)/\left(1 - e^{i\theta}\right)$ なので，

$$|S_n| \le M_\theta \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.66}$$

(3.65) より，

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k e^{ik\theta}\right| &\le M_\theta (|a_m| + |a_{n+1}|) + \sum_{k=n+1}^{m-1} M_\theta |a_{k+1} - a_k| \\
&= M_\theta (a_m + a_{n+1}) + \sum_{k=n+1}^{m-1} M_\theta (a_k - a_{k+1}) \\
&= M_\theta (a_m + a_{n+1}) + M_\theta (a_{n+1} - a_m) = 2M_\theta a_{n+1}.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

仮定より $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$N \in \mathbb{N}$ が存在して，$0 < a_n < \varepsilon\ \forall n \ge N$．従って，(3.67) より $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k e^{ik\theta}\right| < M_\theta \varepsilon\ \forall m, n > N$ が成り立つので，級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{ik\theta}$ の部分和列は Cauchy 列であり，従って級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{ik\theta}$ は収束する． □

3.4 整級数の演算

以下，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ を収束半径が $R>0$ 以上の整級数とする．
このような整級数の演算に関する結果のみ述べる．証明はテキスト（例えば，[?]）を参照して下さい．

整級数の和
$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$ は収束半径 R 以上の整級数であり，$f(z)+g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$ が $|z|<R$ において成り立つ．

整級数の積（乗積級数）
収束を考慮せずに $f(z)g(z)$ を形式的に z について展開すると，$f(z)g(z)$ は整級数であり，z^n の係数は $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ で与えられる．このとき，$f(z)$ と $g(z)$ の乗積級数を次の整級数として定義する．

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n,\qquad c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}. \tag{3.68}$$

整級数 $h(z)$ の収束半径は R 以上であり，$B(R)$ 上で広義一様に絶対収束する．さらに，次の等式が $B(R)$ において成り立つ：

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=f(z)g(z). \tag{3.69}$$

逆級数
$f(z)h(z)=1$ をみたす整級数 $h(z)$ が存在するための必要十分条件は，

$$f(0)=a_0\neq 0 \tag{3.70}$$

である．このような整級数 $h(z)$ は一意的であり，$h(z)$ の収束半径は正である．

整級数の合成
整級数の合成を考えるために，以下の条件を仮定する：

$$g(0)=b_0=0. \tag{3.71}$$

条件 $g(0)=0$ を課さないと，$(f\circ g)(z)$ を形式的に展開したとき z^m の係数は無限個の項から成り，合成が定義可能かどうか直ちには判定できない．$|g(0)|<R$ の場合，$0<\rho<R-|g(0)|$ と選べば，w の関数 $\widetilde{f}(w)=f(g(0)+w)$ が $B(\rho)$ において w の整級数に展開される（定理 3.5）．このとき，$\widetilde{g}(z)=g(z)-g(0)$ とおけば，$f(g(z))=\widetilde{f}(\widetilde{g}(z))$ かつ $\widetilde{g}(0)=0$ であるから，(3.71) が成り立つ場合に帰着する．条件 (3.71) の下で整級数 $f(z)$ と $g(z)$ の合成 $(f\circ g)(z)$ を次式で定める：

$$(f\circ g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ng(z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}b_kz^k\right)^n. \tag{3.72}$$

このとき，$f\circ g$ は正の収束半径を持つ z の整級数である．

逆関数
整級数 $f(z)$ の逆関数を整級数として求める．整級数 $g(z)$ が $f(z)$ 逆関数であるならば，逆関数の定義から $f\circ g(z)=z$ である．さらに，整級数 $f(z)$ の中心，すなわち $g(0)$ が 0 である場合を考える：

$$f(g(z))=z,\quad g(0)=b_0=0. \tag{3.73}$$

このとき，条件 $f(g(z)) = z$ から

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m z^m \right)^n = z \tag{3.74}$$

である．両辺の定数項を比較すれば，$a_0 = 0$ である．z の 1 次の項を比較すれば，$a_1 b_1 = 1$ となる．従って，$a_1 = f'(0) \neq 0$ が必要である．この条件は十分条件である．
つまり，整級数 $f(z)$ が $f(0) = 0,\ f'(0) \neq 0$ をみたすとき，$\rho > 0$ が存在して，$f(g(z)) = z$ をみたす整級数 $g \in \mathcal{O}(B(\rho))$ が一意的に存在する．

3.5 指数関数，三角関数，対数関数

3.5.1 指数関数

$z \in \mathbb{C}$ の指数関数 e^z を以下の整級数で定義する：

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{3.75}$$

$\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n} = \infty$ より，この整級数の収束半径は

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{(n!)^{1/n}} = 0 \tag{3.76}$$

となり，無限大である．特に，e^z は任意の $B(R), R > 0$ 上で一様に絶対収束し，$\mathbb{C}$ 上の正則関数を定める．e^z を**指数関数**という．任意の $z, w \in \mathbb{C}$ に対して，指数関数 e^z は以下の性質をみたす：

(1) $e^0 = 1$

(2) $(e^z)' = e^z$

(3) $e^{z+w} = e^z e^w$

(4) $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$.

Proof.

(2) e^z の収束半径が無限大なので，定理 3.2 (3) より，

$$(e^z)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d}{dz} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = e^z. \tag{3.77}$$

(3) 右辺の乗積級数と左辺を比較すれば，乗積級数の定義から，

$$\begin{aligned} \text{右辺の } k \text{ 次の項 } &= \sum_{m+n=k} \frac{z^m}{m!} \frac{w^n}{n!} = \frac{1}{k!} \sum_{m+n=k} \frac{(m+n)!}{m!n!} z^m w^n = \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} z^m w^{k-m} \\ &= \frac{1}{k!}(z+w)^k = \text{ 左辺の } k \text{ 次の項.} \end{aligned} \tag{3.78}$$

(4) e^z の定義かつら，

$$e^{\overline{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \overline{e^z}. \tag{3.79}$$

□

3.5.2 三角関数

三角関数 $\cos z$ と $\sin z$ を以下の式で定義する：

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{3.80}$$

指数関数 e^z の Taylor 展開から，$\cos z, \sin z$ は以下の Taylor 展開を持つ：

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n + (-i)^n}{2} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \tag{3.81}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n - (-i)^n}{2i} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{3.82}$$

三角関数 $\cos z, \sin z$ に対して以下の等式が成り立つ：

(1) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

(2) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

(3) $(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z$.

> *Proof.* (1), (2) は三角関数の定義から明らかである．(3) について，一般に，正則関数 $f(z)$ に対して，$\frac{d}{dz} f(cz) = cf'(cz)$ が成り立つので，
>
> $$(\cos z)' = \frac{\left(e^{iz}\right)' + \left(e^{-iz}\right)'}{2} = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\sin z. \tag{3.83}$$
>
> 同様に $(\sin z)' = \cos z$ を示すことができる． □

3.5.3 指数関数の周期性

$\mathbb{C}$ 上の関数 $f(z)$ に対して，等式 $f(z+c) = f(z)$ が任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して成り立つとき，c を $f(z)$ の周期という．c が $f(z)$ の周期ならば，任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して mc も $f(z)$ の周期である．

定理 3.9. e^{iz} は最小の正の周期を持ち，任意の周期はその整数倍である．以下，e^{iz} の最小の正の周期を 2π で表す．特に，e^z は周期 $2\pi i\mathbb{Z}$ を持つ周期関数である．

> *Proof.*
> **Step 1**：e^{iz} に周期が存在すれば実数である
> e^{iz} の周期を ω とする．$e^{i(z+\omega)} = e^{iz}$ より，$e^{i\omega} = 1$ である．$\omega = a + ib$，$a, b \in \mathbb{R}$ と表せば，
>
> $$1 = e^{i\omega} = e^{-b} e^{ia} = e^{-b}(\cos a + i \sin a). \tag{3.84}$$
>
> 指数関数と三角関数の整級数表示から，$z \in \mathbb{R}$ ならば $e^z, \cos z, \sin z$ は実数である．$e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$ より，$e^z \neq 0$ である．指数関数の Taylor 展開 $e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n!$ において展開係数は正なので，$x > 0$ ならば $e^x > 1$ である．$e^x e^{-x} = 1$ より，$x < 0$ ならば，$0 < e^x < 1$ である．従って，実数 x が $e^x = 1$ をみたすならば，$x = 0$ が従う．等式 $e^{-b}(\cos a + i \sin a) = 1$ の絶対値を取れば，$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ より $e^{-b} = 1$ が従い，これから $b = 0$ となる．すなわち，$\omega \in \mathbb{R}$ である．

Step 2： e^{iz} **の周期の存在**
以下の不等式が成り立つ（証明は容易なので省略）：

$$\sin y > y - \frac{y^3}{6}, \quad \cos y < 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} \qquad \forall y > 0. \tag{3.85}$$

この不等式から，$\cos\sqrt{3} < 1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{24} = -\frac{1}{8}$．これと $\cos 0 = 1 > 0$ から，中間値の定理より 0 と $\sqrt{3}$ の間に $\cos y_0 = 0$ をみたす実数

$$0 < y_0 < \sqrt{3} \tag{3.86}$$

が存在する．このとき，$\cos^2 y_0 + \sin^2 y_0 = 1$ より，$\sin y_0 = \pm 1$ が従い，結局 $e^{iy_0} = \pm i$ である．これより $e^{4iy_0} = 1$ であり，$4y_0 > 0$ は関数 e^{iz} の周期である．
Step 3：$(0, y_0)$ **に** $\cos y = 0$ **の解が存在しない**
実数 y が $0 < y < y_0 < \sqrt{3}$ をみたすとき，$1 - y^2/6 > 1/2$ なので，

$$-(\cos y)' = \sin y > y\left(1 - \frac{y^2}{6}\right) > \frac{y}{2} > 0. \tag{3.87}$$

従って，区間 $(0, y_0)$ において実関数 $\cos y$ は狭義単調減少であり，任意の $y \in (0, y_0)$ に対して，$1 = \cos 0 > \cos y > \cos y_0 = 0$ が成り立つ．以上から，y_0 は $\cos y = 0$ の最小の正の解である．そこで実数 π を

$$2\pi = 4y_0 \tag{3.88}$$

により定めれば，$2\pi > 0$ は関数 e^{iz} の周期である．
Step 4：2π **が** e^{iz} **の最小の正の周期である**
Step 3 より，区間 $(0, y_0)$ において $\sin y > 0$ なので，$y \to y_0 - 0$ とすれば $\sin y_0 \geq 0$ である．$\cos y_0 = 0$ から $\sin y_0 = \pm 1$ なので，$\sin y_0 = 1$ である．また，Step 3 で見たように $(0, y_0)$ において $0 < \cos y < 1$ なので，$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ より，$0 < \sin y < 1$ が $(0, y_0)$ において成り立つ．特に区間 $(0, y_0)$ において $\cos y + i \sin y$ の実部も虚部も 0 でないので，$(0, y_0)$ 上で $e^{iy} \neq \pm 1, \pm i$．ここで，$e^{iy} \neq \pm 1, \pm i \iff \left(e^{iy}\right)^4 \neq 1$ なので，$(0, y_0)$ 上で $e^{iy} \neq \pm 1, \pm i$ であることから，区間 $(0, y_0)$ において $e^{4iy} \neq 1$ である．以上から，$2\pi = 4y_0$ は e^{iz} の最小の正の周期である．
Step 5：e^{iz} **の周期の全体が** $2\pi\mathbb{Z}$ **である**
ω を e^{iz} の任意の周期とする．Step 1 より $\omega \in \mathbb{R}$ なので，$2\pi n \leq \omega < 2\pi(n+1)$ をみたす $n \in \mathbb{Z}$ が存在する．$\omega \neq 2\pi n$ とすれば，$0 < \omega - 2\pi n < 2\pi$ から $\omega - 2\pi n$ は e^{iz} の正の周期であり，条件より $\omega - 2\pi n < 2\pi$ が成り立つ．これは Step 4 で示された 2π が e^{iz} の最小の正の周期であるという事実に矛盾する．従って，$\omega = 2\pi n$ である． □

定理 3.9 の証明中で以下の等式が示された：

$$e^{\pi i/2} = i, \qquad e^{\pi i} = -1, \qquad e^{2\pi i} = 1. \tag{3.89}$$

3.5.4 対数関数

複素数 $z \neq 0$ に対して，z の対数 $\log z$ を

$$\log z = \{w \in \mathbb{C};\ e^w = z\} \tag{3.90}$$

として定義する．e^z の周期性から $\log z$ は $z \neq 0$ に対して一意的に決まらない．実際，α が z の対数ならば，

$$\log z = \alpha + 2\pi i\mathbb{Z} = \{\alpha + 2\pi in;\ n \in \mathbb{Z}\}, \qquad \operatorname{Re}\alpha = \log|z|, \qquad e^{i\operatorname{Im}\alpha} = \frac{z}{|z|}. \tag{3.91}$$

ただし，正実数 x に対して $\log x$ は e^x の逆関数として定まる実数値関数（通常の対数関数）である．(正実数 z に対して上の (3.90) の意味で $\log z$ を定義するとき，$\operatorname{Re}\alpha = \log|z|$ の意味は $\operatorname{Re}\alpha = \mathbb{R} \cap \log|z|$ である．)

> *Proof.* $2\pi i$ が e^z の周期なので，$\alpha + 2\pi i\mathbb{Z} \subset \log z$ は明かである．w を z の勝手な対数とする．$e^\alpha = z,\ e^w = z$ より, $e^{w-\alpha} = 1$．これより $i(w-\alpha)$ は e^{iz} の周期．従って，$w - \alpha \in 2\pi i\mathbb{Z}$．すなわち，$\log z \supset \{\alpha + 2\pi in; n \in \mathbb{Z}\}$．以上から，$\log z = \{\alpha + 2\pi in; n \in \mathbb{Z}\}$．
> w は $e^w = z$ をみたすので，
>
> $$|z|^2 = |e^w|^2 = e^w \cdot \overline{e^w} = e^w e^{\overline{w}} = e^{w+\overline{w}} = e^{2\operatorname{Re} w}. \tag{3.92}$$
>
> $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ より，$e^{\operatorname{Re} w} = |z|$．$x \in \mathbb{R}$ のとき，$(e^x)' = e^x > 0$ なので，e^x は狭義単調増加関数．従って，$\operatorname{Re} w = \log|z|$ は w に依らず一意的に定まる．特に，$\operatorname{Re}\alpha = \log|z|$．このとき，
>
> $$e^{i\operatorname{Im}\alpha} = e^{\alpha - \operatorname{Re}\alpha} = e^\alpha / e^{\operatorname{Re}\alpha} = z/|z|. \tag{3.93}$$
>
> 以上がら主張が示された． □

3.5.5 偏角

$\log z$ の虚部を $\arg z$ と書き，z の偏角という．偏角の定義と対数の定義から，以下の等式が成り立つ：

$$z = |z|e^{i\arg z}. \tag{3.94}$$

対数の虚部は $2\pi\mathbb{Z}$ の不定性があるので，$\arg z$ は $2\pi\mathbb{Z}$ を除き一意的に定まる．$z = x + iy$ と表せば，

$$e^{i\arg z} = \frac{z}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad e^{i\arg z} = \cos(\arg z) + i\sin(\arg z) \tag{3.95}$$

両辺を比較すれば，

$$\tan(\arg z) = \frac{y}{x}. \tag{3.96}$$

従って，$z \neq 0$ に対して，集合として次の等式が成り立つ：

$$\arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right). \tag{3.97}$$

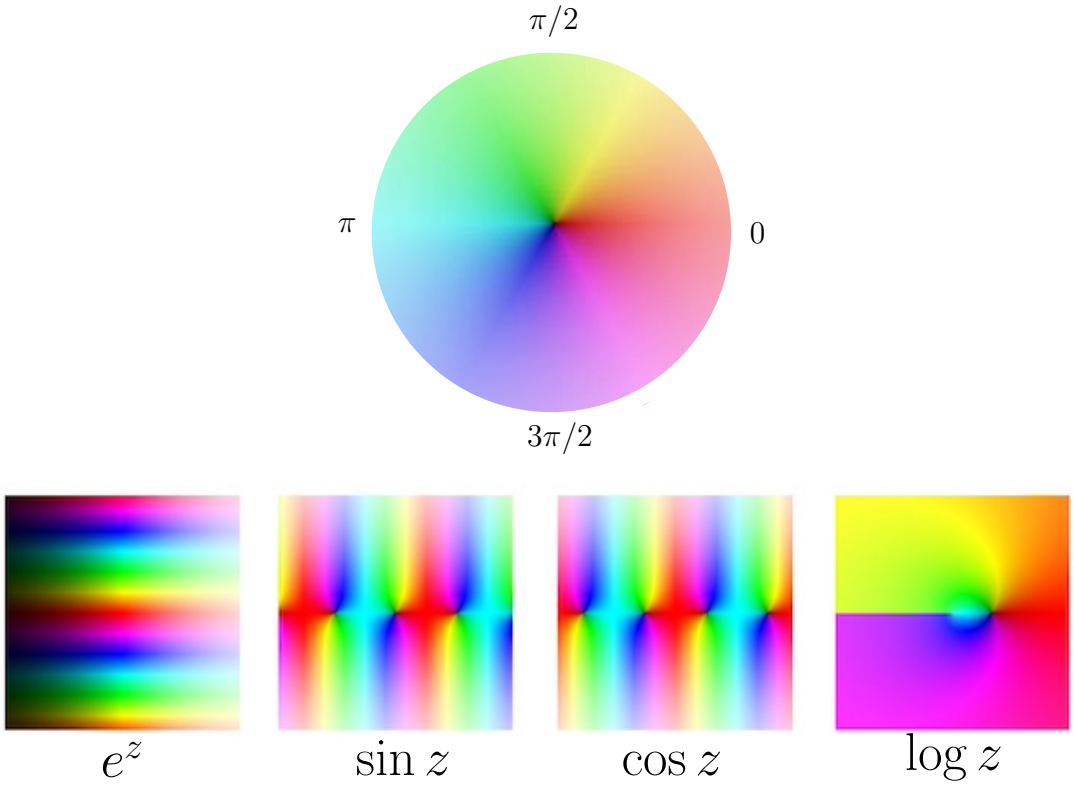
$z_1 = e^{w_1}, z_2 = e^{w_2}$ の場合を考えれば，指数関数 e^z の性質 $e^{w_1+w_2} = e^{w_1}e^{w_2}$ から，

$$\log(z_1 z_2) = \log(e^{w_1}e^{w_2}) = \log e^{w_1+w_2} = w_1 + w_2 + 2\pi i\mathbb{Z} = \log z_1 + \log z_2. \tag{3.98}$$

両辺の虚部を取れば，

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \tag{3.99}$$

これらは集合としての等式である．



（上）偏角を色調で，絶対値を輝度で表す基準となるカラーホイール.（下）カラーホイールに基づいたドメインカラーリングによる初等関数の可視化（いずれも原点は図の中心にある）．[?] を用いて作成.

3.5.6 対数の分枝

定義 3.10. D を $\mathbb{C}$ の原点を含まない領域とする．D 上の複素数値**連続**関数 $f(z)$ が D 上で

$$e^{f(z)} = z \qquad \forall z \in D \tag{3.100}$$

をみたすとき，$f(z)$ を $\log z$ の**分枝**と言う．同様に，D 上の実数値**連続**関数 $\varphi(z)$ が

$$e^{i\varphi(z)} = z/|z| \qquad \forall z \in D \tag{3.101}$$

をみたすとき，$\varphi(z)$ を $\arg z$ の**分枝**と言う.

領域 D において $\log z$ の分枝 $f(z)$ が存在するとき，$f(z) + 2\pi i n, n \in \mathbb{Z}$ は $\log z$ の分枝であり，D における $\log z$ の全ての分枝はこのように与えられる.

> *Proof.* $f(z)$ が D における $\log z$ の分枝であるとき，$f(z) + 2\pi i n$ も $\log z$ の分枝であることは明かである．$g(z)$ を $\log z$ の任意の分枝とする．このとき，$e^{f(z)-g(z)} = z/z = 1$ が任意の $z \in D$ に対して成り立つ．従って $f(z) - g(z) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ が任意の $z \in D$ に対して成り立つ．$f, g \in C^0(D)$ であり，D は連結なので，$n \in \mathbb{Z}$ が存在して，$f(z) - g(z) = 2\pi i n$ $\forall z \in D$ が成り立つ．以上から，$\log z$ の D における任意の分枝は $f(z) + 2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$ で与えられる． □

注 3.11. $\mathbb{C}$ の原点を含まない勝手な領域に対して，$\log z$ の分枝が存在するとは限らない．例えば，$\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 上で $\log z$ の分枝は存在しない.（これは後で示す.）原点を含まない $\mathbb{C}$ の任意の領域に対して，$\log z$ の分枝を与えることと $\arg z$ の分枝を与えることは同値である.

例えば以下の領域 D 上で，$\arg z = \arctan(y/x)$ の分枝 $\operatorname{Arg} z$ が次の条件をみたすように選ぶことができる：

$$D = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}, \qquad -\pi/2 < \operatorname{Arg} z < \pi/2 \tag{3.102}$$

$$D = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}, \qquad -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi \tag{3.103}$$

$$D = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad 0 < \operatorname{Arg} z < 2\pi \tag{3.104}$$

Proof. 逆三角関数 $\operatorname{Arctan} x$ を $\mathbb{R}$ 上の関数として

$$\operatorname{Arctan} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \qquad x \in \mathbb{R} \tag{3.105}$$

により与えるとき，$-\pi/2 < \operatorname{Arctan} x < \pi/2$ であり，$\operatorname{Arctan} x$ は区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ で定義された関数 $\tan x$ の逆関数である．$\mathbb{R}$ を x 軸とする．右半平面 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\right\}$ 上の関数

$$F(x,y) = \operatorname{Arctan}(y/x) \tag{3.106}$$

を $\mathbb{R}^2\backslash\left(\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\}\right)$ 上の連続関数に拡張できることを見る．$(0,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\left(\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\}\right)$ のとき，$y > 0$ または $y < 0$ である．そこで，次のように定める．

$$F(0,y) = \operatorname{Arctan}(y/0) = \begin{cases} \pi/2 & (y > 0) \\ -\pi/2 & (y < 0) \end{cases} \tag{3.107}$$

このように定めるとき，$y > 0$ ならば

$$\lim_{x \to +0} F(x,y) = \lim_{x \to +0} \int_0^{y/x} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi/2 = F(0,y) \tag{3.108}$$

$y < 0$ ならば，

$$\lim_{x \to +0} F(x,y) = \lim_{x \to +0} \int_0^{y/x} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{-\infty} \frac{dt}{1+t^2} = -\pi/2 = F(0,y) \tag{3.109}$$

なので，$F(x,y)$ は $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\right\} \cup \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\right\}$ 上の連続関数である．そこで，

$$F(x,y) = \begin{cases} \pi + \operatorname{Arctan}(y/x) & (x < 0, y > 0) \\ -\pi + \operatorname{Arctan}(y/x) & (x < 0, y < 0) \end{cases} \tag{3.110}$$

により $x < 0$ のときの $F(x,y)$ を定めれば，$x \to -0$ としたときも $\lim_{x \to -0} F(x,y) = F(0,y)$ が成り立つ．従って，$F(x,y)$ は $\mathbb{R}^2\backslash\left(\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\}\right)$ 上で定義された連続関数である．$D = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$ と $D = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$ の場合には，このようにして $\operatorname{Arg} z = F(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ として $\arg z$ の分枝を定義できる．ここでは詳しく述べないが，$D = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0}$ の場合も同様である． □

上記のそれぞれの D に対して，$\operatorname{Arg} z$ を $\arg z$ の**主値**と言う．このとき，$\operatorname{Arg} z$ に対応する D 上の $\log z$ の分枝は

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z \tag{3.111}$$

により与えられる．この分枝を $\log z$ の**主値**と言う．$D = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$ に対して，

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right), \qquad \operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right), \qquad z = x + iy \tag{3.112}$$

であり，この定義は $D = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$ に対しても拡張される．特に，次が成り立つ．

$$z \text{ が正実数ならば，} \operatorname{Arg} z = 0 \text{ であり, 対数関数の主値 } \operatorname{Log} z \text{ は実数である．} \tag{3.113}$$

3.5.7 主値と対数関数の級数表示

以下，$D = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$ の場合を考える．$z \in B$ のとき $1 + z \in D$ であるから，B 上で $\log(1+z)$ の主値として正則関数 $\operatorname{Log}(1+z)$ を定義することができる．このように $\operatorname{Log}(1+z) \in \mathcal{O}(B)$ を考えるとき，$\operatorname{Log}(1+z)$ の整級数表示を求める．開区間 $(-1, 1)$ 上の関数 $\log(1+x)$ の Taylor 展開は次式で与えられる．

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \tag{3.114}$$

この級数を複素変数の整級数と見るとき，Cauchy-Hadamard の定理より B において広義一様に絶対収束する．この正則関数を $f(z) \in \mathcal{O}(B)$ とする：

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \qquad z \in B. \tag{3.115}$$

$f(z)$ の定数項は 0 であり，e^z の収束半怪は ∞ なので，$e^{f(z)}$ は B 上で収束する整級数である．従って，その級数表示は $e^{f(z)}$ の Taylor 級数により与えられる．

整級数 $e^{f(z)}$ の $z = 0$ における Taylor 級数は，z を実軸に制限して $x = 0$ において $e^{f(z)}$ の Taylor 級数を考えた場合に一致する．従って，$e^{f(z)}$ の Taylor 級数は $e^{\log(1+x)}$ の原点における Taylor 級数に一致する．ところが，$x \in (-1, 1)$ に対して $e^{\log(1+x)} = 1 + x$ であるから，結局 $e^{f(z)}$ の Taylor 級数は次式で与えられる．

$$e^{f(z)} = 1 + z. \tag{3.116}$$

この式から，$f(z)$ は B における $\log(1+z)$ の分枝である．従って，整数 $n \in \mathbb{Z}$ が存在して，$f(z) = \operatorname{Log}(1+z) + 2\pi i n$ が B 上で成り立つ．$f(z)$ に $z = 0$ を代入すると，$f(0) = 0$ である．一方，対数の主値の定義から，正実数に対して $\operatorname{Arg} z = 0$ なので，$\operatorname{Log}(1) = \log 1 + i \operatorname{Arctan}(0) = 0$ である．従って $n = 0$ である．以上から，B 上で次式を得る：

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n. \tag{3.117}$$

Abel の定理から，任意の $z \in \overline{B}\backslash\{-1\}$ に対して右辺の級数は定義され，z を頂点とする B 内の角領域において w が z に近づくとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = \lim_{w \to z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} w^n = \lim_{w \to z} \operatorname{Log}(1+w). \tag{3.118}$$

ここで $\operatorname{Log}(1+w)$ は領域 $\mathbb{C}\backslash\{\operatorname{Re}(1+w) \leq 0\} = \mathbb{C}\backslash\{\operatorname{Re} w \leq -1\}$ 上で正則なので，$z \in \overline{B}\backslash\{-1\}$ に対して $\lim_{w \to z} \operatorname{Log}(1+w) = \operatorname{Log}(1+z)$．従って，次式が成り立つ：

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \qquad \forall z \in \overline{B}\backslash\{-1\}. \tag{3.119}$$

3.5.8 複素数の一般冪

複素数 $z \neq 0, \alpha$ に対して，z^α を以下の式で定める：

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}. \tag{3.120}$$

$\log z$ の多価性から，α が整数でなければ z^α は多価関数である．原点を含まない領域 D において $\log z$ の分枝が存在するとき，上の定義式により D において z^α の分枝を定めることができる．例えば，主値を考えることにより B 上の正則関数

$$(1+z)^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log}(1+z)} \in \mathcal{O}(B) \tag{3.121}$$

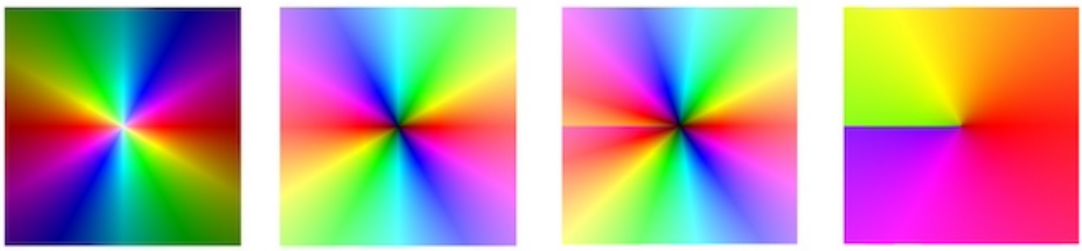
が定まり，その整級数表示は

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \tag{3.122}$$

で与えられる．実数 $-1 < x < 1$ に対して整級数表示

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \tag{3.123}$$

が知られているので，$(1+z)^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log}(1+z)}$ の整級数表示の証明は $\operatorname{Log}(1+z)$ の整級数表示の証明と同様にできる．



ドメインカラーリングによる複素冪関数の可視化（いずれも原点は図の中心にある）．[?] を用いて作成.

4　複素積分と Cauchy 積分公式

4.1　線積分の定義

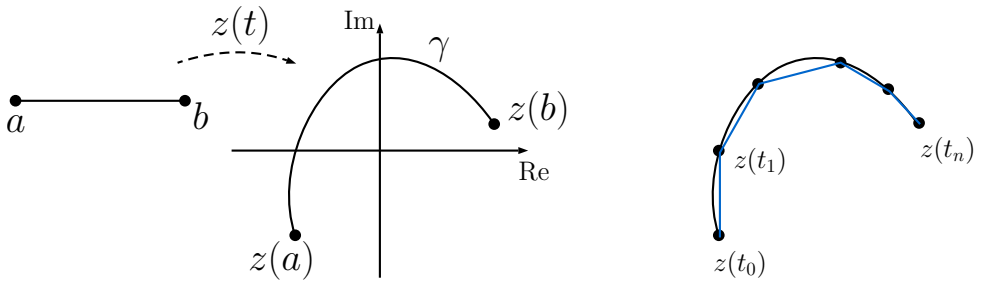
定義 4.1 (曲線)**.** **曲線** γ はある区間 $[a,b]$ から $\mathbb{C}$ への連続写像 $z=z(t)$ による像である.

- **閉曲線**：$z(a)=z(b)$ を満たす曲線 γ
- **単一曲線**（または **Jordan 弧**）：$z(t)$ は $[a,b]$ 上で単射であるような曲線（ただし，閉曲線の場合，$[a,b)$ 上で単射であるとする）
- **Jordan 曲線**：単一閉曲線
- **C^1-級曲線**：$z'(t)$ が連続である曲線（閉曲線の場合，$z'(a)=z'(b)$ を仮定する）
- **区分的 C^1-級曲線**：区間 $[a,b]$ の有限分割 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ があって，$z(t)$ の $[t_{j-1},t_j]$ への制限は $j=1,\dots,n$ に対して C^1-級である．すなわち，各除外点 t_j において，$z'(t)$ の右からの極限と左からの極限が存在する.
- **正則曲線**：$z(t)$ は C^1-級であり，$z'(t)\neq 0\ \forall t\in[a,b]$ を満たす.

総変動量

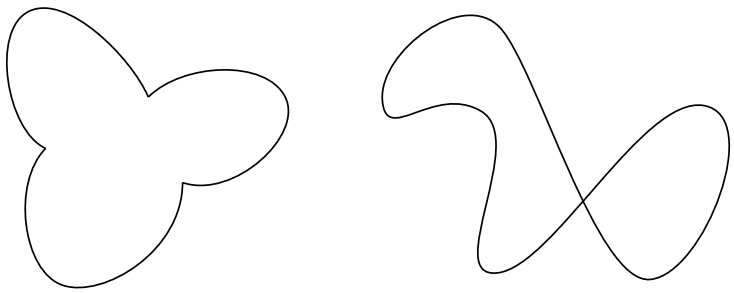
$$V(z)=\sup_{a=t_0<t_1<\cdots t_n=b}\sum_{j=1}^{n}|z(t_j)-z(t_{j-1})| \tag{4.1}$$

が有限なとき，γ は**長さ有限**であるという．ただし，上限はすべての有限分割（n は動く）についてとっている.



（左）写像の像としての曲線の定義.（右）(4.1) における有限和 $\sum_{j=1}^{n}|z(t_j)-z(t_{j-1})|$ は折線近似の長さを表す.

注 4.2. γ が長さ有限であるのは，$z(t)$ の実部 $x(t)$ と虚部 $y(t)$ がそれぞれ有界な総変動量をもつときとそのときのみである.



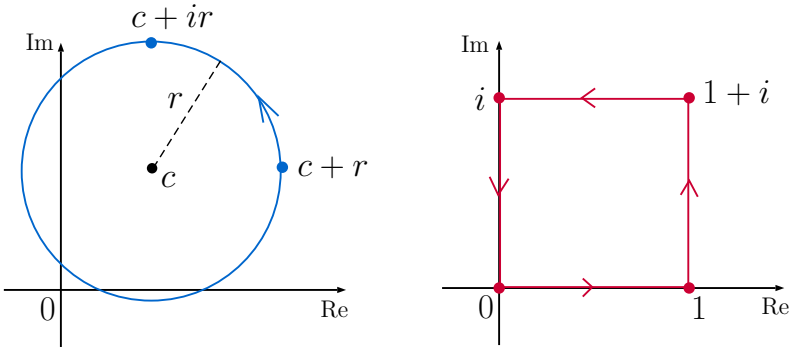
（左）区分的に C^1-級の単一閉曲線の例.（右）単一でない C^1-級の閉曲線の例.

例 4.3. *(1)* $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ とする．$\gamma : z = z(t) = c + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$ は C^1-級正則曲線である．さらに，単一閉曲線で，反時計回りの向きである．c を中心とする半径 r の円周である（下図（左））．

(2) $0, 1, 1+i, i$ を頂点とする正方形の周は以下のように定めることができる（下図（右））：

$$z = z(t) = \begin{cases} t & (t \in [0,1]) \\ 1 + i(t-1) & (t \in [1,2]) \\ 1 + i - (t-2) & (t \in [2,3]) \\ i - i(t-3) & (t \in [3,4]) \end{cases} \tag{4.2}$$

区分的に C^1-級正則曲線である．さらに，単一閉曲線で，向きは反時計回りである．



定義 4.4 (線積分)．長さ有限の曲線 γ の近傍で定義された関数 $f(z)$ の γ に沿った線積分を次のように定義する．$[a,b]$ の分割 Δ： $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ と点 $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ に対して

$$S(\Delta, \xi) = \sum_{j=1}^{n} f(z(\xi_j))\,(z(t_j) - z(t_{j-1})) \tag{4.3}$$

という *Riemann* 和を定義する．$t_j - t_{j-1} \to 0$ $(n \to \infty)$ を満たすような任意の Δ の列と対応する任意の ξ の列によらず $\lim_{n\to\infty} S(\Delta, \xi)$ が一つの値として定まるとき，この極限値を

$$\int_\gamma f(z)\,dz \tag{4.4}$$

と書いて，γ に沿った $f(z)$ の線積分という．

$f(z)$ が γ の近傍で連続，あるいは $f(z(t))$ が $[a,b]$ で連続ならば，$S(\Delta, \xi)$ の極限が Δ, ξ によらずに定まることが Riemann 積分のときと同様に示せる．

$\bar{z}$ に関する線積分を

$$\int_\gamma f(z)\,\overline{dz} = \overline{\int_\gamma \overline{f}(z)\,dz} \tag{4.5}$$

として定義すれば，

$$\int_\gamma f(z)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_\gamma f(z)\,dz + \int_\gamma f(z)\,\overline{dz}\right), \qquad \int_\gamma f(z)\,dy = \frac{1}{2i}\left(\int_\gamma f(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,\overline{dz}\right) \tag{4.6}$$

と書けるので，$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ のとき，

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \left\{\int_\gamma u(x,y)\,dx - \int_\gamma v(x,y)\,dy\right\} + i\left\{\int_\gamma v(x,y)\,dx + \int_\gamma u(x,y)\,dy\right\} \tag{4.7}$$

となる．$\int_\gamma p\,dx + q\,dy$ を定義して，この (4.7) の式を線積分の定義式として議論を進めてもかまわない．

多くの場合，γ は区分的 C^1-級の曲線である．このとき，線積分の定義を次のように与えることができる：

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(z(t))z'(t)\,dt. \tag{4.8}$$

注 4.5. 弧長（線素）に関する積分は別物で，区分的 C^1-級曲線 γ に対して次のように定義される：

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_a^b f(z(t))|z'(t)|\,dt. \tag{4.9}$$

一般の曲線の場合，$\sum_{j=1}^n f(z(\xi_j))|z(t_j) - z(t_{j-1})|$ の極限として定義する．

例 4.6. $f(z) = z^2$ で，曲線は円の一部 $z(t) = e^{it}, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ のとき，

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{it}\right)^2 \frac{d}{dt}e^{it}\,dt = i\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3it}\,dt = i\left[\frac{e^{3it}}{3i}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{\frac{3}{2}\pi i} - e^0}{3} = -\frac{1+i}{3}. \tag{4.10}$$

一方で，

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{it}\right)^2 \left|\frac{d}{dt}e^{it}\right| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2it}\,dt = \left[\frac{e^{2it}}{2i}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{\pi i} - e^0}{2i} = i. \tag{4.11}$$

命題 4.7 (線積分の基本性質)**.** γ を長さ有限の曲線として，$\int_\gamma f(z)\,dz$ が存在すると仮定する．

(1) $\int_\gamma g\,dz$ が存在すれば，

$$\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))\,dz = \alpha\int_\gamma f(z)\,dz + \beta\int_\gamma g(z)\,dz, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{4.12}$$

(2)

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,|dz|. \tag{4.13}$$

(3) γ に対して逆向きの曲線 $-\gamma$ を $z = z(-t)$, $t \in [-b, -a]$ とすると，

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz \tag{4.14}$$

(4) γ は曲線 γ_1 と γ_2 をつないだ曲線（曲線の和）である（すなわち，$\gamma_1 : z = z(t), t \in [a, c]$, $\gamma_2 : z = z(t), t \in [c, b]$ に対し $\gamma : z = z(t), t \in [a, b]$ とする）とき，

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz. \tag{4.15}$$

(3) は線積分が曲線の向きに依存することを言っている．一方で，弧長に関する積分は向きに依らない：$\int_{-\gamma} f(z)\,|dz| = \int_\gamma f(z)\,|dz|$.

(4) において，より一般に，

$$\gamma = \sum_{j=1}^n a_j\gamma_j, \qquad a_j \in \mathbb{Z} \tag{4.16}$$

とおく．これを曲線 γ_j を a_j 個だけ含む曲線の集まりと考える（$a_j = -1$ は向き付けを逆にすると解釈する）．各 γ_j が閉曲線であるとき，γ を**サイクル**と呼ぶ．このとき，$f(z)$ の γ に沿っての積分を

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^n a_j \int_{\gamma_j} f(z)\,dz \tag{4.17}$$

と定義する．

Proof. 定義よりすぐに従うため，省略する． □

命題 4.8. 線積分は曲線 γ の向きを変えないパラメータ付けに依らない．

Proof. （区分的）C^1-級の単調増加関数 $t(\tau) : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ に対して，$z(t(\tau)), \tau \in [\alpha, \beta]$ の像は同一の曲線 γ である．γ が区分的 C^1-級の場合，積分における変数変換の公式より

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(z(t(\tau)))z'(t(\tau))t'(\tau)\,d\tau. \tag{4.18}$$

しかし，$z(t(\tau))$ の τ についての微分は $z'(t(\tau))t'(\tau)$ であるので，上記の積分の値は γ が $z = z(t), t \in [a, b]$ で表されるか，$z = z(t(\tau)), \tau \in [\alpha, \beta]$ で表されるかに依らない． □

例 4.9.

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 : z = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, \pi] \\
&\gamma_2 : z = e^{i\pi t}, \quad t \in [0, 1] \\
&\gamma_3 : z = e^{i\pi t^2}, \quad t \in [0, 1] \\
&\gamma_4 : z = -t + i\sqrt{1 - t^2}, \quad t \in [-1, 1]
\end{aligned}$$

はすべて同じ半円 $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ を同じ向きで表している．よって，半円の近傍で定義された $f(z)$ に対して，$\int_{\gamma_j} f(z)\,dz$ は $j = 1, 2, 3, 4$ で共通の値をとる．

4.2 Cauchy の積分定理

命題 4.10. 複素平面の領域 D において連続な関数 $f(z)$ が *1* 価な原始関数をもつための必要十分条件は，任意の長さ有限な D 内の閉曲線 σ に対して

$$\int_\sigma f(z)\,dz = 0 \tag{4.19}$$

を満たすことである．

Proof.

- “十分性”：$\alpha \in D$ を任意に固定すると，α と任意の $z \in D$ を結ぶすべての長さ有限の D 内の曲線 γ に対して，$\int_\gamma f(z)\,dz$ は共通の値をとる．実際，そのような曲線 γ_1, γ_2 を二つとると，$\sigma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ で定義される曲線は D 内の長さ有限の閉曲線であるから，仮定より

$$0 = \int_\sigma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz. \tag{4.20}$$

従って，この共通の値を $F(z) = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^z f(\zeta)\,d\zeta$ と書くことにすれば，$F(z)$ は 1 価な関数である．$F(z)$ は $f(z)$ の原始関数であることを示す．
z と $z+h$ を結ぶ線分が D に入るような（絶対値で）十分小さい $h \in \mathbb{C}$ に対して，$\zeta = \zeta(t) = z + th$, $t \in [0,1]$ とすれば，

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta = \int_0^1 f(\zeta(t))\zeta'(t)\,dt = h\int_0^1 f(z+th)\,dt. \tag{4.21}$$

よって，

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\int_0^1 [f(z+th) - f(z)]\,dt\right| \le \max_{t\in[0,1]} |f(z+th) - f(z)|. \tag{4.22}$$

$f(z)$ は連続であるから，この右辺は $h \to 0$ のとき 0 に収束する．ゆえに $F'(z) = f(z)$.

- “必要性”：$f(z)$ が 1 価な原始関数 $F(z)$ をもつとする．D 内の曲線 $\gamma:\ z = z(t), t \in [a,b]$ に対して，

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma F'(z)\,dz = F(z(b)) - F(z(a)) \tag{4.23}$$

であることを示せばよい（閉曲線に対して $z(b) = z(a)$ となるため）．まず，γ が区分的に C^1-級ならば，

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b F'(z(t))z'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}F(z(t))\,dt = F(z(b)) - F(z(a)). \tag{4.24}$$

γ が長さ有限な曲線の場合，γ を折線で近似できる事実を使う．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して γ と同じ始点と終点をもつ D 内の折線 Γ が存在して，

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz - \int_\Gamma f(z)\,dz\right| < \varepsilon \tag{4.25}$$

が成り立つ．Γ は区分的に C^1-級であるので，

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = F(z(b)) - F(z(a)) \tag{4.26}$$

であって，$\varepsilon > 0$ が任意だったので

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z(b)) - F(z(a)). \tag{4.27}$$

□

補題 4.11. $f(z)$ を有界な領域 D における連続関数，γ を有限な長さをもつ D 内の曲線とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，γ と同じ始点・終点をもつ D 内の折線 Γ が存在して

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz - \int_\Gamma f(z)\,dz \right| < \varepsilon \tag{4.28}$$

が成り立つ．

Proof. γ はコンパクト集合 $[a,b]$ の連続写像による像としてコンパクトであり，∂D もコンパクトであるから，γ と ∂D の距離 d は正である．
いま，$0 < \eta < d$ に対して，γ を含む帯状集合

$$S = \left\{ \zeta;\ |\zeta - z| \le \frac{\eta}{2},\ z \in \gamma \right\} \tag{4.29}$$

は D に含まれるコンパクト集合であるから，$f(z)$ は S で一様連続である．ゆえに，δ を十分小さくとれば，任意の $z, z' \in S$, $|z - z'| < \delta$ に対して $|f(z') - f(z)| < \varepsilon/2\ell$ とできる．ここに，ℓ は γ の長さとし，$\delta < \eta/2$ としておく．
一方，$\gamma : z = z(t)$ は $[a,b]$ 上一様連続であるから $[a,b]$ の分割 $a = t_0, t_1, \dots, t_n = b$ を十分細かくして，$|z(t_j) - z(t_{j-1})| < \delta$, $j = 1, \dots, n$，かつ

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{n} f(z(t_j))(z(t_j) - z(t_{j-1})) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.30}$$

となるようにする．ここで $z_j = z(t_j)$, $\Gamma = \sum_{j=1}^{n} \overline{z_{j-1}z_j}$ とおけば，Γ は S に含まれる折線であって

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Gamma f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{n} f(z_j)(z_j - z_{j-1}) \right| \\
&\quad = \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{\overline{z_{j-1}z_j}} f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{n} f(z_j)(z_j - z_{j-1}) \right| \\
&\quad = \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{\overline{z_{j-1}z_j}} (f(z) - f(z_j))\,dz \right| \\
&\quad \le \sum_{j=1}^{n} \int_{\overline{z_{j-1}z_j}} |f(z) - f(z_j)|\,|dz| \\
&\quad \le \frac{\varepsilon}{2\ell} \sum_{j=1}^{n} |z_j - z_{j-1}| \\
&\quad \le \frac{\varepsilon}{2\ell}\ell = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

ゆえに，(4.28) を得る． □

実数の関数の場合，連続関数は常に原始関数をもつが，複素変数の関数はそうとは限らない．

例 4.12 (原始関数を持たない関数)**.**
$f(z) = \frac{1}{z}$, $z \in D := \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\sigma : z = z(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ とするとき，

$$\int_\sigma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\,dt = 2\pi i. \tag{4.31}$$

もしも f の原始関数 F が存在すると仮定すると，命題 *4.10* によって

$$\int_\sigma f(z)\,dz = F(z(2\pi)) - F(z(0)) = F(1) - F(1) = 0 \tag{4.32}$$

となり矛盾が生じる．ゆえに，f は原始関数を持たない．

ある（あやしい）意味で $F'(z) = f(z)$ を満たす $F(z) = \log z$ は多価関数であることが原因であるというふうに理解できる．一方で，複素平面から実軸の負の部分を除いた領域 $D' = \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : z \leq 0\}$ で定義される $\log z$ の分枝

$$F(z) = \operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z, \qquad \operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi) \tag{4.33}$$

は f の原始関数になる．そこで，$0 < \varepsilon < 1$ に対して，$\sigma_\varepsilon : z = z(t) = e^{it}, t \in [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon]$ とすると，σ_ε の像は D' に含まれるので

$$\int_{\sigma_\varepsilon} f(z)\,dz = F(z(\pi-\varepsilon)) - F(z(-\pi+\varepsilon)) = (\log 1 + i(\pi-\varepsilon)) - (\log 1 + i(-\pi+\varepsilon)) = (2\pi - 2\varepsilon)i. \tag{4.34}$$

ここで $\varepsilon \to +0$ とすると $2\pi i$ に収束する．これが $\int_\sigma f(z)\,dz$ に等しいのはうなずけるだろう．

これから考えていく方向は，$\mathbb{C}$ の領域 D において連続な関数 $f(z) : D \to \mathbb{C}$ に対して，以下の 3 条件の関係を調べることである：

(A) f は D で 1 価な原始関数を持つ，すなわち，$F' = f$ を満たす $F : D \to \mathbb{C}$ が存在する．

(B) D 内の長さ有限の任意の閉曲線 σ に対して，$\int_\sigma f(z)\,dz = 0$ が成り立つ．

(C) f は D において正則である．

結論を先に言ってしまうと：

$$\text{一般の領域 } D \text{ では} \qquad \text{(A)} \ \Leftrightarrow \ \text{(B)} \ \Rightarrow \ \text{(C)}$$

$$\text{単連結領域 } D \text{ では} \qquad \text{(A)} \ \Leftrightarrow \ \text{(B)} \ \Leftrightarrow \ \text{(C)}$$

一般領域の (B) $\Rightarrow$ (C) は **Morera の定理**，単連結領域の (B) $\Leftarrow$ (C) は **Cauchy の積分定理**である．

命題 4.13. $f(z)$ を領域 D で定義される正則関数とする．内部とともに D に含まれるような三角形を考え，その境界で与えられる閉曲線を T とする．このとき，

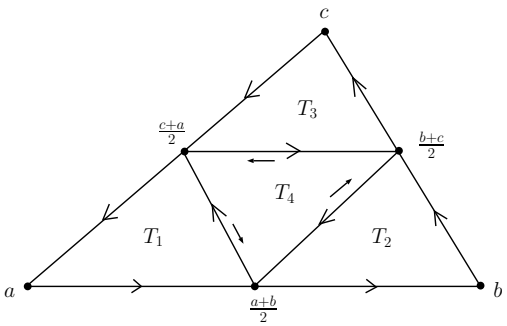
$$\int_T f(z)\,dz = 0. \tag{4.35}$$

Proof. 主張は線積分がゼロであることなので，曲線の向きを好きにとってよい．ここでは，正の向きを用いる．すなわち，パラメータの値が増加し曲線に沿って動くとき，曲線が囲む有界領域が左側にくるようにする．三角形の頂点を $a, b, c \in \mathbb{C}$ として，$T = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{ca}$ と書く．
三角形の辺の中点を用いて，元の三角形を以下の頂点をもつ 4 つの三角形に分ける：

$$\begin{aligned} T_1 &: \left(a, \frac{a+b}{2}, \frac{c+a}{2}\right), \quad T_2 : \left(\frac{a+b}{2}, b, \frac{b+c}{2}\right), \\ T_3 &: \left(\frac{c+a}{2}, \frac{b+c}{2}, c\right), \quad T_4 : \left(\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}\right). \end{aligned} \tag{4.36}$$

ただし，T_j, $j = 1, 2, 3, 4$ はそれぞれの三角形の境界で与えられる正の向きをもつ曲線である．
このとき，

$$\int_T f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{T_j} f(z)\,dz \tag{4.37}$$



より

$$\left|\int_T f(z)\,dz\right| \le \sum_{j=1}^{4}\left|\int_{T_j} f(z)\,dz\right| \le 4\max_{j=1,\dots,4}\left|\int_{T_j} f(z)\,dz\right| = 4\left|\int_{T^{(1)}} f(z)\,dz\right|. \tag{4.38}$$

ただし，最大値が $T_j = T^{(1)}$ で達成されるとした．
つぎに，$T^{(1)}$ の各辺の中点を用いて，4 つの三角形 $T_1^{(1)},\dots,T_4^{(1)}$ に分けて

$$\max_{j=1,\dots,4}\left|\int_{T_j^{(1)}} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{T^{(2)}} f(z)\,dz\right| \tag{4.39}$$

と $T^{(2)}$ を定めると，つぎが成り立つ：

$$\left|\int_T f(z)\,dz\right| \le 4^2\left|\int_{T^{(2)}} f(z)\,dz\right|. \tag{4.40}$$

同様の操作を繰り返すと，

$$\left|\int_T f(z)\,dz\right| \le 4^n\left|\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz\right| \tag{4.41}$$

をみたす三角形の列 $\{T^{(n)}\}$ を得る．$T^{(n)}$ の直径（すなわち，$\operatorname{diam}(T^{(n)}) = \sup\{|x-y|;\ x,y \in T^{(n)}\}$）は $\operatorname{diam}(T^{(n)}) = 2^{-n}\operatorname{diam}(T)$ のように 0 に収束する．よって，$T^{(n)}$ とその内部を合わせてできる閉集合を $\widetilde{T}^{(n)}$ とすれば，$\bigcap_n \widetilde{T}^{(n)}$ は 1 点 $z_0 \in D$ からなる．$f(z)$ の正則性より，

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \varepsilon(z)(z-z_0), \qquad \varepsilon(z) \to 0 \text{ as } z \to z_0. \tag{4.42}$$

ゆえに，

$$\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz = \int_{T^{(n)}} \{f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)\}\,dz + \int_{T^{(n)}} \varepsilon(z)(z-z_0)\,dz \tag{4.43}$$

であるが，$f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)$ は原始関数 $f(z_0)z + \frac{1}{2}f'(z_0)(z-z_0)^2$ をもつから，(4.43) の右辺の第 1 項はゼロである．したがって，

$$\left|\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz\right| \le \int_{T^{(n)}} |\varepsilon(z)|\,|z-z_0|\,|dz| \le M_n \operatorname{diam}(T^{(n)})\ell(T^{(n)}). \tag{4.44}$$

ここで，$M_n = \sup_{T^{(n)}} |\varepsilon(z)|$，そして $\ell(T^{(n)})$ は $T^{(n)}$ の周の長さである．以上から，

$$\left|\int_T f(z)\,dz\right| \le 4^n M_n \operatorname{diam}(T^{(n)})\ell(T^{(n)}) = M_n \operatorname{diam}(T)\ell(T). \tag{4.45}$$

したがって，$n \to \infty$ として，定理の主張を得る． □

注 4.14. 定理の証明は高度な理論を使わずすっきりしているが，*E. Goursat* がここまで行き着くまでにい

ろいろあった．その原因の一つは単純な評価

$$\left|\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz\right| \le \max_{z\in T^{(n)}} |f(z)| \int_{T^{(n)}} |dz| \le \text{定数}\cdot 2^{-n}\ell(T) \tag{4.46}$$

ではうまくいかないことがある．この評価だけで進めようとすると，

$$\left|\int_{T} f(z)\,dz\right| \le 4^n \left|\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz\right| \le 4^n\cdot \text{定数}\cdot 2^{-n}\ell(T) \tag{4.47}$$

となって，$n\to\infty$ で発散してしまう．正則関数を *1* 次関数で近似できるということと *1* 次多項式の線積分がゼロであることを使うと，$|\varepsilon(z)||z-z_0|$ の評価になり，この量は十分小さくできる．

注 4.15. *Green* の定理を使う別証明がある．

Green の定理： $D\subset\mathbb{R}^2$ を縦線領域，$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を C^1-級関数ならば，

$$\int_{\partial D}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\partial D}P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy. \tag{4.48}$$

ただし，∂D に正の向きがついていると仮定している．

この定理を適用すれば，

$$\begin{aligned}\int_T f(z)\,dz &= \int_T (u+iv)(dx+i\,dy)=\int_T u\,dx-v\,dy+i\int_T v\,dx+u\,dy\\ &= \iint_{\widetilde{T}}(-v_x-u_y)\,dx\,dy+i\iint_{\widetilde{T}}(u_x-v_y)\,dx\,dy=0.\end{aligned} \tag{4.49}$$

最後の “$=0$” の等式は $f=u+iv$ が正則だから *Cauchy-Riemann* の関係式をみたすことから従う．

この証明は単純だが，*Green* の定理という結果を用いている．また，f が C^1-級であるという仮定は命題 *4.13* より強い．一方で，領域に関する仮定を弱くできる．

定理 4.16. D を凸領域とする．$f(z)$ が D において正則ならば，D で *1* 価な原始関数をもち，D 内の任意の閉曲線 γ に対して

$$\int_\gamma f(z)\,dz=0. \tag{4.50}$$

Proof. a を D の定点とし，$z_0\in D$ に対して，

$$F(z_0)=\int_{\overrightarrow{az_0}} f(z)\,dz \tag{4.51}$$

とおけば，各 $z_0\in D$ に対し $F(z_0)$ は一意的に定まる．$z_0+h\in D$ ならば，D の凸性より三角形 (a,z_0,z_0+h) は D に含まれるから，命題 4.13 より

$$F(z_0+h)-F(z_0)=\int_{\overrightarrow{a\,z_0+h}} f(z)\,dz-\int_{\overrightarrow{a\,z_0}} f(z)\,dz=\int_{\overrightarrow{z_0\,z_0+h}} f(z)\,dz \tag{4.52}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z_0+h)-F(z_0)}{h}-f(z_0)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{\overrightarrow{z_0\ z_0+h}}(f(z)-f(z_0))\,dz\right| \\ &\le \frac{1}{|h|}\max_{z\in\overrightarrow{z_0\ z_0+h}}|f(z)-f(z_0)|\,|h| \\ &\to 0 \qquad \text{as } h\to 0.\end{aligned}$$

□

定理 4.17. $f(z)$ を領域 D における正則関数とする．γ を D 内の単一閉曲線とし，その内部も D に含まれるものとする．このとき，

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0. \tag{4.53}$$

とくに，D が単連結領域ならば，(4.53) は任意の単一閉曲線 γ に対して成り立つ．

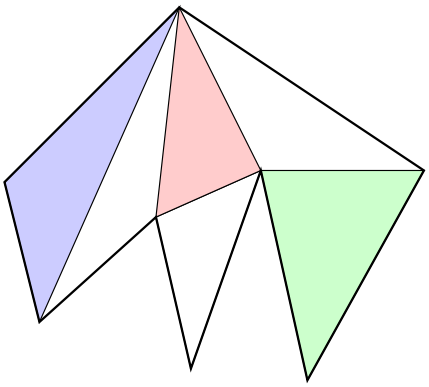
Proof. Jordan の曲線定理（単一閉曲線の $\mathbb{C}$ における補集合は二つの互いに素な連結成分から成り，一方の成分は内部と呼ばれる有界領域であり，他方の成分は外部と呼ばれる非有界領域となる．また，曲線は両成分の境界を成す．[**?**, **?**, **?**]）より $\mathbb{C}-\gamma$ は 2 つの連結集合（実は領域）から成る．その有界な方を γ の内部と呼んで，$(\gamma)^i$ と書く．
$\varepsilon>0$ に対し，折線 Γ を $\left|\int_\gamma f(z)\,dz-\int_\Gamma f(z)\,dz\right|<\varepsilon$ をみたすようにとる．Γ は単一曲線で $(\Gamma)^i$ とともに D に含まれるようにできる．このとき，$\Gamma\cup(\Gamma)^i$ を三角形の和 $\sum_k(T_k\cup(T_k)^i)$ に分けることができる（証明は数学的帰納法を使う）．$T_k\cup(T_k)^i$ は D に含まれるから

$$\int_{T_k} f(z)\,dz = 0. \tag{4.54}$$

よって，

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_k \int_{T_k} f(z)\,dz = 0. \tag{4.55}$$

$\varepsilon>0$ が任意だったので，題意が従う．
D は単連結ならば，以下で示すことにより，D 内の任意の閉曲線 γ の内部 $(\gamma)^i$ は D に含まれる．この事実より定理の後半は従う． □



多角形の三角形分割の例.

定義 4.18. $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ の領域 D が以下の性質をみたすとき，**単連結**であるという．$A,B\in D$ を勝手な 2 点とする．A,B をそれぞれ始点と終点とする D 内の任意の曲線 $\gamma_0,\gamma_1:z_0,z_1:I=[0,1]\to D$ に対し，閉正方形からの連続写像

$$\varphi:I\times I\to D \tag{4.56}$$

で，以下の条件をみたすものが存在する：

$$\varphi(0,t)=z_0(t),\quad \varphi(1,t)=z_1(t),\quad \varphi(s,0)=A,\quad \varphi(s,1)=B\qquad \forall s,t\in I. \tag{4.57}$$

この時写像 $\varphi:I\times I\to D$ を γ_0 と γ_1 の**ホモトピー**と言う．γ_0 と γ_1 のホモトピーが存在するとき，γ_0 と γ_1 は**ホモトピー同値**であると言い，$\gamma_0\simeq\gamma_1$ で表す．曲線 $\gamma:I\to D$ が定値曲線とホモトピー同値であるとき，$\gamma\simeq 0$ で表す．

γ_0 と γ_1 のホモトピーが存在するということは，“連続的に γ_0 を γ_1 に変形できる” ということを数学的に定式化したものである．実際，γ_0 と γ_1 のホモトピー φ は正方形 $I\times I$ の辺 $\{0\}\times I$ 上で γ_0 に一致し，辺 $\{1\}\times I$ 上で γ_1 に一致するが，φ の定める曲線族 $\{\varphi_s\}_{s\in I},\varphi_s(t)=\varphi(s,t),t\in I$ が γ_0 から γ_1 への “連続的な変形”（つまり，曲線の連続的な族）を与えている．一方，以下の定理 4.22(2) のように閉曲線を用いて曲線のホモトピー 同値性を理解することもできる．$\gamma\simeq 0$ という条件は，曲線 γ を連続的に D の 1 点に潰せるということを数学的に定式化したものである．

例 4.19. 上の定義はそのまま $\mathbb{R}^n$ でも通用するので，次元にとらわれない単連結集合の例を挙げる：全空間 $\mathbb{R}^n$，開球 $B(c,r)=\{x\in\mathbb{R}^n;\|x-c\|<r\}$，$C$ 内の単一閉曲線が囲む領域，平面から半直線を除いた集合，$\mathbb{R}^3$ から一点を除いた集合 $\mathbb{R}^3\backslash\{a\}$，任意の凸領域や星型領域．
一方，単連結でない領域の例は $\mathbb{R}^2$ から一点を除いた集合 $\mathbb{R}^2\backslash\{a\}$，円環領域 $\{z\in\mathbb{C};r_1<|z-c|<r_2\}$，$\mathbb{R}^3$ から直線を除いた集合，トーラスの内部など．

定理 4.17 で単一曲線に対する Cauchy の定理を示したが，単一でない曲線に拡張するため，次の概念を導入する必要がある．

定義 4.20. γ を $\mathbb{C}$ における閉曲線（またはサイクル）とする．点 $a\in\mathbb{C}\backslash\gamma$ に対し

$$n(\gamma,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-a} \tag{4.58}$$

を a の γ に対する**指数**（または γ の a に対する**回転数**）という．

γ が円を m 回描く曲線 $z(t)=a+e^{it},t\in[0,2m\pi]$ ならば，線積分の定義から計算して $n(\gamma,a)=m$ を得る．よって，$n(\gamma,a)$ は曲線 γ から見れば，γ 上を動く点が a の周りを回転する回数とみることができる．以下，回転数の基本性質をまとめる．

(1) $n(\gamma,a)=-n(-\gamma,a)$

(2) γ が円盤 B に含まれるとき，$a\notin B$ に対して $n(\gamma,a)=0$.
実際，$\frac{1}{z-a}$ は B において正則だから，定理 4.16 より $n(\gamma,a)=0$ となる．

(3) $\mathbb{C}\backslash\gamma$ は（たかだか可算個の）連結成分に分かれるが，$n(\gamma,a)$ は a の関数として各成分で定数値をとる．

定義 4.21. 領域 D 内の閉曲線（またはサイクル）γ が D に関して 0 にホモローグであるとは，D の補集合 $\mathbb{C}\backslash D$ のすべての点 a に対して $n(\gamma,a)=0$ となることであり，$\gamma\sim 0\ (\mathrm{mod}\, D)$ と書く．
また，始点・終点を同じくする 2 つの曲線 γ_1,γ_2 が D に関して互いにホモローグであるとは，$\gamma_1-\gamma_2\sim 0\ (\mathrm{mod}\, D)$ なることであり，$\gamma_1\sim\gamma_2\ (\mathrm{mod}\, D)$ と書く．

定理 4.22. $\mathbb{C}$ の領域 D に対して，以下の条件は同値である：

(1) D は単連結．

(2) D の任意の閉曲線は定値曲線とホモトピー同値．

(3) 閉集合 $\widehat{\mathbb{C}}\backslash D$ は連結（この条件をみたす領域を穴のない領域と言う）．

さらに，*(1)–(3)* より以下が従う：

(4) D の任意の閉曲線は 0 にホモローグである．

Proof. ここでは (1) と (2) の同値性と (3)⇒(4) を示す．
(1)⟹(2)　$z:I=[0,1]\to D$ を勝手な閉曲線 γ とし，$z(0)=z(1)=p\in D$ とする．$c_p:I\to p$ を定値曲線とする．(1) から γ と c_p のホモトピー $\varphi:I\times I\to D$ が存在する：

$$\varphi(0,t)=z(t),\quad \varphi(1,t)=c_p(t)=p,\quad \varphi(s,0)=\varphi(s,1)=p\quad \forall s,t\in I. \tag{4.59}$$

φ は γ と定値曲線のホモトピーなので，(2) が成り立つ．
(2)⟹(1)　始点 A と終点 B を持つ D の曲線 γ_0（z_0 の像）と γ_1（z_1 の像）が与えられたとき，正方形 $I\times I$ の境界 $\partial(I\times I)$ から D への写像 $\widetilde{z}:\partial(I\times I)\to D$（その像である閉曲線を $\widetilde{\gamma}$ とする）を次のように定めることができる．
辺 $\{0\}\times I$ 上で $\widetilde{\gamma}$ は γ_0 に一致し，辺 $\{1\}\times I$ 上で $\widetilde{\gamma}$ は γ_1 に一致する．また，辺 $I\times\{0\}$ 上で $\widetilde{\gamma}$ は A に値を取る定値曲線 $c_A:I\to A$ に一致し，辺 $I\times\{1\}$ 上で $\widetilde{\gamma}$ は B に値を取る定値曲線 $c_B:I\to B$ に一致する．すなわち，$\widetilde{z}:[0,4]\to D$ を次で与える：

$$\widetilde{\gamma}:\ \widetilde{z}(t)=\begin{cases} c_A(t)=A & (0\le t\le 1)\\ z_1(t-1) & (1\le t\le 2)\\ c_B(3-t)=B & (2\le t\le 3)\\ z_0(4-t) & (3\le t\le 4)\end{cases} \tag{4.60}$$

(2) より $\widetilde{\gamma}$ とある定値曲線 $c_p:I\to p$, $p\in D$ のホモトピーが存在する．すなわち，次の連続写像が存在する：

$$\varphi(s,\theta):I\times\partial(I\times I)\to D,\qquad \varphi(1,\theta)=\widetilde{z}(\theta),\quad \varphi(0,\theta)=p\quad \forall\theta\in\partial(I\times I). \tag{4.61}$$

正方形 $I^2=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\,0\le x,y\le 1\big\}$ の中心を $q=(1/2,1/2)$ とする．このとき，$I^2\backslash\{q\}$ は中心 q 一辺 $s\,(0<s\le 1)$ の正方形 $(1-s)q+s\cdot\partial(I\times I)$ の非交和に分解する．（正方形を用いた極座標の類似である．極座標における円周の役割を正方形の境界に置き換えている．）

$$I^2\backslash\{q\} = \bigcup_{0<s\leq 1} \left((1-s)q + s\cdot\partial(I\times I)\right). \tag{4.62}$$

中心が同じで一辺の長さが異なる正方形の境界は交わらないので, $s \neq s'$ ならば

$$\{(1-s)q + s\cdot\partial(I\times I)\} \cap \{(1-s')\,q + s'\cdot\partial(I\times I)\} = \emptyset. \tag{4.63}$$

従って，$I^2\backslash\{q\}$ から D への連続写像 $F : I^2\backslash\{q\} \to D$ を次式で定義することができる：

$$F((1-s)q + s\widetilde{z}(\theta)) = \varphi(s,\theta). \tag{4.64}$$

F が I^2 から D への連続写像に拡張することを示す. そのために，$\varepsilon > 0$ を任意に与える．φ は I^2 から D への連続写像なので，I^2 が有界閉集合であることから，I^2 から D への一様連続写像である．従って，$\delta > 0$ が存在して次が成り立つ：

$$|\varphi(s,\theta) - \varphi(0,\theta)| < \varepsilon \qquad \forall s \in [0,\delta),\ \forall\theta \in \partial(I\times I). \tag{4.65}$$

$(x,y) \in I^2\backslash\{q\}$ が $\|(x,y)-q\| < \delta/2$ をみたすとき，$(x,y) = (1-s)q + s\widetilde{z}(\theta)$ と表せば，

$$\delta/2 > \|(x,y)-q\| = s\|\widetilde{z}(\theta) - q\| \geq s\cdot\operatorname{dist}\left(\partial(I\times I), q\right) = s/2. \tag{4.66}$$

ここで，$\operatorname{dist}\left(\partial(I\times I), q\right)$ は $\partial(I\times I)$ の点と q との距離の最小値であり，当然 $1/2$ である．以上から，$0 < s < \delta$ である．(4.64), (4.65) より，$\|(x,y)-q\| < \delta/2$ のとき，

$$|F(x,y) - p| = |F((1-s)q + s\widetilde{z}(\theta)) - p| = |\varphi(s,\theta) - \varphi(0,\theta)| < \varepsilon. \tag{4.67}$$

以上から，$F(q) = p$ と定義すれば，F は I^2 から D への連続写像に拡張される．$\widetilde{\gamma}$ の定義から，F は γ_0 と γ_1 のホモトピーである．

(3)$\Longrightarrow$(4)　$\widehat{\mathbb{C}}\backslash D$ は連結で，$\gamma \subset D$ であるから $\widehat{\mathbb{C}}\backslash D$ は $\widehat{\mathbb{C}}\backslash\gamma$ のただ一つの連結成分 Ω_0 に含まれる．円盤 B を十分大きくとり $\gamma \subset B$ とすれば，$a \in \Omega_0\backslash B$ に対して $n(\gamma, a) = 0$．また，Ω_0 の任意の点を b としたとき，$n(\gamma, b) = n(\gamma, a) = 0$．$\mathbb{C}\backslash D \subset \Omega_0$ であるから $\gamma \sim 0 \,(\mathrm{mod}\, D)$ を得る．□

例 4.23. D が $\mathbb{C}$ の凸領域ならば，D は単連結である．特に，全平面 $\mathbb{C}$，上半平面 $\{z \in \mathbb{C};\, \operatorname{Im} z > 0\}$，円盤 $B(c,r)$ は単連結である．

Proof.　γ_0 と γ_1 を写像 $z_0(t)$ と $z_1(t)$ で与えられる，始点と終点の等しい D の曲線とする．このとき，D が凸であることから $z_0(t)$ と $z_1(t)$ を両端とする線分は D に含まれるので，$\varphi(s,t) = (1-s)z_0(t) + sz_1(t)$, $s,t \in [0,1]$ は D における γ_0 と γ_1 のホモトピーを与える．□

命題 4.24. D と Ω を $\mathbb{C}$ の同相な領域とする．このとき，D が単連結ならば，Ω も単連結である．

Proof. $\psi : \Omega \to D$ を同相写像とする．すなわち，ψ は連続な全単射で，$\psi^{-1} : D \to \Omega$ も連続である．γ_0, γ_1 を同一の始点 A と終点 B を持つ Ω の曲線とする．このとき，$\psi \circ \gamma_0$ と $\psi \circ \gamma_1$ は同一の始点 $\psi(A)$ と終点 $\psi(B)$ を持つ D の曲線である．仮定より D は単連結なので，$\psi \circ \gamma_0$ と $\psi \circ \gamma_1$ のホモトピー $\varphi : I^2 \to D$ が存在する:

$$\varphi(0,t) = \psi \circ z_0(t), \quad \varphi(1,t) = \psi \circ z_1(t), \quad \varphi(s,0) = \psi(A), \quad \varphi(s,1) = \psi(B) \quad \forall s,t \in I. \tag{4.68}$$

このとき，連続写像 $\psi^{-1} \circ \varphi : I^2 \to \Omega$ は任意の $s,t \in I$ に対して

$$\left(\psi^{-1} \circ \varphi\right)(0,t) = z_0(t), \quad \left(\psi^{-1} \circ \varphi\right)(1,t) = z_1(t), \quad \left(\psi^{-1} \circ \varphi\right)(s,0) = A, \quad \left(\psi^{-1} \circ \varphi\right)(s,1) = B \tag{4.69}$$

をみたすので，γ_0 と γ_1 のホモトピーである．以上から，始点と終点の一致する Ω の任意の曲線はホモトピー同値なので，Ω は単連結である． □

例 4.25. $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$ と $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0}$ は単連結である. これは，$\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$ と $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0}$ が半平面に位相同型であることから従う．
$\mathbb{C}\backslash\{0\}$ は単連結ではない．直感的には $\mathbb{C}$ の単位円周を $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ の中で連続的に *1* 点に潰せないことから明かである．

4.3 Cauchy の積分定理

定理 4.26 (Cauchy の定理)**.** $f(z)$ は領域 D で正則とし，γ は D 内の長さ有限な閉曲線で $\gamma \sim 0 \pmod{D}$ なるものとする．このとき，

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0. \tag{4.70}$$

とくに，定理 *4.22* より，D が単連結領域ならば，(4.70) は任意の閉曲線 γ に対して成り立つ．

Proof. 証明の概要のみ述べる．詳細は [**?**, **?**] などを参照できる．また，定理 4.22 により，仮定を変えて，様々な方法で証明することができる．

1. まず，γ を実軸と虚軸に平行な辺しかもたない折線で置き換えることができることを示す．すなわち，そのような D 内の折線 σ が存在して，$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\sigma f(z)\,dz$ が成り立つ．よって，Cauchy の定理をこのような折線 σ で $\sigma \sim 0 \,(\mathrm{mod}\, D)$ なるものに対して示せばよい．

2. σ の各頂点から実軸および虚軸に平行な線をひくと，それらは $\mathbb{C}$ を長方形に分割する．そのうち，有界な長方形を $R_j, j = 1, \ldots, J$ として，

$$\sigma_0 = \sum_{j=1}^{J} n(\sigma, a_j)\partial R_j \tag{4.71}$$

   というサイクルを構成する（∂R_j の向きを揃える）．ただし，$a_j \in R_j$ は任意の点である．

3. $\sigma - \sigma_0$ の共有辺を考えることで，σ_0 はサイクルとして σ_0 と同一であることを示す．

4. さらに，R_j はすべて D に含まれることから，

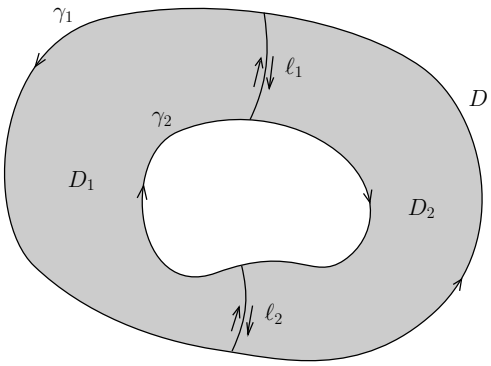
$$\int_\sigma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{J} n(\sigma, a_j) \int_{\partial R_j} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{J} n(\sigma, a_j) \cdot 0 = 0. \tag{4.72}$$

□

例 4.27. 単一閉曲線 γ_1 とその内部 $(\gamma_1)^i$ に含まれる単一閉曲線 γ_2 によって囲まれた領域を D とし，$f(z)$ は境界 γ_1, γ_2 までこめて D で正則な関数であるとする．すなわち，$f(z)$ は $\overline{D} = D \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ のすべての点の近傍で正則であるとする．$\gamma_j, j = 1, 2$ 上を点がそれぞれ内部を左側にみながら動く方向を γ_j につける．このとき，$\gamma_1 + \gamma_2 \sim 0 \,(\mathrm{mod}\, D)$ である（$\gamma_1 + \gamma_2$ をサイクルとして考えている）．実は，*Cauchy* の定理 *4.26* はサイクルに対しても成り立つので，ここから

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = -\int_{\gamma_2} f(z)\,dz \tag{4.73}$$

であることがわかる．



しかし，これを定理 *4.17* を用いても示すことができる．図のように，γ_1 の点と γ_2 の点を D 内で結ぶ *2* つの単一曲線（横断線）ℓ_1, ℓ_2 によって D を *2* つの領域 D_1, D_2 に分ける．仮定より，$f(z)$ は γ_1, γ_2 を内部に含むある領域 $D' \supset D$ で正則である．また，$\partial D_1, \partial D_2$ は単一閉曲線で，それぞれ内部と共に D' に含まれるから，定理 *4.17* より

$$\int_{\partial D_j} f(z)\,dz = 0, \qquad j = 1, 2. \tag{4.74}$$

積分は D_j を左に見る方向に行うため，$\ell_j, j = 1, 2$ 上の部分は互いに逆向きであるから打ち消し合う．よって，

$$0 = \int_{\partial D_1} f(z)\,dz + \int_{\partial D_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz. \tag{4.75}$$

すなわち，(4.73) が従う．

例 4.28 (正弦積分)． *Cauchy* の積分定理を用いて，以下の等式を示す：

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{4.76}$$

$0 < r < R$ に対して，半円 $C_R : z_R(\theta) = Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi$ と $C_r : z_r(\theta) = re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi$ を実軸の線分でつないだ閉曲線を C とする．C の内部において $f(z) = e^{iz}/z$ は正則なので，*Cauchy* 積分定理より，

$$0 = \int_C \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_r^R \frac{e^{iz}}{z}\,dz. \tag{4.77}$$

C_R 上の積分については，$z = Re^{i\theta}$ とおけば，

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| \le \int_0^\pi \left|e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}\right| d\theta = \int_0^\pi e^{-R\sin\theta}\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\,d\theta. \tag{4.78}$$

ここで不等式 $\sin\theta > \frac{2}{\pi}\theta,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を用いれば，$R \to +\infty$ のとき，

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| < 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}R\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{R}\left(1 - e^{-R}\right) \to 0. \tag{4.79}$$

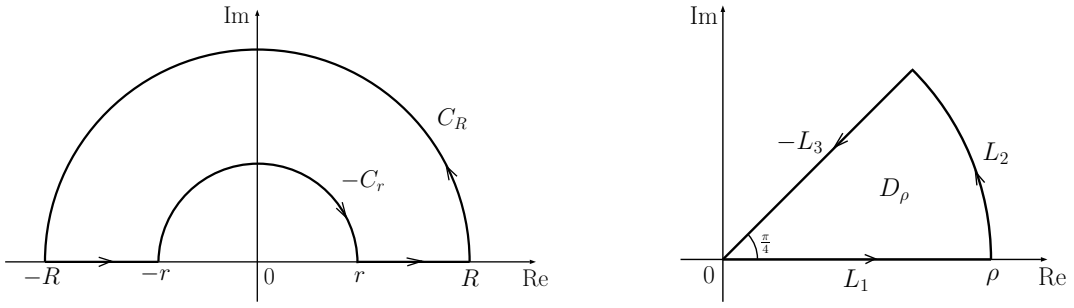
C_r 上の積分については，$z = re^{i\theta}$ とおけば，$r \to +0$ のとき，

$$\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = i\int_0^\pi e^{ire^{i\theta}}\,d\theta \to \pi i. \tag{4.80}$$

また，

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_r^R \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\,dx = 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{4.81}$$

(4.77)–(4.81) より主張が従う．



例 4.28 の積分経路と例 4.29 の積分経路.

例 4.29 (Fresnel 積分)**.** *Cauchy* 積分定理を用いて，以下の等式を示す：

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}. \tag{4.82}$$

$z = x + iy$ とすれば，

$$e^{-z^2}\,dz = e^{-x^2+y^2}\{\cos(2xy)\,dx + \sin(2xy)\,dy\} + ie^{-x^2+y^2}\{-\sin(2xy)\,dx + \cos(2xy)\,dy\}. \tag{4.83}$$

$\rho > 0$ を正の数とし，$\mathbb{C}$ の曲線 $L_1(\rho), L_2(\rho), L_3(\rho)$ を以下の式で定める：

$$L_1 = \{t \in \mathbb{R};\ 0 \le t \le \rho\}, \quad L_2 = \left\{\rho e^{i\theta} \in \mathbb{C};\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right\}, \quad L_3 = \left\{s + is \in \mathbb{C};\ 0 \le s \le \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right\}. \tag{4.84}$$

$\mathbb{C}$ の単純閉曲線 C_ρ を $C_\rho = L_1 + L_2 - L_3$ とし，C_ρ によって囲まれる $\mathbb{C}$ の扇型の領域を D_ρ とする：

$$D_\rho = \left\{z = x + iy \in \mathbb{C};\ y > 0,\ 0 < y < x,\ x^2 + y^2 < \rho^2\right\}. \tag{4.85}$$

(Step 1) L_2 上の線積分を評価する：

$$\begin{aligned}
\int_{L_2} e^{-z^2}\,dz &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\rho^2\left(-\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}\left\{\cos\left(2\rho^2\cos\theta\sin\theta\right)(-\rho\sin\theta) + \sin\left(2\rho^2\cos\theta\sin\theta\right)(\rho\cos\theta)\right\}\,d\theta \\
&\quad + i\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\rho^2\left(-\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}\left\{-\sin\left(2\rho^2\cos\theta\sin\theta\right)(-\rho\sin\theta) + \cos\left(2\rho^2\cos\theta\sin\theta\right)(\rho\cos\theta)\right\}\,d\theta \\
&= \rho\int_0^{\pi/4} e^{-\rho^2\cos 2\theta}\left\{-\cos\left(\rho^2\sin 2\theta\right)\sin\theta + \sin\left(\rho^2\sin 2\theta\right)\cos\theta\right\}\,d\theta \\
&\quad + i\rho\int_0^{\pi/4} e^{-\rho^2\cos 2\theta}\left\{\sin\left(\rho^2\sin 2\theta\right)\sin\theta + \cos\left(\rho^2\sin 2\theta\right)\cos\theta\right\}\,d\theta.
\end{aligned} \tag{4.86}$$

従って，

$$\left|\int_{L_2} e^{-z^2}\,dz\right| \le 4\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\rho^2\cos 2\theta}\,d\theta = 2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2\cos\theta}\,d\theta = 2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2\sin\theta}\,d\theta. \tag{4.87}$$

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta \ge \frac{2}{\pi}\theta$ となる．従って，

$$\left|\int_{L_2} e^{-z^2}\,dz\right| \le 2\rho\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi}\rho^2\theta}\,d\theta = 2\rho\frac{1 - e^{-\frac{2}{\pi}\rho^2(\pi/2)}}{\rho^2} \le \frac{2}{\rho}. \tag{4.88}$$

(Step 2) L_1 と L_3 上の線積分を計算する．線積分の定義から，

$$\int_{L_1} e^{-z^2}\,dz = \int_0^\rho e^{-x^2}\,dx. \tag{4.89}$$

$$\int_{-L_3} e^{-z^2}\,dz = -\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt{2}}} e^{-t^2+t^2}\left\{\cos\left(2t^2\right)+\sin\left(2t^2\right)\right\}\,dt + i\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt{2}}} e^{-t^2+t^2}\left\{-\sin\left(2t^2\right)+\cos\left(2t^2\right)\right\}\,dt$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\rho}\left\{\cos\left(t^2\right)+\sin\left(t^2\right)\right\}\,dt + \frac{i}{\sqrt{2}}\int_0^{\rho}\left\{\cos\left(t^2\right)-\sin\left(t^2\right)\right\}\,dt. \tag{4.90}$$

(Step 3) Cauchy 積分定理から

$$\int_{\partial D_\rho} e^{-z^2}\,dz = \int_{L_1} e^{-z^2}\,dz + \int_{L_2} e^{-z^2}\,dz + \int_{-L_3} e^{-z^2}\,dz = 0. \tag{4.91}$$

この式に (4.88), (4.89), (4.90) を代入すれば,

$$0 = \int_{L_1} e^{-z^2}\,dz + \int_{L_2} e^{-z^2}\,dz + \int_{-L_3} e^{-z^2}\,dz \tag{4.92}$$
$$= \int_0^{\rho} e^{-x^2}\,dx + O\left(\rho^{-1}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\rho}\left\{\cos\left(t^2\right)+\sin\left(t^2\right)\right\}\,dt + \frac{i}{\sqrt{2}}\int_0^{\rho}\left\{\cos\left(t^2\right)-\sin\left(t^2\right)\right\}\,dt.$$

ここで $\rho \to +\infty$ の極限を取れば,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\infty}\left\{\cos\left(t^2\right)+\sin\left(t^2\right)\right\}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \int_0^{\infty}\left\{\cos\left(t^2\right)-\sin\left(t^2\right)\right\}\,dt = 0. \tag{4.93}$$

これより,

$$\int_0^{\infty}\sin x^2\,dx = \int_0^{\infty}\cos x^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}. \tag{4.94}$$

4.4 Cauchy の積分公式と正則関数の基本的性質

定理 4.30 (平均値定理)．$f(z)$ が $\overline{B(c,r)}$ で正則ならば，

$$f(c) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(c + re^{i\theta}\right)\, d\theta. \tag{4.95}$$

Proof. $\partial B(c,\rho) = \left\{c + \rho e^{i\theta}; 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$ と表示される．$\mu(\rho)$, $0 \le \rho \le r$ を次式で定める：

$$\mu(\rho) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(c + \rho e^{i\theta}\right)\, d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(c,\rho)} \frac{f(z)}{z-c}\, dz. \tag{4.96}$$

$0 < \varepsilon < \rho \le r$ に対して，$\frac{f(z)}{z-c}$ は $\overline{B(c,\rho)\backslash B(c,\varepsilon)}$ で正則であるから，Cauchy の積分定理より（例 4.27 も参照）

$$\mu(\rho) - \mu(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(c,\rho)} \frac{f(z)}{z-c}\, dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(c,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-c}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial(B(c,\rho)\backslash B(c,\varepsilon))} \frac{f(z)}{z-c}\, dz = 0. \tag{4.97}$$

従って，$\mu(\rho)$ は $(0,r]$ 上の定数関数である．$f(z)$ は点 $c \in \mathbb{C}$ において微分可能なので，定数 $C > 0$ が存在して，$B(c,r)$ 上で次の評価が成り立つ：

$$\left|\frac{f(c+h) - f(c)}{h} - f'(c)\right| \le C. \tag{4.98}$$

これより，定数 $C' > 0$ が存在して，$|f(c+h) - f(c)| \le C'|h|, h \in B(0,r)$．従って，

$$|\mu(\rho) - f(c)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(c + \rho e^{i\theta}\right) - f(c)\right| d\theta \le C'\rho \tag{4.99}$$

となり，$\lim_{\rho \to 0+} \mu(\rho) = f(c)$．$\mu(\rho)$ は $(0,r]$ 上で定数なので，$\mu(r) = f(c)$． □

注：「$f(z)$ が $\overline{B(c,r)}$ で正則」というのは，領域 D があって，$\overline{B(c,r)} \subset D$ かつ $f(z)$ が D で正則という意味なので，r より少し大きい $r' > r$ があって，$\overline{B(c,r')} \subset D$ かつ $f(z)$ が $B(c,r')$ で正則とできる．よって，上の議論で r を r' で置き換えることができて，$\mu(\rho)$ が $\rho \in (0,r')$ で定数関数であることが示される．

定理 4.31 (最大値原理)．D を $\mathbb{C}$ の領域とし，$f(z)$ を D で正則とする．$f(z)$ が定数でないならば，実数値関数 $|f(z)|$ は D において最大値を取らない．

Proof. **(Step 1)** $c \in D$ において関数 $|f(z)|$ が最大値 M を取ると仮定する:

$$|f(c)| = \max_{z \in D} |f(z)| = M. \tag{4.100}$$

$\overline{B(c,r)} \subset D$ ならば，平均値定理から，

$$f(c) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(c + re^{i\theta}\right)\, d\theta. \tag{4.101}$$

従って, (4.100) より,

$$M = |f(c)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(c + re^{i\theta}\right)\right| d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max_{z\in D}|f(z)|\, d\theta = M. \tag{4.102}$$

(4.102) において全ての不等号は等号でなければならない．$|f(z)|$ は D 上の連続関数なので, (4.102) で等号が成り立つための必要十分条件は，

$$\left|f\left(c + re^{i\theta}\right)\right| = M \qquad \forall\theta \in [0, 2\pi]. \tag{4.103}$$

$\rho < r$ ならば, $\overline{B(c,\rho)} \subset D$ であるから，この議論により

$$|f(z)| = M \qquad \forall z \in B(c, r). \tag{4.104}$$

(Step 2) D の部分集合 V を

$$V := \{z \in D;\ |f(z)| = M\} \tag{4.105}$$

で定めれば，(4.104) より V は開集合である．一方，$|f(z)|$ は D 上の連続関数なので，

$$W = \{z \in D;\ |f(z)| < M\} \tag{4.106}$$

は D に含まれる開集合であり，$D = V \cup W$ である．D は連結なので，$V = \emptyset$ または $W = \emptyset$ であるが，仮定より $c \in V$ なので，$V \neq \emptyset$ である．従って，$W = \emptyset$ であり，$D = V$ が成り立つ．以上から，D 上で $|f(z)| = M$ が成り立つ.
(Step 3) $M = 0$ のとき $f(z) = 0$ が D 上で成立するので，$f(z)$ は定数である．$M > 0$ とする．$f = u + iv$ と書けば，$u^2 + v^2 = |f|^2 = M^2$ は D 上の定数関数なので，

$$uu_x + vv_x = \frac{1}{2}\partial_x\left(u^2 + v^2\right) = 0, \qquad uu_y + vv_y = \frac{1}{2}\partial_y\left(u^2 + v^2\right) = 0. \tag{4.107}$$

Cauchy-Riemann の関係式より，$u_x = v_y, u_y = -v_x$ なので，

$$uu_x + vv_x = 0, \qquad vu_x - uv_x = 0. \tag{4.108}$$

すなわち,

$$\begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.109}$$

ここで,

$$\det\begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix} = -\left(u^2 + v^2\right) = -M^2 < 0 \tag{4.110}$$

であるから，$u_x = v_x = 0$ が D 上で成り立つ．この関係式と Cauchy-Riemann の関係式より，$u_y = v_y = 0$ が D 上で成り立つので，$u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ が D 上で成り立 つ．従って，u, v は D 上の定数関数であり，特に $f = u + iv$ も D 上の定数関数. □

系 4.32. $D \subset \mathbb{C}$ を有界領域とする．D で正則な $f \in C^0(\overline{D})$ に対して，$|f|$ は ∂D において最大値を取る．

Proof. $f(z)$ が定数のとき主張は明らかなので，$f(z)$ が定数でない場合に主張を示す．$\overline{D}$ は $\mathbb{C}$ の有界閉集合なので，$\overline{D}$ 上の連続関数 $|f(z)|$ は $\overline{D}$ の点 c において最大値を取る．$c \in D$ とすれば，最大値原理から $f(z)$ は D 上で定数であるが，これは $f(z)$ が定数でないという仮定に矛盾する．従って，$c \in \partial D = \overline{D} \backslash D$ である． □

定理 4.33 (Cauchy の積分公式)**.** $\mathbb{C}$ の領域 D は単一閉曲線から成る境界を持つとする．$\overline{D}$ で正則な $f(z)$ に対して，次式が成り立つ：

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-w}\, dz. \tag{4.111}$$

$\mathbb{C}$ の有界開集合 D は有限個の単一閉曲線から成る境界を持つ場合もこの式が成立する．

Proof. $\varepsilon > 0$ を十分小さく取り，$\overline{B(w,\varepsilon)} \subset D$ となるようにする．曲線 γ を $z(\theta) := w + \varepsilon e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ で定める．平均値定理より，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(w,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-w}\, dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(w+\varepsilon e^{i\theta}\right)}{\left(w+\varepsilon e^{i\theta}\right)-w}\, d\left(w+\varepsilon e^{i\theta}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(w+\varepsilon e^{i\theta}\right) d\theta = f(w). \end{aligned} \tag{4.112}$$

$\frac{f(z)}{z-w}$ の $\overline{D \backslash B(w,\varepsilon)}$ における正則性より，

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(D\backslash B(w,\varepsilon))} \frac{f(z)}{z-w}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-w}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(w,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-w}\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-w}\, dz - f(w). \end{aligned} \tag{4.113}$$

ここで，最後の等式は (4.112) から従う． □

領域 $D \subset \mathbb{C}$ と $c \in D$ に対して，$0 < r(c) \leq +\infty$ を次式で定義する：

$$r(c) := \sup\left\{ r \in \mathbb{R}_{>0};\ B(c,r) \subset D \right\}. \tag{4.114}$$

$r(c) = +\infty$ は，$D = \mathbb{C}$ を意味する．

定理 4.34 (正則関数の冪級数展開)**.** $f(z)$ を領域 D で正則とする．任意の $c \in D$ に対し，$f(z)$ は $B(c, r(c))$ で広義一様に絶対収束する整級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \tag{4.115}$$

に展開され，展開係数 a_n は次式で与えられる：

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(c,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \forall r \in (0, r(c)). \tag{4.116}$$

Proof. **(Step 1)** $z \in B(c, r(c))$ を任意の点とする．$|z-c| < r < r(c)$ となる $r > 0$ を選ぶ．f は $\overline{B(c,r)}$ で正則なので，Cauchy の積分公式より，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(c,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \forall z \in B(c, r). \tag{4.117}$$

この等式の右辺で，$|z-c| < r = |\zeta - c|$ であるから，円周 $\partial B(c,r)$ 上で

$$\frac{|z-c|}{|\zeta - c|} < 1. \tag{4.118}$$

従って，$\partial B(c,r)$ 上で次式が成り立つ：

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c) - (z - c)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-c}{\zeta - c}} \\ &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-c}{\zeta - c} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} (z-c)^n. \end{aligned} \tag{4.119}$$

(Step 2) 最後の式が $\partial B(c,r)$ 上で一様に絶対収束することを示す．実際，$f(\zeta)$ は $\partial B(c,r)$ 上の連続関数なので，$|f(\zeta)|$ は $\partial B(c,r)$ 上で最大値 M_r を持つ：$M_r = \max_{\zeta \in \partial B(c,r)} |f(\zeta)|$．このとき，任意の $\zeta \in \partial B(c,r)$ に対して，条件 $|z-c| < r$ より，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\zeta \in \partial B(c,r)} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} (z-c)^n \right| \leq M_r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z-c|^n}{r^{n+1}} = \frac{M_r}{r - |z-c|}. \tag{4.120}$$

(4.120) より，$\partial B(c,r)$ 上の（変数 ζ に関する）関数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}} (z-c)^n$ は収束する優級数を持つので，Weierstrass の M-判定法から $\partial B(c,r)$ 上で一様に絶対収束する．

(Step 3) 連続関数の級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}} (z-c)^n$ が $\partial B(c,r)$ 上で一様収束することから，(4.119) の両辺を $\partial B(c,r)$ 上で積分するとき，積分と無限和の順序交換が可能である：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(c,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(c,r)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} (z-c)^n\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-c)^n \int_{\partial B(c,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n. \end{aligned} \tag{4.121}$$

ただし，a_n は次式で定まる数である：

$$a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(c,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}\,d\zeta. \tag{4.122}$$

ここで

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B(c,r)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-c|^{n+1}}\,|d\zeta| \le \frac{1}{2\pi}\frac{M_r}{r^{n+1}}2\pi r = \frac{M_r}{r^n} \tag{4.123}$$

なので，Cauchy-Hadamard の定理より，整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は $B(c,r)$ 上で広義一様に絶対収束する．(4.117), (4.121) から $f(z)$ は $B(c,r)$ 上で次の整級数として表される：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \qquad \forall z \in B(c,r). \tag{4.124}$$

r は $r(c)$ に任意に近く選べるので，(4.124) の右辺は $B(c,r(c))$ で広義一様に絶対収束する．
(Step 4) $f(z)$ は $B(c,r(c))$ において整級数として表されるので，系 3.3 より何回でも複素微分可能であり，$a_n = f^{(n)}(c)/n!$ である．上の a_n の表示と比較して，

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!} = a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(c,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta. \tag{4.125}$$

以上から，主張が示された. □

定理 4.34 の証明中で示された不等式

$$|a_n| = \frac{\left|f^{(n)}(c)\right|}{n!} \le \frac{M_r}{r^n}, \qquad M_r = \max_{\zeta\in\partial B(c,r)} |f(\zeta)| \tag{4.126}$$

を **Cauchy の評価式**と言う.

系 4.35. 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の複素値関数 $f(z)$ に対し，以下は同値：

(1) $f(z)$ は D で正則である．

(2) D の任意の点 c に対して，正数 $\varepsilon > 0$ が存在して，$B(c,\varepsilon) \subset D$ かつ $f(z)$ は $B(c,\varepsilon)$ 上で一様に絶対収束する整級数に展開される．

Proof. (1)$\Longrightarrow$(2) は定理 4.34 から，(2)$\Longrightarrow$(1) は Cauchy-Hadamard の定理から従う． □

系 4.36. $D \subset \mathbb{C}$ を領域とし，$f(z)$ を D で正則とする．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(z)$ は D 上で n 階複素微分可能であり，$f^{(n)}(z)$ は D で正則である．

Proof. 定理 4.34 より，任意の $c \in D$ に対して，$f(z)$ は c を中心とする収束整級数に展開される．従って，主張は系 3.3 から従う． □

定理 4.37. $D \subset \mathbb{C}$ を区分的 C^1 級境界を持つ有界領域とし，$f(z)$ を $\overline{D}$ で正則とする．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $z \in D$ に対して，次の等式が成り立つ：

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{4.127}$$

Proof. $\varepsilon > 0$ を十分小さく選び，$\overline{B(z,\varepsilon)} \subset D$ とする．このとき，ζ の関数 $f(\zeta)/(\zeta - z)^{n+1}$ は $\overline{D} \backslash B(z,\varepsilon)$ 上で正則であるから，Cauchy の積分定理と定理 4.34 の a_n の式より，

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\left(D \backslash \overline{B(z,\varepsilon)}\right)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta - \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \\ &= \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta - \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z). \end{aligned} \tag{4.128}$$

以上から，主張が従う． □

定理 4.38 (Morera の定理)．$D \subset \mathbb{C}$ を領域とし，$f(z) \in C^0(D)$ とする．D に含まれる任意の区分的 C^1 級閉曲線 γ に対して

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \tag{4.129}$$

が成り立つならば，$f(z)$ は D で正則である．

Proof. **(Step 1)** $p \in D$ を固定する．任意の $z \in D$ に対して，p と z を結ぶ区分的 C^1 級曲線 $\gamma : z(t)$ を $z(0) = p, z(1) = z$ となるように選び，$F(z)$ を以下の式で定める：

$$F(z) := \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta. \tag{4.130}$$

このとき，$F(z)$ は p と z を結ぶ γ の選び方に依らない．実際，δ を γ とは異なる p と z を結ぶ区分的 C^1 級曲線とすれば，p を始点と終点とする閉曲線 Γ を，$\Gamma = \gamma - \delta$ により定義できるので，仮定より

$$0 = \int_\Gamma f(\zeta)d\zeta = \int_\gamma f(\zeta)d\zeta - \int_\delta f(\zeta)d\zeta \tag{4.131}$$

となり，$F(z)$ は γ の選び方に依らない．

(Step 2) $z \in D$ を任意に選ぶ．$h \in \mathbb{C}$ を十分小さく選び，$B(z,h) \subset D$ となるようにする．このとき，p と z を結ぶ曲線 γ と z と $z+h$ を結ぶ直線 $c : \ell(t) = z + th,\ 0 \le t \le 1$ の合成は p と $z+h$ を結ぶ D の区分的 C^1 級曲線なので，

$$F(z+h) - F(z) = \int_c f(\zeta)\,d\zeta = \int_0^1 f(\ell(t))\ell'(t)\,dt = h\int_0^1 f(z+th)\,dt. \tag{4.132}$$

$f(z)$ の連続性から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$|f(z+w) - f(z)| < \varepsilon$ が任意の $|w| < \delta$ に対して成り立つ．従って，$|h| < \delta$ ならば，

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\int_0^1 \{f(z+th) - f(z)\}\,dt\right| \le \int_0^1 |f(z+th) - f(z)|\,dt < \varepsilon. \tag{4.133}$$

これより F は z において複素微分可能であり，$F'(z) = f(z)$．$z \in D$ は任意なので，F は D 上で複素微分可能である．$f \in C^0(D)$ なので，$F' = f$ より $F \in C^1(D)$ であり，従って F は D で正則である．系 4.36 より $f = F'$ は D 上で正則である． □

定理 4.39 (一致の定理)．$D \subset \mathbb{C}$ を領域，$a \in D$，$f(z), g(z)$ を D で正則とする．D の部分集合 Z は D 内に集積点を持つとする．

(1) $f(a) = g(a)$ かつ $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)\ \forall n \in \mathbb{N}$ ならば，D 上で $f(z) = g(z)$.

(2) Z 上で $f(z) = g(z)$ ならば，D 上で $f(z) = g(z)$.

Proof. (1), (2) を $g(z) = 0$ の場合に示せば良い．以下，$g(z) = 0$ とする．

(1) D の部分集合 V を以下のように定めるとき，$D = V$ を示せばよい：

$$V := \left\{ p \in D;\ f(p) = 0, f^{(n)}(p) = 0\ \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{4.134}$$

$p \in V$ とする．$f(z)$ は D で正則なので，定理 4.34 より $f(z)$ は p の近傍において絶対収束する整級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-p)^n$ に展開される．ここで $\alpha_n = f^{(n)}(p)/n!$. 仮定 $f^{(n)}(p) = g^{(n)}(p)$ と D 上で $g(z) \equiv 0$ より，$\alpha_n = 0$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ．従って，$f(z)$ は p のある近傍で恒等的に 0 になり，p のある近傍は V に含まれる．p は V の任意の点なので，V は開集合である．仮定より $a \in V$ であるから，$V \neq \emptyset$.
一方，関数 $f^{(n)}(z)$ の連続性より，D の部分集合 $Z_n = \left\{ z \in D;\ f^{(n)}(z) = 0 \right\}$ は閉集合である．$V = \bigcap_{n=0}^{\infty} Z_n$ と表されるので，V は D の閉部分集合である．以上から V は D の空でない開かつ閉集合．D が連結であることから，$V = D$.
別の証明として，次に $q \in D \backslash V$ とする．このとき $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で $f^{(n)}(q) \neq 0$ をみたすものがある．関数 $f^{(n)}(z)$ の連続性から q の近傍 U が取れて $z \in U$ に対して $f^{(n)}(z) \neq 0$. 従って $U \subset D \backslash V$. 以上から $D \backslash V$ は内点より成るので，$D \backslash V$ は開集合である．$D = V \cup (D \backslash V), V \cap (D \backslash V) = \emptyset$ と表示され，$V, D \backslash V$ は開集合なので，D の連結性から $V = \emptyset$ または $D \backslash V = \emptyset$ である．$V \neq \emptyset$ であったので，$D \backslash V = \emptyset$ であり，従って $V = D$ である．

(2) 集合 $Z = \{z \in D;\ f(z) = 0\}$ の集積点の一つを a とし，$f(z)$ の a における整級数展開を $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z-a)^k$ とする．(1) より全ての $k \geq 0$ に対して $\alpha_k = 0$ を示せば十分である．そこで，ある m に対して $\alpha_m \neq 0$ と仮定する．そのような最小の整数を n とする．このとき，$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k (z-a)^k$, $\alpha_n \neq 0$ と表されるので，収束整級数 $h(z)$ を $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n+k} (z-a)^k$ と定めれば，a の近傍で

$$f(z) = (z-a)^n h(z), \quad h(a) = \alpha_n \neq 0. \tag{4.135}$$

仮定から，Z の点列 $\{z_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset Z$ で，$z_\nu \neq a$ かつ $\lim_{\nu \to \infty} z_\nu = a$ となるものを選ぶことができる．このとき，$0 = f(z_\nu) = (z_\nu - a)^n h(z_\nu)$ より，$h(z_\nu) = 0$ が任意の $\nu \geq 0$ に対して成立する．従って，$h(z)$ の連続性から，$\alpha_n = h(a) = \lim_{\nu \to \infty} h(z_\nu) = 0$. これは $h(a) = \alpha_n \neq 0$ に矛盾する．従って，全ての $k \geq 0$ に対して $\alpha_k = 0$. □

全平面 $\mathbb{C}$ 上で正則な関数を**整関数**という．

定理 4.40 (Liouville)．有界な整関数は定数である．

Proof. $f(z)$ を有界な整関数とする．$f(z)$ は全平面上で定義されているので，定理 4.34 より $f(z)$ の $z=0$ における冪級数展開の収束半径は無限大である．特に，$\mathbb{C}$ 上で以下の冪級数展開が成り立つ：

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots . \tag{4.136}$$

ここで，定理 4.34 より係数 a_n は以下の式で与えられる：

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta. \tag{4.137}$$

ただし，$r>0$ は勝手な正数である．$f(z)$ は全平面上で有界なので，正数 $M>0$ が存在して，

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| < M. \tag{4.138}$$

従って，

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial B(r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta \right| \le \frac{M}{2\pi r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n}. \tag{4.139}$$

$r>0$ は任意なので，$r \to +\infty$ とすれば，$n>0$ のとき

$$|a_n| = \lim_{r\to+\infty} \frac{M}{r^n} = 0. \tag{4.140}$$

これは $a_n = 0$ が $n>0$ に対して成り立つことを意味する．すなわち，$f(z) = a_0$ となり，$f(z)$ は定数である． □

定理 4.41 (代数学の基本定理)．$f(z)$ が定数でない z の多項式ならば，$f(z)=0$ は $\mathbb{C}$ に根を持つ．

Proof. $f(z)=0$ が根を持たないと仮定して矛盾を導く．$f(z)=0$ を充たす $z\in\mathbb{C}$ が存在しないので，$1/f(z)$ は全平面上で正則である．さらに $1/f(z)$ は有界である．実際，

$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0 \tag{4.141}$$

とすれば,

$$|f(z)| \ge |a_n|\,|z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|\,|z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|a_n|\,|z|^n}\right). \tag{4.142}$$

$R>0$ が存在して，$|z|>R$ ならば

$$1 - \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|\,|z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|a_n|\,|z|^n} \ge \frac{1}{2} \tag{4.143}$$

となるので，$|z|>R$ のとき以下の評価が成り立つ：

$$\frac{1}{|f(z)|} \le \frac{2}{|a_n|\,|z|^n} \le \frac{2}{|a_n|\,R^n}. \tag{4.144}$$

$f(z)$ が零点を持たないことから $1/|f(z)|$ は $\overline{B(R)}$ 上の連続関数であり，$\overline{B(R)}$ が有界閉集合であることから $1/|f(z)|$ は $\overline{B(R)}$ 上で最大値を持つ：

$$\max_{z\in\overline{B(R)}} \frac{1}{|f(z)|} \leq M. \tag{4.145}$$

(4.144), (4.145) より，$1/f(z)$ は全平面上で有界である．Liouville の定理から，$1/f(z)$ は定数となるが，これは $f(z)$ が定数でない z の多項式と仮定したことに矛盾する．以上から，$f(z)=0$ は根を持つ．□

定理 4.42 (Schwarz の補題)．単位円盤 B において正則な $f(z)$ が

(i) $f(0)=0$,

(ii) 任意の $z\in B$ に対して，$|f(z)|\leq 1$

をみたすならば，任意の $z\in B$ に対して次式が成り立つ：

$$|f(z)|\leq|z|, \qquad |f'(0)|\leq 1. \tag{4.146}$$

さらに，$f(z)=cz$, $|c|=1$ の場合を除き，$B\backslash\{0\}$ 上で $|f(z)|<|z|$ かつ $|f'(0)|<1$ である．

Proof. $f(z)$ の原点における Taylor 展開は $f(z)=f(0)+f'(0)z+O\left(z^2\right)$ なので，$g(z)=f(z)/z$ とおけば，$g(z)$ は B で正則である．$0<r<1$ に対して，

$$M(r):=\begin{cases}\max\limits_{z\in\partial B(r)}|g(z)|, & 0<r<1\\ |g(0)|, & r=0.\end{cases} \tag{4.147}$$

と置けば，$g\in C^0(\overline{B(r)})$ より最大値原理から，

$$\max_{z\in\overline{B(r)}}|g(z)|=M(r) \qquad \forall r\in[0,1). \tag{4.148}$$

左辺は r の単調増加関数なので，$M(r), 0<r<1$ は単調増加関数である．一方，$f(z)$ の条件 (ii) より，任意の $z\in B$ に対して，

$$|g(z)|=\frac{|f(z)|}{|z|}\leq\frac{1}{|z|}. \tag{4.149}$$

従って，

$$M(r)=\max_{z\in\partial B(r)}|g(z)|\leq\max_{z\in\partial B(r)}\frac{1}{|z|}=\frac{1}{r}. \tag{4.150}$$

$r\to 1-$ とすれば，$M(r)$ の単調増加性より，

$$M(r)\leq\lim_{\rho\to 1-}M(\rho)\leq\lim_{\rho\to 1-}\frac{1}{\rho}=1 \qquad \forall r\in[0,1). \tag{4.151}$$

従って，任意の $z\in B$ に対し，$|f(z)|\leq|z|$．また $g(z)$ の定義から $g(0)=f'(0)$ なので，$|f'(0)|=|g(0)|=M(0)\leq 1$.

次に, 定理の不等式において, B のある点で等号が成立する場合を考える．すなわち，ある $z_0 \in B\backslash\{0\}$ に対して $|f(z_0)| = |z_0|$ または $|f'(0)| = 1$ と仮定する．後者の場合 $z_0 = 0$ と理解することにすれば, ある $z_0 \in B$ に対して $|g(z_0)| = 1$ である．一方, (4.148), (4.151) より B 上で $|g| \leq 1$ なので, $|g(z)|$ は B の内点 z_0 において最大値を取る．最大値原理から，$g(z)$ は定数 c であり，$|g(z_0)| = 1$ より，$|c| = 1$ である．$g(z) = f(z)/z$ なので，このとき $f(z) = cz$, $|c| = 1$ である．対偶を取れば, $f(z) \neq cz$, $|c| = 1$ のとき，$B\backslash\{0\}$ 上で $|f(z)| < |z|$ が成り立ち，さらに $|f'(0)| < 1$ である． □

注 4.43. *Schwarz* の補題を用いて，重要な結果である *Riemann* の写像定理の一意性の部分を示すことができる．

Riemann の写像定理： $D \subset \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 全体でない単連結領域とし，$z_0 \in D$ を任意にとる．このとき，$f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$ を満たす双正則写像 $f : D \to B$ はただ一つ存在する．

ここで，双正則写像とは逆写像とともに正則な全単射のことである．$D = \mathbb{C}$ の場合はこの定理が成立しないことは *Liouville* の定理よりわかる．

定理 4.44 (正則関数列の極限，Weierstrass の定理)．$D \subset \mathbb{C}$ を領域とし，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を D で正則とする．D 上で $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が広義一様収束するならば，以下が成り立つ．

(1) 極限 $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ は D 上の正則関数である．

(2) $\{f_n^{(m)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $f^{(m)}$ に広義一様収束する．

Proof.

(1) 仮定から $f \in C^0(D)$．D の任意の点 $p \in D$ に対し，$r > 0$ を $\overline{B(p,r)} \subset D$ となるように選ぶ．Morera の定理より，$B(p,r)$ に含まれる任意の区分的 C^1 級閉曲線 γ に対して，

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \tag{4.152}$$

を示せばよい．$K := \overline{B(p,r)}$ は γ を含む D の有界閉部分集合である．K 上の一様ノルムを $\|\cdot\|_K$ で表す．$B(p,r)$ は単連結であり，f_n は D 上で正則なので，Cauchy の定理より $\int_\gamma f_n(z)\,dz = 0$．関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は K 上で f に一様収束するので，γ の長さを $L(\gamma)$ とすれば，$n \to \infty$ のとき，

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\gamma f(z)\,dz - \int_\gamma f_n(z)\,dz\right| \leq \int_\gamma |f(z) - f_n(z)|\,|dz| \leq \|f - f_n\|_K\, L(\gamma) \to 0. \tag{4.153}$$

よって，$f(z)$ は $B(p,r)$ 上で正則であり，$p \in D$ が任意だったので，D 上でも正則である．

(2) **(Step 1)** 有界閉集合 $K \subset D$ に対して，

$$K \subset \overline{B(c,r)} \subset D, \qquad K \cap \partial B(c,r) = \emptyset \tag{4.154}$$

を充たす $c \in D$ と $r > 0$ が存在すると仮定する．

$K \cap \partial B(c,r) = \emptyset$ と K 及び $\partial B(c,r)$ が有界閉集合であることより，

$$\rho = \min\{|\zeta - z|; z \in K, \zeta \in \partial B(c,r)\} > 0. \tag{4.155}$$

$z \in K$ とすれば，f は D で正則なので，定理 4.37 より

$$f_n^{(m)}(z) - f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\partial B(c,r)} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}}\, d\zeta. \tag{4.156}$$

従って，任意の $z \in K$ に対して,

$$\begin{aligned} \left| f_n^{(m)}(z) - f^{(m)}(z) \right| &\leq \frac{m!}{2\pi} \int_{\partial B(c,r)} \frac{|f_n(\zeta) - f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{m+1}}\, |d\zeta| \\ &\leq \frac{m!}{2\pi} \int_{\partial B(c,r)} \frac{\|f_n(\zeta) - f(\zeta)\|_{\partial B(c,r)}}{|\zeta - z|^{m+1}}\, |d\zeta| \\ &\leq \frac{m! r}{\rho^{m+1}} \|f_n - f\|_{\overline{B(c,r)}}. \end{aligned} \tag{4.157}$$

$z \in K$ は任意なので，上式から

$$\left\| f_n^{(m)} - f^{(m)} \right\|_K \leq \frac{m! r}{\rho^{m+1}} \|f_n - f\|_{\overline{B(c,r)}}. \tag{4.158}$$

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\overline{B(c,r)}$ 上で $f(z)$ に一様収束するので,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\overline{B(c,r)}} = 0. \tag{4.159}$$

(4.158), (4.159) より，$\lim_{n\to\infty} \|f_n^{(m)} - f^{(m)}\|_K = 0$ となり，K 上で $\{f_n^{(m)}\}$ は $\{f^{(m)}\}$ に一様収束する.

(Step 2) $E \subset D$ を任意の有界閉集合とする．E の各点 c に対して，$\varepsilon_c > 0$ が存在して，$B(c,\varepsilon_c) \subset B(c,2\varepsilon_c) \subset D$ が成り立つ．$K_c = B(c,\varepsilon_c)$ とすれば，$E \subset \bigcup_{c\in E} K_c$ であるが，E が有界閉集合なので，Heine-Borel の被覆定理より有限個の $c_1, \ldots, c_l \in E$ を選んで，$E \subset K_{c_1} \cup \cdots \cup K_{c_l}$ とできる．Step 1 より各 $\overline{K_{c_i}}$ 上で $f^{(m)}(z)$ は $f^{(m)}(z)$ に一様収束する．従って，その有限個の合併集合 $\overline{K_{c_1}} \cup \cdots \cup \overline{K_{c_l}}$ 上で $f^{(m)}(z)$ は $f^{(m)}(z)$ に一様収束する．$E \subset D$ は任意の有界閉集合なので，関数列 $\{f_n^{(m)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $f^{(m)}$ に D 上で広義一様収束する． □

注 4.45. Heine-Borel の被覆定理の主張を復習しておく.
$\mathbb{R}^n$ の部分集合 K に対し，以下の条件は同値である：

(1) K は有界閉集合である.

(2) Λ を勝手な集合とし, 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して開集合 O_λ が対応しており, $K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ が成り立つとする.（このような開集合族 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を K の開被覆と言う.）このとき，有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \Lambda$ が存在して，$K \subset \bigcup_{i=1}^N O_{\lambda_i}$.

5 Laurent 展開と孤立特異点

5.1 Laurent 展開

$0 \leq R_1 < R_2$ とする．円環領域 $A(c, R_1, R_2)$ を次で定義する：

$$A(c, R_1, R_2) = B(c, R_2) \backslash \overline{B(c, R_1)} = \{z \in \mathbb{C};\ R_1 < |z - c| < R_2\}\,. \tag{5.1}$$

円環領域 $A(c, R_1, R_2)$ において級数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-c)^{-n} \tag{5.2}$$

が広義一様に絶対収束するとは，$z - c$ の級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ が $B(c, R_2)$ において広義一様に絶対収束し，$(z-c)^{-1}$ の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-c)^{-n}$ が $\mathbb{C} \backslash \overline{B(c, R_1)} = \{|z - c| > R_1\}$ において広義一様に絶対収束するときをいう．このとき，級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$ は円環領域 $R_1 < |z - c| < R_2$ において正則関数を定める．このような正冪と負冪の項から成る級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$ を $z = c$ を中心とする **Laurent 級数**と言う．

定理 5.1. 領域 $D \subset \mathbb{C}$ は円環領域 $A(c, R_1, R_2) = \{R_1 < |z - c| < R_2\}$ を含むとし，f を D で正則とする．このとき，f は円環領域 $R_1 < |z - c| < R_2$ 上で広義一様に絶対収束する *Laurent* 級数に展開される：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(c,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta \quad \forall r \in (R_1, R_2). \tag{5.3}$$

Proof. **(Step 1)** $0 < R_1 < \rho_1 < r < \rho_2 < R_2$ となる $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ を任意に選び，

$$\Omega := A(c, \rho_1, \rho_2) = B(c, \rho_2) \backslash \overline{B(c, \rho_1)} = \{\rho_1 < |z| < \rho_2\} \tag{5.4}$$

とする．f は $\overline{\Omega}$ で正則なので，Cauchy 積分公式より，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(c,\rho_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(c,\rho_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{5.5}$$

定理 4.34 の証明と全く同様に，$B(c, \rho_2)$ 上で以下の整級数展開が成り立つ：

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(c,\rho_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(c,\rho_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{5.6}$$

ここで，$\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}$ は $A(c,R_1,R_2)$ で正則であり，$\overline{A(c,\rho_1,\rho_2)} \subset A(c,R_1,R_2)$ であるから，

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A(c,r,\rho_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}\,d\zeta = a_n - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(c,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}\,d\zeta \tag{5.7}$$

が Cauchy 積分定理より従う．すなわち，$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(c,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}\,d\zeta\ \forall r \in (R_1,R_2)$.
(Step 2) $z \in A(c,\rho_1,\rho_2)$ ならば $|z-c| > \rho_1 = |\zeta - c|$ が任意の $\zeta \in \partial B(c,\rho_1)$ に対して成り立つので，級数

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)-(z-c)} = -\frac{f(\zeta)}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-c}{z-c}} = -f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-c)^n}{(z-c)^{n+1}} \tag{5.8}$$

は $\partial B(c,\rho_1)$ 上で一様に絶対収束する．実際，$M_1 = \max_{\partial B(c,\rho_1)}|f|$ とすれば，関数項級数

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-c)^n f(\zeta)}{(z-c)^{n+1}} \tag{5.9}$$

は公比 $\rho_1/|z-c| < 1$ の等比級数

$$M_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_1^n}{|z-c|^{n+1}} = \frac{M_1}{|z-c|}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho_1}{|z-c|}\right)^n = \frac{M_1}{|z-c|-\rho_1} \tag{5.10}$$

を優級数に持ち，Weierstrass M-判定法から $\partial B(c,\varepsilon)$ 上で一様に絶対収束する．従って，両辺を $\partial B(c,\varepsilon)$ 上で積分すれば，無限和と $\partial B(c,\varepsilon)$ 上の線積分は交換可能であり，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(c,\rho_1)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(c,\rho_1)}\frac{(\zeta-c)^n f(\zeta)}{(z-c)^{n+1}}\,d\zeta = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{-(n+1)}}{(z-c)^{n+1}}. \tag{5.11}$$

ただし，

$$a_{-(n+1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(c,\rho_1)}(\zeta-c)^n f(\zeta)\,d\zeta. \tag{5.12}$$

ここで，

$$|a_{-n}| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B(c,\rho_1)}|\zeta-c|^{n-1}|f(\zeta)|\,|d\zeta| \le \frac{M}{2\pi}\rho_1^{n-1}\cdot 2\pi\rho_1 = M\rho_1^n \tag{5.13}$$

と Cauchy-Hadamard の定理より，$1/(z-c)$ の整級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ の収束半径は $1/\rho_1$ 以上である．ρ_1 は R_1 にいくらでも近く取れるので，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ の収束半怪は $1/R_1$ 以上である．すなわち，$|z-c| > R_1$ において，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ は広義一様に絶対収束する．
$(\zeta-c)^n f(\zeta)$ は $A(c,,R_1,R_2)$ 上で正則，$\overline{A(c,\rho_1,r)} \subset A(c,R_1,R_2)$ であるから，Cauchy 積分定理より，

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A(c,\rho_1,r)}(\zeta-c)^n f(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(c,r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{-(n+1)+1}}\,d\zeta - a_{-n-1} \tag{5.14}$$

以上より，$f(z)$ は求める Laurent 級数に展開される． □

例 5.2. $f(z) = \left(1+\frac{1}{z}\right)e^{1/z}$ の $z=0$ における *Laurent* 展開を求める．$|z|>0$ において $e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$ であるから，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}\right)\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}\frac{1}{z^n}. \tag{5.15}$$

例 5.3. $|z|<1, 1<|z|<2, |z|>2$ のそれぞれの領域で

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1} \tag{5.16}$$

の *Laurent* 展開を求める．

$$\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n \quad (|z|<1), \quad \frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n} \quad (|z|>1) \tag{5.17}$$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (|z|<2), \quad \frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}z^{-n} \quad (|z|>2) \tag{5.18}$$

より，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n \quad (|z|<1), \quad f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (1<|z|<2) \tag{5.19}$$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{n-1}-1\right)z^{-n} \quad (|z|>2). \tag{5.20}$$

Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ の無限遠点 ∞ の基本近傍系は，

$$\widehat{\mathbb{C}}\backslash\overline{B(r)}=\{z\in\mathbb{C};|z|>r\}\cup\{\infty\}, \qquad r>0 \tag{5.21}$$

により与えられる．この開集合上で $w=1/z$ が座標を与える．領域 $\mathbb{C}\backslash\overline{B(r)}$ を w 座標で表せば，円環領域 $0<|w|<r^{-1}$ に等しい．従って，定理 5.1 より $\mathbb{C}\backslash B(r)$ 上の正則関数 $f(z)$ は変数 w に関する Laurent 級数として表される：

$$f(z)=f(1/w)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nw^n, \qquad 0<|w|<r^{-1}. \tag{5.22}$$

この Laurent 級数を**無限遠点 ∞ における $f(z)$ の Laurent 展開**という．この Laurent 級数が w の正則関数のとき，すなわち，Laurent 級数の負冪の項が消えるとき，$f(z)$ は無限遠点 ∞ において正則であると定義する．

5.2 孤立特異点

中心の抜けた穴空き円盤 $B(c,r)\backslash\{c\}$ を $B^*(c,r)$ により表す：

$$B^*(c,r)=B(c,r)\backslash\{c\}. \tag{5.23}$$

以下，$r>0$ と $B^*(c,r)$ で正則な f を考える．このとき，$z=c$ を f の**孤立特異点**と言う．f は $z=c$ を中心とする Laurent 級数 $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-c)^n$ に展開される．ただし，$c=\infty$ の場合，$w=1/z$ に関する Laurent 展開を考える．Laurent 級数 $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-c)^n$ の負冪部分

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-c)^{-n}=\frac{a_{-1}}{z-c}+\frac{a_{-2}}{(z-c)^2}+\frac{a_{-3}}{(z-c)^3}+\cdots \tag{5.24}$$

を $f(z)$ の**主要部**という．$z=c$ の近傍における f の状態は以下の 3 通りに分類される．

(i) f の主要部は 0 である．

(ii) f の主要部は 0 でない有限級数である．

(iii) f の主要部は 0 でも有限級数でもない無限級数である．

5.2.1 除去可能特異点

f の主要部が 0 のとき，$f(c) = a_0$ と定義すれば $f(z)$ は $z = c$ まで正則に拡張する．この場合，$z = c$ を**除去可能特異点**という．

定理 5.4 (Riemann)**.** $c \in \mathbb{C}, r > 0$ とする．$B^*(c, r)$ において正則な関数 f に対して，以下の条件は同値である*:*

(1) c は f の除去可能特異点である．

(2) $f(z)$ は c の近傍で有界である．

Proof. (1)$\Longrightarrow$(2) は明らかなので，(2)$\Longrightarrow$(1) を示す．$r > 0$ が存在して，f は $B^*(c, r)$ 上の有界正則関数であると仮定してよい:

$$\sup_{z \in B^*(c,r)} |f(z)| \leq M. \tag{5.25}$$

$0 < \rho < r$ とすれば，定理 5.1 より，$n > 0$ に対して,

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(c,\rho)} (\zeta - c)^{n-1} f(\zeta)\, d\zeta. \tag{5.26}$$

従って,

$$|a_{-n}| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(c,\rho)} (\zeta - c)^{n-1} f(\zeta)\, d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(c,\rho)} |\zeta - c|^{n-1} |f(\zeta)|\, |d\zeta| \tag{5.27}$$

$$\leq \frac{M\rho^{n-1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho\, d\theta = M\rho^n. \tag{5.28}$$

$0 < \rho < r$ は任意なので，$\rho \to 0$ とすれば，$|a_{-n}| \leq \lim_{\rho \to 0} M\rho^n = 0$ から $a_{-n} = 0$ が従う．$n > 0$ は任意なので，$f(z)$ の主要部は零である． □

例 5.5. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ は $z = 0$ で除去可能特異点をもつ．実際,

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z - \sin 0}{z - 0} = (\sin)'(0). \tag{5.29}$$

より一般に，$g(z)$ が正則関数で $g(z_0) = 0$ ならば，$\frac{g(z)}{z - z_0}$ は $z = z_0$ で除去可能特異点をもつ．

5.2.2 極

f の主要部が有限級数の場合，$f(z)$ は $z = c$ の近傍で以下の様に書ける：

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-c)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - c} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n, \qquad a_{-m} \neq 0. \tag{5.30}$$

このとき，c を $f(z)$ の**極**という．$m \in \mathbb{N}$ を極 $z = c$ の**位数**という．

定理 5.6. $B^*(c, r)$, $r > 0$ において正則な f に対して，以下は同値である：

(1) $z = c$ は f の極.

(2) $z \to c$ のとき，$f(z) \to \infty$ が $\widehat{\mathbb{C}}$ において成り立つ：$\lim_{z \to c} |f(z)| \to +\infty$.

Proof. (1)$\Longrightarrow$(2) $f(z)=\frac{a_{-m}+O(z-c)}{(z-c)^m}, a_{-m}\neq 0$ と表されるので，$z\to c$ のとき，分子は $a_{-m}\neq 0$ に収束し，分母は 0 に収束する．従って，$\lim_{z\to c}|f(z)|\to+\infty$.
(2)$\Longrightarrow$(1) を示す．(2) のとき，$\lim_{z\to c}|\frac{1}{f(z)}|=0$ である．Riemann 除去可能特異点定理 5.4 より，$1/f$ は $z=c$ において正則に拡張する．$1/f$ の c における零点の位数を $n>0$ とすれば，$\varepsilon>0$ と $B(c,\varepsilon)$ で正則な関数 g が存在して，$B(c,\varepsilon)$ 上で $1/f(z)=(z-c)^n g(z), g(c)\neq 0$ と表される．$g(z)^{-1}$ は $z=c$ で正則であり，$g(z)^{-1}=g(c)^{-1}+O(z-c)$ と書ける．従って，$f(z)=\frac{g(z)^{-1}}{(z-c)^n}=\frac{g(c)^{-1}+O(z-c)}{(z-c)^n}, g(c)^{-1}\neq 0$ と表されるので，f は $z=c$ において n 位の極を持つ． □

D を $\widehat{\mathbb{C}}$ の領域とし，その部分集合 A は孤立点より成るとする．$D\backslash A$ 上の正則関数 f が A において除去可能特異点または極を持つとき，f を D 上の**有理型関数**と言う．
f が D 上の有理型関数であることと，f が局所的に正則関数の比として表されることは同値である．すなわち，f が D 上の有理型関数 $\Longleftrightarrow$ 任意の $p\in D$ に対して，p の近傍 $U\subset D$ と U で正則な g,h が存在して，$f|_U=g/h$ と表される．実際，f が p で正則ならば $g=f, h=1$ とすればよく，p が f の m 位の極であるとき，$f(z)=g(z)/(z-p)^m$, $g(p)\neq 0$ と書けることから，$h(z)=(z-p)^m$ とすれば主張が成り立つ．

例 5.7. $P(z), Q(z)$ が共通因子をもたない多項式ならば，$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ は $Q(z)$ の零点で極をもつ．
$f(z)=\frac{1}{1-e^{-z}}$ は $z=0$ で *1* 位の極をもつ．e^{-z} のテーラー展開より正則関数 $g(z)$ が存在して，$e^{-z}=1-zg(z)$ と書ける．さらに，$g(0)\neq 0$ だから，$1/g(z)$ は 0 の近傍で正則で，$f(z)=\frac{1/g(z)}{z}$ である．

5.2.3 真性特異点

f の主要部が有限級数でない無限級数のとき，c を $f(z)$ の**真性特異点**という．

定理 5.8 (Weierstrass)．f が $B^*(c,r)$, $r>0$ において正則ならば，次は同値である：

(1) $z=c$ は f の真性特異点である．

(2) $\overline{f\left(B^*(c,\varepsilon)\right)}=\widehat{\mathbb{C}}\qquad \forall\varepsilon\in(0,r).$

特に，$z=c$ が f の真性特異点ならば，任意の $w\in\widehat{\mathbb{C}}$ に対して，c に収束する点列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset B^*(c,r)$ が存在して，$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=w$.

Proof. (2)$\Longrightarrow$(1) Riemann の定理 5.4 や極の特徴付け定理 5.6 から，孤立 特異点 c は除去可能特異点でも極でもないので，真性特異点である．
(1)$\Longrightarrow$(2) $Z=\overline{f\left(B^*(c,\varepsilon)\right)}$ と置く．ただし，閉包は $\widehat{\mathbb{C}}$ で考える．Z は $\widehat{\mathbb{C}}$ の閉集合なので，$Z^c=\widehat{\mathbb{C}}\backslash Z$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ の開集合である．$Z\neq\widehat{\mathbb{C}}$ と仮定する．このとき，$\widehat{\mathbb{C}}\backslash Z$ は空でない開集合なので，無限遠点と異なる内点を含む．すなわち，$p\in\mathbb{C}$ と $r>0$ が存在して，次が成り立つ：

$$B(p,r)\subset\widehat{\mathbb{C}}\backslash Z\qquad \text{すなわち}\qquad \overline{f\left(B^*(c,\varepsilon)\right)}\cap B(p,r)=\emptyset \tag{5.31}$$

これより，

$$f\left(B^*(c,\varepsilon)\right)\cap B(p,r)=\emptyset. \tag{5.32}$$

$f\left(B^*(c,\varepsilon)\right)\subset\mathbb{C}$ であるから，これより $f\left(B^*(c,\varepsilon)\right)\subset\mathbb{C}\backslash B(p,r)$.

すなわち，

$$|f(z)-p| \geq r \qquad \forall z \in B^*(c,\varepsilon) \tag{5.33}$$

であり，従って

$$\sup_{z\in B^*(c,\varepsilon)} \left|\frac{1}{f(z)-p}\right| \leq \frac{1}{r}. \tag{5.34}$$

特に，$\frac{1}{f(z)-p}$ は $B^*(c,\varepsilon)$ 上で有界である．Riemann 除去可能特異点定理 5.4 より，$\frac{1}{f(z)-p}$ は $B(c,\varepsilon)$ 上の正則関数に拡張する．従って，f は c において高々極を持つ．これは c が f の真性特異点であることに矛盾する．以上から，$\overline{f\left(B^*(c,\varepsilon)\right)} = \widehat{\mathbb{C}}$. □

例 5.9. $f(z) = e^{1/z}$ は $z=0$ で真性特異点をもつ．実際，

$$\lim_{z\in\mathbb{R}_{<0}, z\to 0} e^{1/z} = 0, \qquad \lim_{z\in\mathbb{R}_{>0}, z\to 0} e^{1/z} = \infty. \tag{5.35}$$

より強く，真性特異点を持つ関数について，次の定理が知られている．

定理 5.10 (Picard)**.** f が $B^*(c,r), r>0$ で正則であるとする．c が f の真性特異点ならば，任意の $0<\varepsilon<r$ に対して， $f\left(B^*(c,\varepsilon)\right)$ は $\mathbb{C}$ または $\mathbb{C}$ から *1* 点を除外した集合である．

極や零点の集合が考えている領域の境界に集積点を持つことはあり得る．

例 5.11. 関数 $f(z) = \cot(\pi/z) = \cos(\pi/z)/\sin(\pi/z)$ を考えると，$\cos(\pi/z)$ と $\sin(\pi/z)$ は $\mathbb{C}^*$ 上で正則なので，$f(z)$ は $\mathbb{C}^*$ 上の有理型関数である．$f(z)$ の $\mathbb{C}^*$ における零点の集合 Z は $\cos(\pi/z)$ の零点の集合に一致するので，

$$Z = \left\{ \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \in \mathbb{C}^*;\, n\in\mathbb{Z} \right\}. \tag{5.36}$$

同様に，$f(z)$ の $\mathbb{C}^*$ における極の集合 P は $\sin(\pi/z)$ の零点の集合に一致するので，

$$P = \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{C}^*;\, n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\} \right\}. \tag{5.37}$$

Z と P はそれぞれ孤立点から成る $\mathbb{C}^*$ の部分集合であるが，$\mathbb{C}$ においては両者とも原点を集積点に持つ．原点は $f(z)$ の孤立特異点にはならない．すなわち，原点のどんな近傍 $B(\varepsilon)$ を取っても，$f(z)$ は $B^*(\varepsilon)$ 上の正則関数にはならない．

平面領域の勝手な離散的部分集合に対し，その離散的部分集合に極や零点を持つ有理型関数や正則関数の存在が知られている（Mittag-Leffler の定理と Weierstrass の定理）．特に，考えている領域の境界が極や零点の集合の閉包となるようにすることも可能である．

6　留数定理とその定積分への応用

6.1　留数定理

定義 6.1.　*(1)* $c \in \mathbb{C}, r > 0$ とし，f を $B^*(c,r)$ で正則とする．c を中心とする f の *Laurent* 展開を

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n \tag{6.1}$$

とするとき, $(z-c)^{-1}$ の係数 a_{-1} を f の c における**留数**といい, 次のように表す：

$$\mathrm{Res}_{z=c} f(z) = a_{-1}, \quad \mathrm{Res}(f,c) = a_{-1}. \tag{6.2}$$

(2) f を $\mathbb{C}\backslash B(r)$ で正則とし，$w = 1/z$ を $\widehat{\mathbb{C}}$ の無限遠点 ∞ を中心とする座標とする．このとき，$\mathbb{C}\backslash B(r)$ 上で

$$f(z)\,dz = -f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{dw}{w^2} \tag{6.3}$$

と表され，無限遠点 ∞ における f の留数を以下の式で定義する*:*

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right) \tag{6.4}$$

定理 6.2 (留数定理：有界領域の場合，Cauchy)．$D \subset \mathbb{C}$ は有界領域で，境界 ∂D は有限個の区分的 C^1 級単一閉曲線より成るとする．正則関数 f は $\overline{D}$ において高々有限個の孤立特異点を持ち，f の孤立特異点の集合 A は D に含まれるとする.（すなわち，$\overline{D}$ を含むある領域 $U \subset \mathbb{C}$ が存在して，f は $U\backslash A$ で正則かつ $A \subset D$ である.）このとき，次の等式が成り立つ*:*

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a \in A \cap D} \mathrm{Res}(f,a). \tag{6.5}$$

Proof.　$A \subset D$ は有限集合なので，$0 < \varepsilon \ll 1$ が存在して，任意の $a \in A$ に対して $\overline{B(a,\varepsilon)} \subset D$ かつすべての $\{B(a,\varepsilon)\}_{a\in A}$ が互いに素であるようにできる．このとき，Laurent 展開（定理 5.1）における Laurent 係数 a_{-1} の表示式より，次式が成り立つ：

$$\int_{\partial B(a,\varepsilon)} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,a). \tag{6.6}$$

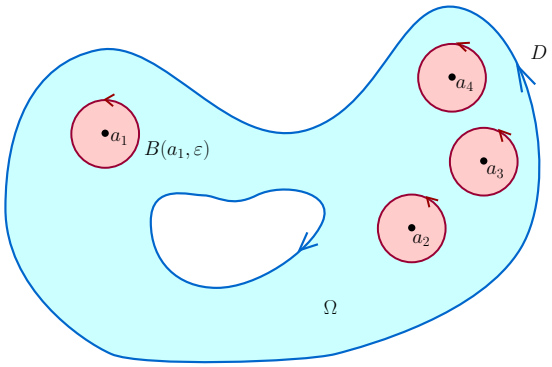
f は閉領域 $\Omega = \overline{D}\backslash \bigcup_{a\in A\cap D} B(a,\varepsilon)$ 上で正則なので，Cauchy の積分定理から，

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz - \sum_{a\in A\cap D} \int_{\partial B(a,\varepsilon)} f(z)\,dz = \int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0. \tag{6.7}$$

(6.6), (6.7) から,

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = \sum_{a\in A\cap D} \int_{\partial B(a,\varepsilon)} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a\in A\cap D} \mathrm{Res}(f,a). \tag{6.8}$$

以上から定理が示された.　□



定理 6.3 (留数定理：領域が無限遠点を含む場合，Cauchy)．D は *Riemann* 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ の無限遠点を含む領域で，境界 ∂D は有限個の区分的 C^1 級単一閉曲線より成るとする．正則関数 f は $\overline{D}$ において高々有限個の孤立特異点を持ち，f の孤立特異点の集合 A は ∂D と共有点を持たないとする．(すなわち，$\overline{D}$ を含む或る領域 $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ が存在して，f は $U\backslash A$ で正則であり，$A \cap \partial D = \emptyset$ である．) このとき，次の等式が成り立つ：

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a \in (A \cup \{\infty\}) \cap D} \mathrm{Res}(f, a). \tag{6.9}$$

Proof. ∞ を中心とする半径 r の円盤が

$$B(\infty, r) = \{w \in \mathbb{C};\ |w| < r\} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| > 1/r\} \cup \{\infty\} \tag{6.10}$$

で定義されていた．D は無限遠点 ∞ のある近傍を含むので，$r > 0$ が存在して，$\widehat{\mathbb{C}}\backslash B(r) = \overline{B\left(\infty, \frac{1}{r}\right)} \subset D$．$A$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ の有限集合なので，$\varepsilon_0 > 0$ が存在して，

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \quad \Longrightarrow \quad A \cap \overline{B(\infty, \varepsilon)} = \begin{cases} \emptyset & \text{if} \quad \infty \notin A \\ \infty & \text{if} \quad \infty \in A. \end{cases} \tag{6.11}$$

従って，$r>0$ を $B(\infty,1/r)\subset D$ かつ $1/r<\varepsilon$ となるように選べば，

$$(A\cap D)\cap(\widehat{\mathbb{C}}\backslash B(r))=A\cap D\cap\overline{B(\infty,1/r)}=A\cap\overline{B(\infty,1/r)}=\begin{cases}\emptyset & \text{if} \quad \infty\notin A\\ \infty & \text{if} \quad \infty\in A.\end{cases} \tag{6.12}$$

このとき，$D'=D\backslash\overline{B(\infty,1/r)}=D\backslash\overline{(\widehat{\mathbb{C}}\backslash B(r))}=D\cap B(r)$ とおけば，D' は有界領域である．有界領域に対する留数定理 6.2 より，D' に対して留数定理が成り立つので，

$$\int_{\partial D'}f(z)\,dz=2\pi i\sum_{a\in A\cap D'}\mathrm{Res}(f,a). \tag{6.13}$$

ここで，$\partial D'=\partial D+\partial B(r)$ なので，(6.13) より，

$$\int_{\partial D}f(z)\,dz+\int_{\partial B(r)}f(z)\,dz=\int_{\partial D'}f(z)\,dz=2\pi i\sum_{a\in A\cap D'}\mathrm{Res}(f,a). \tag{6.14}$$

集合として次式が成り立つ．

$$\partial B(r)=\{z\in\mathbb{C};\,|z|=r\}=\{w\in\mathbb{C};\,|w|=1/r\}=\partial B(\infty,1/r). \tag{6.15}$$

一方，$\partial B(r)$ のパラメータ表示 $z=re^{i\theta},\theta\in[0,2\pi]$ に対応する $\partial B(\infty,1/r)$ のパラ メータ表示は $w=1/z=e^{-i\theta}/r,\theta\in[0,2\pi]$ である．従って，$B(r)$ から定まる $\partial B(r)$ の向きと $B(\infty,1/r)$ から定まる $\partial B(\infty,1/r)$ の向きは反対である．従って，向きを含めて以下の等式を得る：

$$\partial B(r)=-\partial B(\infty,1/r). \tag{6.16}$$

ここで，仮定より $B(\infty,1/r)$ における f の特異点は高々∞ のみであるから，穴空き円盤 $B^*(\infty,1/r)=B(\infty,1/r)\backslash\{\infty\}$ 上の正則関数 $f(z)=f(1/w)$ に対する留数定理より，

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(r)}f(z)\,dz&=-\int_{\partial B(\infty,\frac{1}{r})}f\left(\frac{1}{w}\right)\left(-\frac{dw}{w^2}\right)\\&=-2\pi i\,\mathrm{Res}\left(-w^{-2}f\left(\frac{1}{w}\right),0\right)\\&=-2\pi i\,\mathrm{Res}(f,\infty).\end{aligned} \tag{6.17}$$

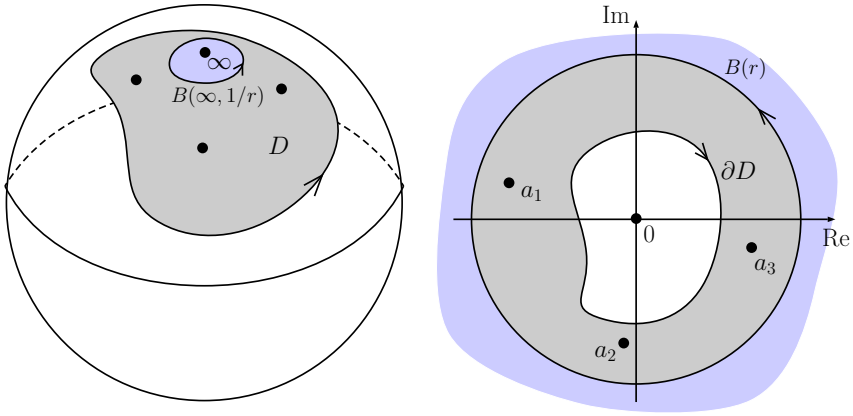
ここで，最初の等号は (6.16) から従う．(6.12) と $\infty\in D$ より

$$(D'\cap A)\cup\{\infty\}=\begin{cases}(D\cap A)\cup\{\infty\} & \text{if} \quad \infty\notin A\\ D\cap A & \text{if} \quad \infty\in A\end{cases}=(A\cup\{\infty\})\cap D \tag{6.18}$$

なので，(6.16), (6.17) より，

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}f(z)\,dz&=2\pi i\sum_{a\in A\cap D'}\mathrm{Res}(f,a)-\int_{\partial B(r)}f(z)\,dz\\&=2\pi i\sum_{a\in A\cap D'}\mathrm{Res}(f,a)+2\pi i\,\mathrm{Res}(f,\infty)\\&=2\pi i\sum_{a\in(A\cup\{\infty\})\cap D}\mathrm{Res}(f,a).\end{aligned} \tag{6.19}$$

以上から，定理が示された． □



定理 6.4. A を $\widehat{\mathbb{C}}$ の有限集合とし，f を $\widehat{\mathbb{C}}\backslash A$ で正則とする．このとき，

$$\sum_{a\in A\cup\{\infty\}} \mathrm{Res}(f,a) = 0. \tag{6.20}$$

特に，有理関数の $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の留数の総和は 0 である．

Proof. 留数定理 6.3 において，$U = \widehat{\mathbb{C}}$ とし，D は $A\cup\{\infty\}$ を含み区分的に C^1 級の境界を持つ領域とする．$D' = \widehat{\mathbb{C}}\backslash\overline{D}$ とすれば，$\partial D = -\partial D'$ であり，$\overline{D'}\cap A = \emptyset$ なので f は $\overline{D'}$ で正則である．留数定理と Cauchy の積分定理より，

$$2\pi i \sum_{a\in(A\cup\{\infty\})\cap D} \mathrm{Res}(f,a) = \int_{\partial D} f(z)\,dz = -\int_{\partial D'} f(z)\,dz = 0. \tag{6.21}$$

最後の等号は $\overline{D'}$ 上の正則関数 f に対して Cauchy の積分定理を適用することにより得られる．$(A\cup\{\infty\})\cap D = A\cup\{\infty\}$ なので，主張が示された． □

注意. 定理 6.4 で A に無限遠点 ∞ を付加することは必要である．実際，$f(z) = 1/z$ とすれば f は $\widehat{\mathbb{C}}\backslash\{0\}$ で正則なので $A = \{0\}$ である．このとき $\sum_{a\in A}\mathrm{Res}(f,a) = 1 \neq 0$ となり，A 上の留数の総和は 0 でない．一方，無限遠点の近傍で $f(z) = f(1/w) = w$ と表されるので，

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = \mathrm{Res}\left(-w^{-2}f(1/w),0\right) = \mathrm{Res}(-1/w,0) = -1. \tag{6.22}$$

従って，

$$\sum_{a\in A\cup\{\infty\}} \mathrm{Res}(f,a) = \mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,\infty) = 1 - 1 = 0. \tag{6.23}$$

すなわち，$A\cup\{\infty\}$ 上の留数の総和は 0 である．一般に，$f(z)$ が無限遠点で正則でも，対応する 1-形式

$$f(z)\,dz = -f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{dw}{w^2} \tag{6.24}$$

は無限遠点で正則でないことが起こり得る．そのため，無限遠点における 1-形式 $f(z)\,dz$ の留数を考える必要がある．このように，正則関数の線積分では正則関数それ自身よりも 1-形式 $f(z)\,dz$ の方がより本質的である．

例 6.5. A を $\widehat{\mathbb{C}}$ の有限集合とし，f を $\widehat{\mathbb{C}}\backslash A$ で正則とする．このとき，$R \gg 1$ が十分大きい実数ならば，

$$\int_{|z|=R} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f,\infty). \tag{6.25}$$

Proof. 留数定理より，

$$\int_{|z|=R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a\in A\cap B(R)} \operatorname{Res}(f,a). \tag{6.26}$$

A は有限集合なので，R が充分大きいとき,

$$A\cap B(R) = (A\backslash\{\infty\})\cap B(R) = A\backslash\{\infty\}. \tag{6.27}$$

Riemann 球面に対する留数定理 6.4 より，

$$\sum_{a\in A\cap B(R)} \operatorname{Res}(f,a) = \sum_{a\in A\backslash\{\infty\}} \operatorname{Res}(f,a) = -\operatorname{Res}(f,\infty). \tag{6.28}$$

これを (6.26) に代入すれば，主張が従う． □

6.2 留数定理の定積分への応用

6.2.1 留数定理を用いた定積分の計算 I

$f(x,y)$ を x,y の有理式とする．$f(x,y)$ の分母が $\mathbb{R}^2$ の単位円周 $x^2+y^2=1$ 上で零点を持たないならば，

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta = 2\pi \sum_{|a|<1} \operatorname{Res}\left(f\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{1}{z},a\right). \tag{6.29}$$

Proof. $C=\{z\in\mathbb{C};\,|z|=1\}$ を複素単位円周とする．$z\in C$ に対して，$\overline{z}=z^{-1}$ なので，$z=e^{i\theta}\in C$ に対して，$\cos\theta=\left(z+z^{-1}\right)/2, \sin\theta=\left(z-z^{-1}\right)/2i$ である．また，$dz=ie^{i\theta}\,d\theta=iz\,d\theta$ なので，留数定理より，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta &= \frac{1}{i}\int_C f\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{z}\\ &= 2\pi\sum_{|a|<1}\operatorname{Res}\left(f\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{1}{z},a\right).\end{aligned} \tag{6.30}$$

従って，主張が成り立つ． □

例 6.6. $a > 1$ のとき,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \tag{6.31}$$

Proof. $f(x, y) = 1/(a + x)$ の場合である．このとき，

$$f\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) = \frac{2}{2a + z + z^{-1}} = \frac{2z}{z^2 + 2az + 1} = \frac{2z}{\left(z + a + \sqrt{a^2 - 1}\right)\left(z + a - \sqrt{a^2 - 1}\right)}. \tag{6.32}$$

ここで，$a > 1$ であるから，$-\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right) < -1$ は単位円盤の外にある．また，$-1 < -a + \sqrt{a^2 - 1} = -\frac{1}{a + \sqrt{a^2 - 1}} < 0$ より，$-a + \sqrt{a^2 - 1}$ は単位円盤の内部にある．従って，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} &= 2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{2}{z^2 + 2az + 1}, -a + \sqrt{a^2 - 1}\right) = \left.\frac{4\pi}{z + a + \sqrt{a^2 - 1}}\right|_{z = -a + \sqrt{a^2 - 1}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.\end{aligned} \tag{6.33}$$

以上により主張が示された． □

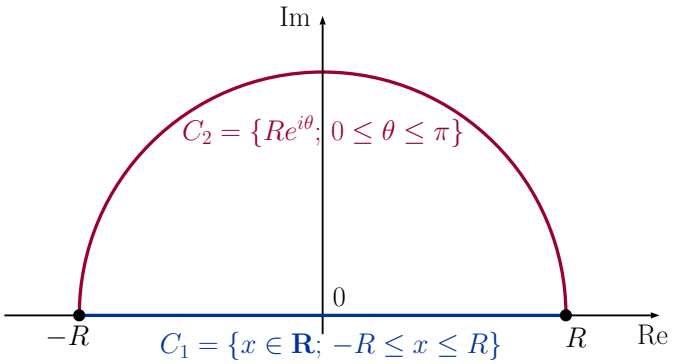
6.2.2 留数定理を用いた定積分の計算 II

$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}$ を複素上半平面とする．実軸上に極を持たない有理関数 $F(z)$ が，以下の条件を充たすと仮定する:

$$\lim_{|z| \to \infty} zF(z) = 0. \tag{6.34}$$

このとき，次の等式が成り立つ：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, dx = 2\pi i \sum_{a \in \mathfrak{H}} \operatorname{Res}(F, a). \tag{6.35}$$



Proof. $C(R)$ を $\mathbb{C}$ の原点を中心とする半径 $R>0$ の半円で，実軸の上にあるものとする．すなわち，$C(R)=C_1+C_2$ であり，

$$C_1=\{x\in\mathbb{R};\ -R\le x\le R\},\qquad C_2=\left\{Re^{i\theta}\in\mathbb{C};\ 0\le\theta\le\pi\right\}. \tag{6.36}$$

$F(z)$ は有理式なので，その分子 $P(z)$ と分母 $Q(z)$ の零点は R が十分大きいとき，$B(R)$ に含まれる．このことから，$R\gg 1$ ならば，以下の不等式が $\mathbb{C}\backslash B(R)$ 上で成り立つ：

$$K_0|z|^{\deg P}\le|P(z)|\le K_1|z|^{\deg P},\qquad K_2|z|^{\deg Q}\le|Q(z)|\le K_3|z|^{\deg Q}. \tag{6.37}$$

ただし，K_0,K_1,K_2,K_3 は正定数である．条件 (6.34) から $\deg Q-\deg P\ge 2$ であり，$R\gg 1$ のとき，以下の不等式が $\mathbb{C}\backslash B(R)$ 上で成り立つ：

$$|F(z)|\le\frac{K}{|z|^2}\qquad\forall z\in\mathbb{C}\backslash B(R). \tag{6.38}$$

また，$F(z)$ は実軸上に極を持たないので，定数 $K'>0$ が存在して，

$$|F(x)|\le\frac{K'}{x^2+1}\qquad\forall x\in\mathbb{R}. \tag{6.39}$$

(6.39) より $F(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で絶対積分可能である．(6.38) より，$R\gg 1$ のとき，$F(z)$ は $C(R)$ 上に極を持たず，また $F(z)$ の $\mathfrak{H}$ 上にある極は全て $C(R)$ で囲まれる領域に含まれる．留数定理より，

$$\int_{-R}^{R}F(x)\,dx+\int_{C_2}F(z)\,dz=2\pi i\sum_{a\in\mathfrak{H}}\mathrm{Res}(F,a). \tag{6.40}$$

$R\to\infty$ のとき，(6.38) より，

$$\left|\int_{C_2}F(z)\,dz\right|\le\int_{C_2}|F(z)|\,|dz|\le\int_0^{\pi}\frac{K}{R^2}R\,d\theta=\frac{K\pi}{R}\to 0. \tag{6.41}$$

従って，(6.40) において $R\to\infty$ とすれば，主張が従う． □

例 6.7.

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^6}=\frac{\pi}{3} \tag{6.42}$$

Proof. $\omega=e^{\pi i/6}$ とすれば $\omega\in\mathfrak{H}$ であり，

$$z^6+1=(z-\omega)(z+\omega)\left(z-\omega^3\right)\left(z+\omega^3\right)\left(z-\omega^5\right)\left(z+\omega^5\right) \tag{6.43}$$

である．上半平面にある $F(z)=1/\left(z^6+1\right)$ の極は ω,ω^3,ω^5 であり，

$$\mathrm{Res}\left(F,\omega^k\right)=\left.\frac{1}{\left(z^6+1\right)'}\right|_{z=\omega^k}=\left.\frac{1}{6z^5}\right|_{z=\omega^k}=-\frac{1}{6}\omega^k. \tag{6.44}$$

従って，

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^6}&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^6}=\pi i\sum_{k=1,3,5}\mathrm{Res}\left(F,\omega^k\right)\\&=-\frac{\pi i}{6}\left(\omega+\omega^3+\omega^5\right)=\frac{\pi}{6}\left(2\cos\frac{\pi}{3}+1\right)=\frac{\pi}{3}.\end{aligned} \tag{6.45}$$

以上から主張が示された． □

6.2.3 留数定理を用いた定積分の計算 III

A を $\mathfrak{H}$ の有限集合とし，領域 D は $\overline{\mathfrak{H}} \subset D \subset \mathbb{C}$ を充たすとする．$D\backslash A$ で正則な F が

$$\lim_{|z|\to\infty, \operatorname{Im} z\geq 0} F(z) = 0 \tag{6.46}$$

を充たし，実軸上に孤立特異点をもたないならば，

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} F(x)e^{ix}\,dx = 2\pi i \sum_{a\in\mathfrak{H}} \operatorname{Res}\left(F(z)e^{iz}, a\right). \tag{6.47}$$

特に，広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ix}\,dx$ が存在するならば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{a\in\mathfrak{H}} \operatorname{Res}\left(F(z)e^{iz}, a\right). \tag{6.48}$$

Proof. $C(R) = C_1 + C_2$ を前節と同様の積分路とし，D_R を $C(R)$ で囲まれる有界領域とする．A は有限集合なので，$R \gg 1$ ならば $A \cap \mathfrak{H} \subset D_R$ としてよい．留数定理より，

$$\int_{-R}^{R} F(x)e^{ix}\,dx + \int_{C_2} F(z)e^{iz}\,dz = 2\pi i \sum_{a\in\mathfrak{H}} \operatorname{Res}\left(F(z)e^{iz}, a\right). \tag{6.49}$$

C_2 上の積分が $R\to\infty$ のときに 0 に収束することが示されれば，主張が従う．そこで，

$$M(R) := \sup_{|z|=R, z\in\overline{\mathfrak{H}}} |F(z)| \tag{6.50}$$

と置けば，(6.46) より $\lim_{R\to\infty} M(R) = 0$ である．また，$z = x + iy \in \overline{\mathfrak{H}}$ のとき，$\left|e^{iz}\right| = e^{-y}$ であるから，

$$\left|\int_{C_2} F(z)e^{iz}\,dz\right| \leq \int_{C_2} \left|F(z)e^{iz}\right| |dz| \leq M(R)\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} R\,d\theta = 2RM(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\,d\theta. \tag{6.51}$$

ここで，

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1 \qquad \forall\theta \in [0, \pi/2] \tag{6.52}$$

であるから，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\,d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\,d\theta < \int_0^{\infty} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{2R}. \tag{6.53}$$

従って，

$$\left|\int_{C_2} F(z)e^{iz}\,dz\right| \leq \pi M(R) \tag{6.54}$$

という評価が得られ，C_2 上の積分は $R\to\infty$ のとき，0 に収束する．以上から，主張が示された．□

例 6.8. 例えば，$F(z)$ が実軸上に極を持たず，次の不等式を充たす有理関数ならば，広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ix}\,dx$ が存在する：

$$|F(z)| \leq \frac{K}{|z|}, \qquad |z| \gg 1,\ \operatorname{Im} z \geq 0. \tag{6.55}$$

実際，このとき，$F(z)$ が有理関数であるという仮定から定数 k が存在して，$R > 0$ が十分大きいとき，

$$\left|F(z) - \frac{k}{z}\right| \leq \frac{C}{|z|^2}, \qquad |z| \geq R \tag{6.56}$$

という評価が成り立つ．従って，$R_1, R_2 \in \mathbb{R}$ を十分大きく選べば，

$$\int_{R_1}^{R_2} \left| \left(F(x) - \frac{k}{x} \right) e^{ix} \right| dx \leq C \int_{R_1}^{R_2} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{C}{R_1}. \tag{6.57}$$

従って，広義積分 $\int_r^\infty x^{-1} e^{ix}\, dx$ が存在すれば，広義積分 $\int_{-\infty}^\infty F(x) e^{ix}\, dx$ が存在する．広義積分 $\int_r^\infty x^{-1} e^{ix}\, dx$ の存在はよく知られている．実は，$F(z)$ が有理関数であることを仮定しなくても，評価 (6.55) が成り立つならば次の等式が成り立つ：

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum_{a \in \mathfrak{H}} \operatorname{Res}\left(F(z) e^{iz}, a \right). \tag{6.58}$$

Proof. $R_1, R_2, S \in \mathbb{R}$ を R より大きい実数とし，$\mathbb{C}$ の 4 点 $R_1,\ R_1 + Si,\ -R_2 + Si,\ -R_2$ を頂点とする長方形 Γ を考える．R_1, R_2, S の選び方から，$\Gamma \backslash \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \backslash B(R)$ なので，以下の評価が (6.55) より成り立つ:

$$\left| \int_{R_1}^{R_1+Si} F(z) e^{iz}\, dz \right| \leq \int_0^S \frac{K}{R_1} e^{-y}\, dy = \frac{K}{R_1} \left(1 - e^{-S} \right) \leq \frac{K}{R_1} \tag{6.59}$$

$$\left| \int_{-R_2}^{-R_2+Si} F(z) e^{iz}\, dz \right| \leq \int_0^S \frac{K}{R_2} e^{-y}\, dy = \frac{K}{R_2} \left(1 - e^{-S} \right) \leq \frac{K}{R_2} \tag{6.60}$$

$$\left| \int_{-R_2+Si}^{R_1+Si} F(z) e^{iz}\, dz \right| \leq \int_{-R_2}^{R_1} \frac{K}{S} e^{-S}\, dx = K \left(R_1 + R_2 \right) \frac{e^{-S}}{S} \tag{6.61}$$

一方，留数定理より，

$$\int_\Gamma F(z) e^{iz}\, dz = 2\pi i \sum_{a \in \mathfrak{H}} \operatorname{Res}\left(F(z) e^{iz}, a \right). \tag{6.62}$$

(6.59), (6.60), (6.61), (6.62) より，

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-R_2}^{R_1} F(x) e^{ix}\, dx - 2\pi i \sum_{a \in \mathfrak{H}} \operatorname{Res}\left(F(z) e^{iz}, a \right) \right| \\ &\leq \left| \int_{R_1}^{R_1+Si} F(z) e^{iz}\, dz \right| + \left| \int_{-R_2}^{-R_2+Si} F(z) e^{iz}\, dz \right| + \left| \int_{-R_2+Si}^{R_1+Si} F(z) e^{iz}\, dz \right| \\ &\leq \frac{K}{R_1} + \frac{K}{R_2} + K \left(R_1 + R_2 \right) \frac{e^{-S}}{S}. \end{aligned} \tag{6.63}$$

(6.63) で $S \to \infty$ とすれば，左辺は S に無関係なので，

$$\left| \int_{-R_2}^{R_1} F(x) e^{ix}\, dx - 2\pi i \sum_{a \in \mathfrak{H}} \operatorname{Res}\left(F(z) e^{iz}, a \right) \right| \leq \frac{K}{R_1} + \frac{K}{R_2}. \tag{6.64}$$

この評価から，$\int_{\mathbb{R}} F(x) e^{ix}\, dx$ が存在して，(6.58) の主張が成り立つことが従う． □

例 6.9.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{\left(x^2 + 1 \right)^2}\, dx = \frac{\pi}{e}. \tag{6.65}$$

Proof. $D \subset \mathbb{C}$ を以下の原点中心の半円の内部とする：

$$D = \left\{ re^{i\theta};\ 0 < r < R,\ 0 < \theta < \pi \right\}. \tag{6.66}$$

このとき

$$\partial D = [-R, R] + C_R, \qquad C_R = \left\{ Re^{i\theta};\ 0 \le \theta \le \pi \right\}. \tag{6.67}$$

複素平面上で z の関数

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} = \frac{e^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2} \tag{6.68}$$

を考えれば，$D\backslash\{i\}$ 上で $f(z)$ は正則であり，$z = i$ で $f(z)$ は 2 位の極を持つ．$z = i$ における $f(z)$ の留数は $(z-i)^2 f(z)$ の $z = i$ における 1 次の展開係数なので，

$$\mathrm{Res}(f, i) = \left.\frac{d}{dz}\right|_{z=i} (z-i)^2 f(z) = \left.\frac{d}{dz}\right|_{z=i} \frac{e^{iz}}{(z+i)^2} = \frac{1}{2ie}. \tag{6.69}$$

従って，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\, dx = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f, i) = \frac{\pi}{e}. \tag{6.70}$$

両辺の実部を取れば，求める式が従う． □

6.2.4 留数定理を用いた定積分の計算 III′

領域 D は $\overline{\mathfrak{H}} \subset D \subset \mathbb{C}$ を充たすとする．$A \subset \overline{\mathfrak{H}}$ を有限集合，F を $D\backslash A$ で正則な関数とする．さらに，F は次の条件を充たすと仮定する：

(i) $\lim_{|z|\to\infty, \mathrm{Im}\, z \ge 0} F(z) = 0$.

(ii) $F(z)$ は原点に一位の極を持つ：$A \cap \mathbb{R} = \{0\}$, $\mathrm{ord}_{z=0} F = -1$.

このとき，次の等式が成り立つ：

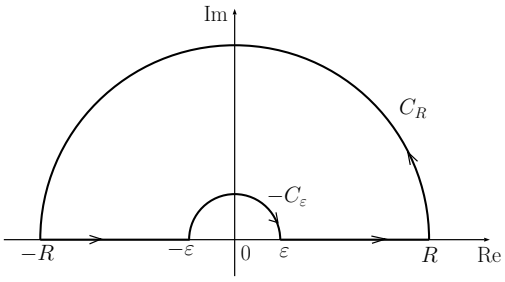
$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \left(F(x)e^{ix} + F(-x)e^{-ix} \right) dx = \pi i\, \mathrm{Res}(F, 0) + 2\pi i \sum_{a \in A \cap \mathfrak{H}} \mathrm{Res}\left(F(z)e^{iz}, a \right). \tag{6.71}$$

特に，$F(z)$ が奇関数ならば，

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R F(x) \sin x\, dx = \frac{\pi}{2}\, \mathrm{Res}(F, 0) + \pi \sum_{a \in A \cap \mathfrak{H}} \mathrm{Res}\left(F(z)e^{iz}, a \right). \tag{6.72}$$

Proof.　十分小さな正数 $0 < \varepsilon \ll 1$ に対して，$C(R)$ の代わりに次の積分路 $C(R,\varepsilon)$ を考える．$C(R,\varepsilon)$ は半円 $C_R = \left\{Re^{i\theta}; 0 \le \theta \le \pi\right\}$ と $C_\varepsilon = \left\{\varepsilon e^{i\theta}; 0 \le \theta \le \pi\right\}$ を実軸の線分 $[\varepsilon, R]$ と $[-R, -\varepsilon]$ でつないで得られる区分的に滑らかな単一閉曲線である（正弦積分を求める際に用いた積分路である）．すなわち，

$$C(R,\varepsilon) = [\varepsilon, R] + C_R + [-R, -\varepsilon] - C_\varepsilon. \tag{6.73}$$



このとき，R が十分大きければ，留数定理から，

$$\int_{C(R,\varepsilon)} F(z)e^{iz}\,dz = 2\pi i \sum_{a\in A\cap\mathfrak{H}} \operatorname{Res}\left(F(z)e^{iz}, a\right). \tag{6.74}$$

また，

$$\int_{C(R,\varepsilon)} F(z)e^{iz}\,dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} F(z)e^{iz}\,dz + \int_{\varepsilon}^{R} F(z)e^{iz}\,dz + \int_{C_R} F(z)e^{iz}\,dz - \int_{C_\varepsilon} F(z)e^{iz}\,dz. \tag{6.75}$$

ここで，$F(z)$ が $z = 0$ に一位の極を持つので，

$$F(z) = \frac{\alpha}{z} + f(z), \quad \alpha = \operatorname{Res}(F, 0), \qquad f \text{ は } B(\varepsilon) \text{ で正則} \tag{6.76}$$

と表すことができる．従って，

$$\int_{C_\varepsilon} F(z)e^{iz}\,dz = \alpha\int_{C_\varepsilon} e^{iz}\frac{dz}{z} + \int_{C_\varepsilon} f(z)e^{iz}\,dz = \alpha\int_{C_\varepsilon}\frac{dz}{z} + \int_{C_\varepsilon}\frac{e^{iz}-1}{z}\,dz + \int_{C_\varepsilon} f(z)e^{iz}\,dz \tag{6.77}$$

と $\int_{C_\varepsilon}\frac{dz}{z} = \pi i$ より，

$$\left|\int_{C_\varepsilon} F(z)e^{iz}\,dz - \alpha\pi i\right| \le \int_0^\pi \left|\frac{e^{iz}-1}{z}\right|\varepsilon\,d\theta + \int_0^\pi \left|f(z)e^{iz}\right|\varepsilon\,d\theta \le C\varepsilon. \tag{6.78}$$

従って，

$$\lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty}\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} F(x)e^{ix}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} F(x)e^{ix}\,dx\right) = \pi i \operatorname{Res}(F,0) + 2\pi i \sum_{a\in A\cap\mathfrak{H}} \operatorname{Res}\left(F(z)e^{iz}, a\right). \tag{6.79}$$

ここで，

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} F(x)e^{ix}\,dx = -\int_{R}^{\varepsilon} F(-x)e^{-ix}\,dx = \int_{\varepsilon}^{R} F(-x)e^{-ix}\,dx \tag{6.80}$$

であることから主張が従う．　□

注意： $F(z)=\alpha z^{-1}+f(z)$，f は $B(\varepsilon),\ \varepsilon>0$ で正則より，

$$F(z)e^{iz}+F(-z)e^{-iz}=2i\alpha\frac{\sin z}{z}+f(z)e^{iz}+f(-z)e^{-iz} \tag{6.81}$$

と表され，$F(z)e^{iz}+F(-z)e^{-iz}$ は原点で正則である．

例 6.10. $F(z)=1/z$ とすれば，$F(z)$ は奇関数であり，原点に一位の極を持ち，上半平面に極を持たない．従って，

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2} \tag{6.82}$$

と正弦積分の公式が得られる．

例 6.11.

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx=\frac{\pi}{2}. \tag{6.83}$$

Proof. 求める積分を I と置く．$(\sin x)^2=\frac{1-\cos 2x}{2}$ より，

$$\begin{aligned} I&=\lim_{\varepsilon\to 0,R\to\infty}\int_\varepsilon^R \frac{1-\cos 2x}{2x^2}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0,R\to\infty}\int_\varepsilon^R \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx\\ &=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0,R\to\infty}\int_\varepsilon^R \frac{2-e^{ix}-e^{-ix}}{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0,R\to\infty}\left(\int_{-R}^{-\varepsilon}+\int_\varepsilon^R\right)\frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx. \end{aligned} \tag{6.84}$$

半円 $C_R=\left\{Re^{i\theta};\ 0\le\theta\le\pi\right\}$ と $C_\varepsilon=\left\{\varepsilon e^{i\theta};\ 0\le\theta\le\pi\right\}$ を実軸上の線分 $[\varepsilon,R]$ と $[-R,-\varepsilon]$ でつないで得られる区分的に滑らかな単一閉曲線を $C(R,\varepsilon)$ とする：

$$C(R,\varepsilon)=[\varepsilon,R]+C_R+[-R,-\varepsilon]-C_\varepsilon. \tag{6.85}$$

$F(z)=\left(1-e^{iz}\right)/z^2$ とする．$C(R,\varepsilon)$ で囲まれる領域内で $F(z)$ は正則なので，留数定理から，

$$\int_{C(R,\varepsilon)}F(z)\,dz=0. \tag{6.86}$$

また，

$$\int_{C(R,\varepsilon)}F(z)\,dz=\left(\int_{-R}^{-\varepsilon}+\int_\varepsilon^R+\int_{C_R}-\int_{C_\varepsilon}\right)F(z)\,dz. \tag{6.87}$$

半円上の線積分を評価する．$R\to\infty$ のとき，

$$\left|\int_{C_R}F(z)\,dz\right|\le\int_{C_R}\left|\frac{1-e^{-R\sin\theta+iR\cos\theta}}{R^2}\right||dz|\le\frac{2\pi}{R}\to 0. \tag{6.88}$$

$z=0$ の近傍で

$$F(z)=\frac{1-e^{iz}}{z^2}=\frac{1-\left\{1+iz+O\left(z^2\right)\right\}}{z^2}=\frac{-i}{z}+O(1) \tag{6.89}$$

と表されるので，

$$\int_{C_\varepsilon}F(z)\,dz=-i\int_{C_\varepsilon}\frac{dz}{z}+O(\varepsilon)=-i\int_0^\pi\frac{d\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)}{\varepsilon e^{i\theta}}+O(\varepsilon)\to\pi\quad(\varepsilon\to 0). \tag{6.90}$$

以上より，$2I-\pi=0$ ．すなわち

$$I=\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=\int_0^\infty\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2} \tag{6.91}$$

□

6.2.5　留数定理を用いた定積分の計算 IV

$0 < \alpha < 1$ とし, $F(z)$ を次の条件を充たす有理関数とする：

(i) $\lim_{z\to\infty} F(z) = 0$.

(ii) $F(z)$ は実軸の部分集合 $x \geq 0$ の上に極を持たない.

領域 $D = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上で対数関数の主値 $\operatorname{Log} z$ を

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z, \qquad 0 < \operatorname{Arg} z < 2\pi \tag{6.92}$$

で定め, $z^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log} z)$ と定める．$F(x)/x^\alpha$ を実軸の $x > 0$ で定義された関数，$F(z)/z^\alpha$ を領域 $D = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の有理型関数と見るとき，

$$\int_0^\infty \frac{F(x)}{x^\alpha}\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i\alpha}} \sum_{a\in D} \operatorname{Res}\left(\frac{F(z)}{z^\alpha}, a\right). \tag{6.93}$$

Proof.　条件より $F(z)$ は原点のある近傍 $B(\delta), \delta > 0$ 上で正則なので, 定数 C が存在して

$$|F(z)| \leq C \qquad z \in B(\delta). \tag{6.94}$$

また，$F(z)$ は有理関数なので，条件 (i) より定数 $M > 0, \rho > 0$ が存在して，

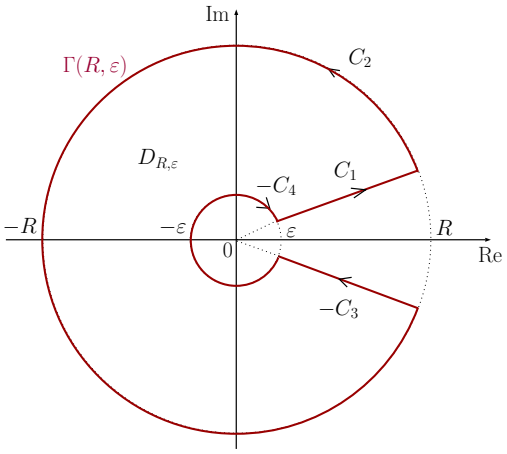
$$|F(z)| \leq \frac{M}{|z|} \qquad |z| > \rho. \tag{6.95}$$

$R \gg 1$ を十分大きな実数とし，$0 < \varepsilon \ll 1$ を十分小さな正数とする．単一閉曲線 $\Gamma(R, \varepsilon)$ を以下のように定める：

$$\Gamma(R, \varepsilon) = C_1 + C_2 - C_3 - C_4, \tag{6.96}$$

$$C_1 = \left\{re^{\varepsilon i};\ \varepsilon \leq r \leq R\right\}, \qquad C_2 = \left\{Re^{i\theta};\ \varepsilon \leq \theta \leq 2\pi - \varepsilon\right\}, \tag{6.97}$$

$$C_3 = \left\{re^{(2\pi-\varepsilon)i};\ \varepsilon \leq r \leq R\right\}, \qquad C_4 = \left\{\varepsilon e^{i\theta};\ \varepsilon \leq \theta \leq 2\pi - \varepsilon\right\}. \tag{6.98}$$



$\Gamma(R, \varepsilon)$ で囲まれる領域を $D_{R,\varepsilon}$ とする.

$F(z)$ は実軸の非負部分に極を持たないので $F(z)/z^\alpha$ は $\overline{D_{R,\varepsilon}}$ 上の有理型関数であり，$\Gamma(R,\varepsilon)$ 上に極を持たない．留数定理より，

$$\int_{\Gamma(R,\varepsilon)} \frac{F(z)}{z^\alpha}\,dz = 2\pi i \sum_{a\in D_{R,\varepsilon}} \operatorname{Res}\left(\frac{F(z)}{z^\alpha}, a\right). \tag{6.99}$$

$\varepsilon \to 0$ のとき，C_1, C_3, C_4 上の線積分を評価する．C_1 上で，$\varepsilon \to 0$ のとき

$$z^\alpha = \exp\{\alpha(\log|z| + i\operatorname{Arg} z)\} = \exp\{\alpha(\log|z| + i\varepsilon)\} = r^\alpha e^{\varepsilon i\alpha} \to r^\alpha \tag{6.100}$$

であり，$0<\alpha<1$ のとき $|z|^{-\alpha} = r^{-\alpha}$ は閉区間 $[0,1]$ 上で広義積分可能であるから，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_1} \frac{F(z)}{z^\alpha}\,dz \to \int_0^R \frac{F(x)}{x^\alpha}\,dx. \tag{6.101}$$

同様に，C_3 上で，$\varepsilon \to 0$ のとき

$$z^\alpha = \exp\{\alpha(\log|z| + i\operatorname{Arg} z)\} = \exp\{\alpha(\log|z| + i(2\pi-\varepsilon)\} = r^\alpha e^{(2\pi-\varepsilon)i\alpha} \to r^\alpha e^{2\pi i\alpha} \tag{6.102}$$

であり，$0<\alpha<1$ のとき $|z|^{-\alpha} = r^{-\alpha}$ は閉区間 $[0,1]$ 上で広義積分可能であるから，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_3} \frac{F(z)}{z^\alpha}\,dz \to e^{-2\pi i\alpha}\int_0^R \frac{F(x)}{x^\alpha}\,dx. \tag{6.103}$$

仮定 $0<\alpha<1$ と (6.94) より，

$$\left|\int_{C_4} \frac{F(z)}{z^\alpha}\,dz\right| \le \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \frac{|F(z)|}{|z|^\alpha}\,|dz| \le C\int_0^{2\pi} \varepsilon^{1-\alpha}\,d\theta = 2\pi C\varepsilon^{1-\alpha} \to 0. \tag{6.104}$$

(6.103), (6.104) より，

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma(R,\varepsilon)} \frac{F(z)}{z^\alpha}\,dz &= \int_0^R \frac{F(x)}{x^\alpha}\,dx + \int_{C_2} \frac{F(z)}{z^\alpha}\,dz - e^{-2\pi i\alpha}\int_0^R \frac{F(x)}{x^\alpha}\,dx \\ &= \left(1-e^{-2\pi i\alpha}\right)\int_0^R \frac{F(x)}{x^\alpha}\,dx + \int_{C_2} \frac{F(z)}{z^\alpha}\,dz.\end{aligned} \tag{6.105}$$

次に $R\to\infty$ とするとき，C_2 上の積分を評価する．$\alpha>0$ であるから，(6.95) より，

$$\left|\int_{C_2} \frac{F(z)}{z^\alpha}\,dz\right| \le \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \frac{|F(z)|}{|z|^\alpha}\,|dz| \le \int_0^{2\pi} \frac{M}{|z|^{1+\alpha}}\,|dz| = 2\pi M R^{-\alpha} \to 0. \tag{6.106}$$

(6.95) より $F(x)/x^\alpha$ は $x\ge 0$ 上で絶対積分可能なので，(6.105), (6.106) より，

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma(R,\varepsilon)} \frac{F(z)}{z^\alpha}\,dz = \left(1-e^{-2\pi i\alpha}\right)\int_0^\infty \frac{F(x)}{x^\alpha}\,dx. \tag{6.107}$$

R が十分大きく $\varepsilon>0$ が十分小さければ，$F(z)/z^\alpha$ の上半平面にある全ての極は $D_{R,\varepsilon}$ に含まれるので，(6.99) と (6.107) を比較することにより，

$$\left(1-e^{-2\pi i\alpha}\right)\int_0^\infty \frac{F(x)}{x^\alpha}\,dx = 2\pi i\sum_{a\in D} \operatorname{Res}\left(\frac{F(z)}{z^\alpha}, a\right). \tag{6.108}$$

以上により，主張が示された． □

例 6.12. $0 < \alpha < 1$ のとき,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}. \tag{6.109}$$

Proof. $F(z) = (1+z)^{-1}$ は $z = -1$ のみにおいて一位の極を持つ．$z = -1$ において $z^\alpha = e^{\alpha(\log|z| + i \operatorname{Arg} z)} = e^{i\pi\alpha}$ であるから，

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^\alpha(1+z)}, -1\right) = e^{-\pi i\alpha} \tag{6.110}$$

従って,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i\alpha}} e^{-\pi i\alpha} = \pi \frac{2i}{e^{\pi i\alpha} - e^{-\pi i\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}. \tag{6.111}$$

となり，主張が従う. □

6.2.6 留数定理を用いた定積分の計算例 V

$F(z)$ を次の条件を充たす有理関数とする：

(i) $\lim_{z\to\infty} zF(z) = 0$.

(ii) $F(z)$ は実軸の部分集合 $x \geq 0$ の上に極を持たない.

(iii) $F(z)$ は実軸上で実数値を取る.

領域 $D = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上で対数関数の主値 $\operatorname{Log} z$ を

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z, \quad 0 < \operatorname{Arg} z < 2\pi \tag{6.112}$$

で定める．$F(x)\log x$ を実軸の $x > 0$ で定義された関数，$F(z)\log z$ を領域 $D = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の有理型関数と見るとき,

$$\int_0^\infty F(x)\log x\, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\sum_{a\in D} \operatorname{Res}\left(F(z)(\operatorname{Log} z)^2, a\right)\right) \tag{6.113}$$

$$\int_0^\infty F(x)\, dx = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im}\left(\sum_{a\in D} \operatorname{Res}\left(F(z)(\operatorname{Log} z)^2, a\right)\right) \tag{6.114}$$

Proof. 閉曲線 $\Gamma(R,\varepsilon) = C_1 + C_2 - C_3 - C_4$ と $\Gamma(R,\varepsilon)$ で囲まれる領域 $D_{R,\varepsilon}$ を前節と同様に定める．$F(z)$ は実軸の非負部分に極を持たないので $F(z)(\operatorname{Log} z)^2$ は $\overline{D_{R,\varepsilon}}$ 上の有理型関数であり，$\Gamma(R,\varepsilon)$ 上に極を持たない．留数定理より，

$$\int_{\Gamma(R,\varepsilon)} F(z)(\operatorname{Log} z)^2\,dz = 2\pi i \sum_{a\in D_{R,\varepsilon}} \operatorname{Res}\left(F(z)(\operatorname{Log} z)^2, a\right). \tag{6.115}$$

$\varepsilon \to 0$ のとき，C_1, C_3, C_4 上の線積分を評価する．C_1 上で，$\varepsilon \to 0$ のとき

$$\operatorname{Log}|z| + i\operatorname{Arg} z = \operatorname{Log}|z| + i\varepsilon = \log r + \varepsilon i \to \log r \tag{6.116}$$

であり，$\log z = \log r$ は閉区間 $[0,1]$ 上で広義積分可能であるから，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_1} F(z)(\operatorname{Log} z)^2\,dz \to \int_0^R F(x)(\log x)^2\,dx. \tag{6.117}$$

同様にして，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_3} F(z)(\operatorname{Log} z)^2\,dz \to \int_0^R F(x)(\log x + 2\pi i)^2\,dx. \tag{6.118}$$

また，

$$\left|\int_{C_4} F(z)(\operatorname{Log} z)^2\,dz\right| \le \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} |F(z)|\,|\log|z| + 2\pi i|^2\,|dz| \le 2\pi C\varepsilon\left(\log\varepsilon^{-1} + 2\pi\right)^2 d\theta \to 0. \tag{6.119}$$

(6.117), (6.118), (6.119) より，

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma(R,\varepsilon)} F(z)(\operatorname{Log} z)^2\,dz \\
&= \int_0^R F(x)(\log x)^2 dx + \int_{C_2} F(z)(\operatorname{Log} z)^2\,dz - \int_0^R F(x)(\log x + 2\pi i)^2\,dx \\
&= -4\pi i\int_0^R F(x)\log x\,dx - (2\pi i)^2\int_0^R F(x)\,dx + \int_{C_2} F(z)(\operatorname{Log} z)^2\,dz.
\end{aligned} \tag{6.120}$$

次に $R\to\infty$ とするとき，C_2 上の積分を評価する：

$$\left|\int_{C_2} F(z)(\operatorname{Log} z)^2\,dz\right| \le \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} |F(z)|\,|\log|z| + i(2\pi-\varepsilon)|^2\,|dz| \le M\frac{(\log R + 2\pi)^2}{R^2}2\pi R \to 0. \tag{6.121}$$

従って，

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma(R,\varepsilon)} F(z)(\operatorname{Log} z)^2\,dz = -4\pi i\int_0^\infty F(x)\log x\,dx - (2\pi i)^2\int_0^\infty F(x)\,dx. \tag{6.122}$$

R が十分大きく $\varepsilon > 0$ が十分小さければ，$F(z)\operatorname{Log} z$ の上半平面に在る全ての極は $D_{R,\varepsilon}$ に含まれるので，(6.115) と (6.122) を比較することにより，

$$2\int_0^\infty F(x)\log x\,dx + 2\pi i\int_0^\infty F(x)\,dx = -\sum_{a\in D}\operatorname{Res}\left(F(z)(\operatorname{Log} z)^2, a\right). \tag{6.123}$$

$F(x)$ が実軸上で実数値を取る事から，この式の両辺を比較して主張が得られる． □

例 6.13.

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^3}\,dx = -\frac{1}{2}. \tag{6.124}$$

Proof. $\operatorname{Log} z$ は $(\operatorname{Log} z)' = 1/z$ を充すので，

$$\frac{d^n}{dz^n}\operatorname{Log} z = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}z^{-1} = -\frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}}z^{-2} = (-1)(-2)\frac{d^{n-3}}{dz^{n-3}}z^{-3} = \cdots = (-1)^{n-1}(n-1)!z^{-n}. \tag{6.125}$$

従って，$\operatorname{Log} z$ の $z=-1$ における Taylor 展開は

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}(-1+(z+1)) = \operatorname{Log}(-1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left.\frac{d^n}{dt^n}\right|_{t=-1}\operatorname{Log} t\cdot\frac{(z+1)^n}{n!} = \pi i - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n} \tag{6.126}$$

と計算されるので，$u = z+1$ とおけば，

$$\begin{aligned}\frac{(\operatorname{Log} z)^2}{(1+z)^3} &= \frac{1}{(1+z)^3}\left(\pi i - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n}\right)^2 = u^{-3}\left(\pi i - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{n}\right)^2 \\ &= u^{-3}\left(\pi i - u - \frac{1}{2}u^2\right)^2 + O(1) = u^{-3}\left((\pi i)^2 - 2\pi i u - \pi i u^2 + u^2\right) + O(1)\end{aligned} \tag{6.127}$$

より，$\operatorname{Res}\left(\dfrac{(\operatorname{Log} z)^2}{(1+z)^3}, -1\right) = 1 - \pi i$．従って，

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^3}dx = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{(\operatorname{Log} z)^2}{(1+z)^3}, -1\right)\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}(1-\pi i) = -\frac{1}{2}. \tag{6.128}$$

□

7　偏角原理とその応用

7.1　回転数と偏角原理

$\Omega \subset \mathbb{C}$ を領域とする．Ω の孤立部分集合を除き正則な関数 $f(z)$ は，除かれた孤立集合が $f(z)$ の除去可能特異点か極になっているとき，Ω 上の**有理型関数**（meromorphic function）と呼ばれる．Ω 上の有理型関数全体を $\mathcal{M}(\Omega)$ で表す．恒等的には零でない有理型関数 $f(z) \in \mathcal{M}(\Omega)$ と $a \in \Omega$ に対して，以下のように整数 $\operatorname{ord}_{z=a} f(z) \in \mathbb{Z}$ を定める：

$$\operatorname{ord}_{z=a} f(z) := \begin{cases} \text{零点の位数} & (f(z) \text{ が } z=a \text{ で正則のとき}) \\ \text{極の位数} \times (-1) & (f(z) \text{ が } z=a \text{ で極を持つとき}). \end{cases}$$

恒等的には零でない有理型関数の零点と極は孤立しているので（各自理由を考えよ），Ω のコンパクト部分集合を与えるとき，その中に含まれる $\operatorname{ord}_{z=a} f(z) \neq 0$ となる点は有限個である．

定理 7.1 (偏角原理，argument principle)．$\Omega \subset \mathbb{C}$ を有界領域とし，$\partial\Omega$ は有限個の区分的 C^1 級単純閉曲線であるとする．$f(z) \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ が $\partial\Omega$ 上に零点も極も持たないならば，任意の $g(z) \in \mathcal{O}(\overline{\Omega})$ に対して，

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} g(z)\, dz = \sum_{a \in \Omega} g(a) \cdot \operatorname{ord}_{z=a} f(z).$$

特に，$g(z) = 1$ の場合を考えれば，

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{a \in \Omega} \operatorname{ord}_{z=a} f(z).$$

Proof.　$f(z)$ の零点全体を $\{a_j\}$，極全体を $\{b_k\}$ で表す．$f(z)$ の a_j における Taylor 展開を考えれば，a_j の近傍で $f(z) = (z-a_j)^{m_j} \epsilon_j(z)$，$\epsilon_j(z)$ は $\epsilon_j(a_j) \neq 0$ をみたす a_j の近傍で定義された正則関数，$m_j = \operatorname{ord}_{z=a_j} f(z)$ と表示される．このとき，a_j の近傍において，

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_j (z-a_j)^{m_j-1} \epsilon_j(z) + (z-a_j)^{m_j} \epsilon_j'(z)}{(z-a_j)^{m_j} \epsilon_j(z)} = \frac{m_j}{z-a_j} + \text{ 正則関数.}$$

同様に，$f(z)$ の b_k における Laurent 展開を考えれば，b_k の近傍で $f(z) = (z-b_k)^{-n_k} \epsilon_k(z)$，$\epsilon_k(z)$ は $\epsilon_k(b_k) \neq 0$ をみたす b_k の近傍で定義された正則関数，$-n_k = \operatorname{ord}_{z=b_k} f(z)$ と表示される．このとき，b_k の近傍において，

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n_k (z-b_k)^{-n_k-1} \epsilon_k(z) + (z-b_k)^{-n_k} \epsilon_k'(z)}{(z-b_k)^{-n_k} \epsilon_k(z)} = \frac{-n_k}{z-b_k} + \text{ 正則関数.}$$

集合 $\{a_j\} \cup \{b_k\}$ の外側では $f'(z)/f(z)$ は正則なので，$f'(z)/f(z)$ に対して留数定理を用いれば，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} g(z)\,dz &= \sum_{a_j} \mathrm{Res}_{z=a_j}\, g(z) \left(\frac{m_j}{z-a_j} + \text{ 正則関数 } \right) \\
&\quad + \sum_{b_k} \mathrm{Res}_{z=b_k}\, g(z) \left(\frac{-n_k}{z-b_k} + \text{ 正則関数 } \right) \\
&= \sum_{a_j} m_j g\left(a_j\right) - \sum_{b_k} n_k g\left(b_k\right) \\
&= \sum_{a_j} g\left(a_j\right) \cdot \mathrm{ord}_{z=a_j}\, f(z) + \sum_{b_k} g\left(b_k\right) \cdot \mathrm{ord}_{z=b_k}\, f(z) \\
&= \sum_{a\in\Omega} g(a) \cdot \mathrm{ord}_{z=a}\, f(z).
\end{aligned}$$

以上から，主張が示された． □

一般に $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ を単純とは限らない区分的 C^1 級閉曲線とする，i.e.，$\gamma(0) = \gamma(1)$．γ の像が $a \in \mathbb{C}$ を含まないとき，γ の点 a に関する**回転数** $n(\gamma, a)$ を次式で定義する：

$$n(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

$\gamma(t) - a$ を極座標表示する：

$$\gamma(t) - a = |\gamma(t) - a| \cdot e^{i\theta(t)}.$$

$\theta(0)$ は $2\pi\mathbb{Z}$ の不定性を持つが，その値を一つ決めれば区分的 C^1 級関数 $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ が定まる．条件 $\gamma(0) = \gamma(1)$ から，

$$\theta(1) - \theta(0) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

$\gamma(t) - a$ の極座標表示を用いれば，

$$\frac{dz}{z-a} = \frac{\gamma'(t)\,dt}{\gamma(t)-a} = i\theta'(t)\,dt + \frac{d}{dt}\log|\gamma(t)-a|\,dt.$$

この式と $\gamma(0) = \gamma(1)$ より，

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \left(i\theta'(t) + \frac{d}{dt}\log|\gamma(t)-a| \right) dt = \frac{\theta(1)-\theta(0)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

となり，回転数 $n(\gamma, a)$ は曲線 $\gamma(t) - a$ が一周するときの偏角の変動（を 2π で割った量）を表す．回転数を用いれば，偏角の原理（$g(z) = 1$ の場合）は以下のように定式化される：

$$n(f(\partial\Omega), 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{a\in\Omega} \mathrm{ord}_{z=a}\, f(z).$$

但し，$f(\partial\Omega)$ は単純閉曲線の非交和 $\partial\Omega$ を $f(z)$ で写像して得られる閉曲線の非交和であり，$f(z)$ が $\partial\Omega$ 上で零も極も持たないことから $f(\partial\Omega)$ は原点を通らない曲線である．

7.2 偏角原理の応用

定理 7.2 (Rouché の定理)**.** $\Omega \subset \mathbb{C}$ を有界領域とし，$\partial\Omega$ は有限個の区分的 C^1 単純閉曲線とする．$f(z), g(z) \in \mathcal{O}(\overline{\Omega})$ は $\partial\Omega$ 上で次の不等式をみたすとする：

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|.$$

このとき，重複度も含めて数えれば，$f(z)$ と $g(z)$ は Ω 内に同数の零点を持つ．

Proof. 条件より，$\partial\Omega$ 上で $f(z)$ も $g(z)$ も零点を持たない．実際，$z_0 \in \partial\Omega$ で $f(z_0) = 0$ ならば，$0 \leq |f(z_0) - g(z_0)| < |f(z_0)| = 0$ となり，矛盾である．また，$z_1 \in \partial\Omega$ に対して $g(z_1) = 0$ ならば，$|f(z_1)| = |f(z_1) - g(z_1)| < |f(z_1)|$ となり，やはり矛盾である．偏角原理より，以下の等式を示せば良い：

$$n(f(\partial\Omega), 0) = n(g(\partial\Omega), 0). \tag{7.1}$$

等式

$$g(z) = f(z) + (g(z) - f(z)) = f(z)\left(1 - \frac{f(z) - g(z)}{f(z)}\right)$$

より，$h(z) := 1 - \frac{f(z)-g(z)}{f(z)}$ と定めれば，

$$n(g(\partial\Omega), 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{(f(z)h(z))'}{f(z)h(z)}\, dz = n(f(\partial\Omega), 0) + n(h(\partial\Omega), 0). \tag{7.2}$$

条件 $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ より，$z \in \partial\Omega$ に対して，$(f(z) - g(z))/f(z)$ は原点を中心とする半径 1 の円盤 B に含まれる．従って，$h(\partial\Omega)$ は点 $1 \in \mathbb{C}$ を中心とする半径 1 の 円盤に含まれる．従って，z が $\partial\Omega$ 上を一周するとき，$h(z)$ の偏角の変動は零であり，

$$n(h(\partial\Omega), 0) = 0. \tag{7.3}$$

(7.2), (7.3) より (7.1) が従う． □

例 7.3. $a > 1$ のとき，$ze^{a-z} = 1$ は $|z| < 1$ 内にただ *1* つの解を持つ．
証明：$f(z) := ze^{a-z}$, $g(z) := ze^{a-z} - 1$ と置く．$f(z)$ は $|z| < 1$ 内にただ *1* つの零点 $z = 0$（1 位の零点）を持つ．また，$|z| = 1$ 上で，$\mathrm{Re}\, z \leq 1$ なので $e^{\mathrm{Re}\, z} \leq e$ となる．よって

$$|f(z)| = \left|e^{a-z}\right| = e^{a - \mathrm{Re}\, z} \geq e^a e^{-1} = e^{a-1} > 1 = |f(z) - g(z)| \qquad (|z| = 1)$$

が成り立つ．従って，*Rouché* の定理を適用できて，$g(z) = ze^{a-z} - 1$ も $|z| < 1$ 内に零点をただ 1 つ（1 位の零点）を持つことになる．

例 7.4. $p(z) := z^6 + 9z^4 + z^3 + 2z + 4$ として，$p(z) = 0$ の解は $|z| < 1$ 内に *4* 個ある．
証明：$f(z) := 9z^4$, $g(z) := p(z)$ と置く．

$$|f(z)| = 9 \qquad (|z| = 1),$$
$$|f(z) - g(z)| = |z^6 + z^3 + 2z + 4| \leq 1 + 1 + 2 + 4 = 8 < |f(z)| \qquad (|z| = 1)$$

が成り立つ．$|z| < 1$ 内に $f(z)$ の零点は *4* 個ある．よって，*Rouché* の定理より $g(z)$ の零点も $|z| < 1$ 内には *4* 個ある．

定理 7.5 (代数学の基本定理)**.** 定数でない n 次多項式 $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ に対し，方程式 $f(z) = 0$ は重複も含め丁度 n 個の根を持つ.

Proof. $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0, a_n \neq 0$ とすれば,

$$|f(z)| \geq |a_n|\,|z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|z|^n}\right).$$

$R > 0$ が存在して，$|z| > R$ ならば

$$1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \geq \frac{1}{2}$$

となるので，$|z| > R$ のとき以下の評価が成り立つ:

$$|f(z)| \geq \frac{|a_n|\,|z|^n}{2} \geq \frac{|a_n|\,R^n}{2} > 0. \tag{7.4}$$

特に，$f(z) = 0$ は $\mathbb{C}\backslash B(R)$ に根を持たない. $g(z) = a_n z^n$ とすれば，$f(z) - g(z)$ は z の $n-1$ 次以下の多項式なので，(7.4) より

$$\frac{|f(z) - g(z)|}{|f(z)|} \leq \sup_{z \in \partial B(R)} \frac{C|z|^{n-1}}{|f(z)|} \leq \frac{2CR^{n-1}}{|a_n|\,R^n} = \frac{2C}{|a_n|\,R} \qquad \forall z \in \partial B(R).$$

ここで，$R \geq 1$ とすれば，$C = \max_{j=0,\ldots,n-1} |a_j|$ とできる．R が充分大きければ，$\partial B(R)$ 上で $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ がみたされる．Rouché の定理より，

$$\sum_{a \in B(R)} \operatorname{ord}_{z=a} f(z) = \sum_{a \in B(R)} \operatorname{ord}_{z=a} g(z) = \operatorname{ord}_{z=0} a_n z^n = n$$

となるから，$f(z) = 0$ は重複も含めて $B(R)$ に丁度 n 個の根を持つ．これと $f(z) = 0$ が $\mathbb{C}\backslash B(R)$ に根を持たないことを併せれば，主張が従う． □

定理 7.6. $f(z) \in \mathcal{O}(B)$ とする．$z_0 \in B$ と $w_0 \in \mathbb{C}$ に対して，$f(z) - w_0$ は $z = z_0$ で n 位の零点を持つと仮定する.

(1) 充分小さな任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して，$w \in B(w_0, \delta)$ ならば，関数 $f(z) - w$ は $B(z_0, \varepsilon)$ に丁度 n 個の零点 $z_1(w), \ldots, z_n(w)$ を持つ.

(2) *(1)* で得られた $f(z) = w$ の根 $z_1(w), \ldots, z_n(w)$ は，任意の $k \geq 0$ に対して次式をみたす：

$$\sum_{j=1}^{n} z_j(w)^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z) - w} z^k \, dz.$$

(3) $n = 1$ のとき，逆関数 $f^{-1}(w) \in \mathcal{O}(B(w_0, \delta))$ が存在し，次式で与えられる：

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z) - w} z \, dz.$$

Proof. (3) は (1), (2) から直ちに従うので，(1), (2) を示す．

(1) 正則関数の零点は孤立しているので，$\varepsilon > 0$ を充分小さく選び，$\overline{B(z_0, \varepsilon)}$ に存在する $f(z) - w_0$ の零点は $z = z_0$ のみであるようにできる．特に，$f(z) - w_0$ は $\partial B(z_0, \varepsilon)$ 上に零点を持たない．二変数関数 $f(z) - w$ の連続性より，$\delta > 0$ が存在して，$z \in \partial B(z_0, \varepsilon)$, $w \in B(w_0, \delta)$ ならば，$f(z) - w$ は $\partial B(z_0, \varepsilon)$ に零点を持たない．偏角原理より，$f(z) = w$ は $B(z_0, \varepsilon)$ に重複も含め $n(f(\partial B(z_0, \varepsilon)) - w, 0)$ 個の零点を持つ．ここで，

$$n(f(\partial B(z_0, \varepsilon)) - w, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = \varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z) - w} \, dz$$

は整数に値を取る w の正則関数なので，

$$n(f(\partial B(z_0, \varepsilon)) - w, 0) = n(f(\partial B(z_0, \varepsilon)) - w_0, 0) = n.$$

(2) 最初の等式は，定理 7.1 で $g(z) = z^k$ とすれば従う．この式の右辺は w の正則関数なので，$\sum_j z_j (w)^k \in \mathcal{O}(B(w_0, \delta))$ である．

□

系 7.7. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を領域，$f \in \mathcal{O}(\Omega)$ とする．

(1) $f(z)$ が定数関数でなければ，$f(z)$ は開写像である．即ち，任意の開部分集合 $U \subset \Omega$ に対して，$f(U)$ は開集合である．

(2) $f(z)$ が Ω から $f(\Omega)$ への一対一の写像（単葉）ならば，$f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ も正則な写像である．

Proof.

(1) 任意の $b \in f(U)$ に対して，$B(b, \varepsilon) \subset f(U)$ となる $\varepsilon > 0$ が存在すれば良いが，これは定理 7.6 (1) から従う．実際，$f(z) = b$ の根 $z = a$ の位数を $k \geq 1$ とすると，関数 $f(z) - b$ に定理 7.6 (1) を適用すれば，十分小さいすべての $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して，$|w - b| < \delta$ をみたす任意の w に対して $f(z) = w$ をみたす点 z が $B(a, \varepsilon)$ 内にちょうど k 個存在する．ε を $B(a, \varepsilon) \subset U$ となるように選んでおけば，これは $B(b, \delta) \subset f(B(a, \varepsilon)) \subset f(U)$ を意味する．

(2) $f(z)$ が一対一の写像なので，逆写像が定義される．定理 7.6 (3) より，f^{-1} は正則である．
□